Principio de Revelación en Diseño de Mecanismos

Marcelo Gallardo

PUCP

Diciembre 2024

Mecanismos

Mecanismos

1. Seguimos a [Mas-Colell et al., 1995] (capítulo 23), [Menezes and Monteiro, 2005] (capítulo 6), [Börgers, 2015] (capítulo 3) y [rev, 2020]. Para los fundamentos de juegos Bayesianos, ver [Gibbons, 1992].
2. El diseño de mecanismos es a veces conocido como la parte ingenieril de la teoría de juegos. Es un área cuyo objetivo es diseñar juegos tales que, una vez jugados por agentes racionales, se alcanza un **outcome** específico deseado.
3. El diseño de mecanismos consiste en tres partes esencialmente: (i) el propio mecanismo, (ii) conceptos de solución (equilibrio) y (iii) los posibles objetivos.
4. La interacción entre la persona que diseña el mecanismo y los participantes puede ser modelada por un juego con varias etapas.
5. A continuación nos limitamos al caso de dos etapas: (i) primero se diseña el mecanismo, (ii) luego los participantes juegan en simultáneo.

Metodología

1. La metodología para abordar el diseño de mecanismos es la teoría de juegos Bayesianos.
2. Describimos a continuación los elementos del juego.
   - Conjunto de jugadores $I = \{1, \cdots, n\}$.
   - Cada jugador $i \in I$ tiene un tipo $\theta_i \in \Theta_i$, donde Θ_i es el espacio de todos los posibles tipos del jugador i. Por ejemplo, en teoría de contratos, más específicamente discriminación de precios de grado 2, el tipo refleja la valoración del consumidor. Lo mismo sucede en subastas.
   - Cada jugador i tiene un espacio de acciones A_i.
   - Una función $g : A = \prod_{i=1}^{n} A_i \to X$, siendo X un espacio de outcomes. Por ejemplo, si el **outcome** fuera la provisión de un bien público discreto, podríamos tener $X = \{0, 1\}$.
   - Funciones de pago $u_i : X \times \Theta \to \mathbb{R}$, donde $\Theta = \prod_{i=1}^{n} \Theta_i$. Esto significa que los pagos dependen del tipo y del outcome.
3. El juego queda resumido por:

$$\Gamma = \langle I, \{A_i\}_{i\in I}, \{\Theta_i\}_{i\in I}, X, g(\cdot), \{u_i\}_{i\in I} \rangle .$$

   Note que una **estrategia** en este contexto es una función $s_i : \Theta_i \to A_i$.
4. Desde ahora, Γ será referido como mecanismo. A veces se usa la letra M.

$$
\begin{tikzcd}
\Theta = \prod_{i=1}^{I} \Theta_i \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \\
& S = \prod_{i=1}^{I} S_i \arrow[ur, "g(s(\theta))"'] &
\end{tikzcd}
$$

Equilibrio (solución)

1. El tipo de cada individuo θ_i es una variable aleatoria. Denotaremos $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ y supondremos que θ se distribuye de manera conjunta según una distribución $F(\cdot)$.
2. Dado un mecanismo Γ, una solución es un perfil de estrategias $\mathbf{s}^*$.
3. Existen distintos conceptos de solución. Para ello, presentamos a continuación algunas definiciones clave.

Definición

Equilibrio Nash-Bayesiano. Un vector de estrategias $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i}) \in \mathcal{S} = \prod_{i=1}^{n} S_i = \prod_{i=1}^{n} X^{A_i}$ [a] es un equilibrio Nash-Bayesiano en un mecanismo Γ si ningún jugador puede incrementar su utilidad esperada ex-ante cambiando unilateralmente su estrategia. Matemáticamente,

$$\mathbb{E}_{\theta\sim F}[u_i(g(\mathbf{s}(\theta));\theta)] \geq \mathbb{E}_{\theta\sim F}[u_i(g(s_i'(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}));\theta)], \ \forall\ i \in I,\ s_i' \in S_i.$$

[a] B^A es el espacio de las funciones de A en B.

Conceptos básicos

Definición

Un vector de estrategias $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i})$ es un equilibrio de Nash ex-post en un mecanismo Γ si ningún jugador puede incrementar su utilidad esperada ex-post desviándose unilateralmente por cambiar su estrategia. Matemáticamente:

$$u_i(g(\mathbf{s}(\theta)); \theta) \geq u_i(g(s_i'(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i})); \theta), \ \forall \ i \in I, \ \forall \ s_i' \in S_i.$$

Definición

Una estrategia s_i para un jugador $i \in I$ es dominante si es débilmente óptima, sin importar el comportamiento del resto de los jugadores. Esto es,

$$u_i(g(s_i(\theta_i); \mathbf{a}_{-i}); \theta_i) \geq u_i(g(s_i'(\theta_i), \mathbf{a}_{-i}); \theta), \ \forall \ s_i' \in S_i, \ \mathbf{a}_{-i} \in \prod_{j \neq i} A_j, \ \forall \ \theta \in \Theta.$$

Definición

Un vector de estrategias $\mathbf{s} \in S$ es una estrategia de equilibrio dominante si todos los jugadores juegan estrategias dominantes.

Outcome deseado

1. El criterio bajo el cual un mecanismo debe ser evaluado depende altamente del contexto.
2. Usualmente, hay dos alternativas para evaluar un mecanismo.
3. Una función de elección social $f : \Theta \to X$. En este caso, un diseño es exitoso si $g(\mathbf{s}^*(\theta)) \in f(\theta)$ para todos los perfiles θ, o parcialmente exitoso si $g(\mathbf{s}^*(\theta)) \cap f(\theta) \neq \emptyset$. **Note** que g y f toman valores de subconjuntos de X: como son correspondencias (funciones punto-conjunto), $f(\theta)$ es un subconjunto de X, al igual que $g(\mathbf{s}^*(\theta))$.
4. Una alternativa es que el que diseña el mecanismo maximice una función numérica que depende de la solución al juego inducido, como lo puede ser una función de bienestar social [Bergson, 1938], [Samuelson, 1947]

$$\mathbb{E}_{\theta \sim F}[W(g(\mathbf{s}^*(\theta)))]$$

   o una función de recompensa

$$\mathbb{E}_{\theta \sim F}[R(g(\mathbf{s}^*(\theta)))].$$

5. Con los ejemplos estos elementos quedan más claros.

Mecanismos indirectos

Definición

Un mecanismo directo es un mecanismo en el cual el espacio de acciones coincide con el de los tipos: $\mathcal{S} = \Theta$.

Ejemplo

Subastas:

1. De primer precio.
2. De segundo precio.
3. Dutch.
4. English.

Observación

Esto significa que la estrategia de cada persona consiste en declarar un valor para su tipo.

Compatibilidad de incentivos

Definición

Un mecanismo directo es **Bayesiano-compatible según incentivos** si y solo si revelar el tipo es un equilibrio Bayesiano. Esto es,

$$\mathbb{E}_{\theta\sim F}[u_i(g(\theta_i,\theta_{-i});\theta)] \geq \mathbb{E}_{\theta\sim F}[u_i(g(\theta_i',\theta_{-i});\theta)], \quad \forall\ i \in I,\ \forall\ \theta_i' \in \Theta_i.$$

Definición

Un mecanismo directo es **ex-post compatible según incentivos** si revelar el tipo es ex-post un equilibrio de Nash. Esto es,

$$u_i(g(\theta_i,\theta_{-i}),\theta) \geq u_i(g(\theta_i',\theta_{-i}),\theta),\ \forall\ i \in I,\ \forall\ \theta_i' \in \Theta_i.$$

Definición

Un mecanismo directo es **dominante según la compatibilidad de incentivos** si

$$u_i(g(\theta_i,\theta_{-i}),\theta) \geq u_i(g(\theta_i',\theta_{-i}),\theta),\ \forall\ i \in I,\ \forall\ \theta_i' \in \Theta_i,\ \forall\ \theta_{-i} \in \Theta_{-i}.$$

Compatibilidad de incentivos

Proposición

En el caso de los mecanismos directos, un mecanismo ex-post compatible según incentivos (i) es equivalente a uno dominante según la compatibilidad de incentivos (ii).

Principio de Revelación

Theorem

Dado un mecanismo M para el cual existe un perfil de estrategias $\mathbf{s}$ de equilibrio, podemos construir un mecanismo de revelación directa equivalente M^*, en el cual decir la verdad (revelar su tipo) es un equilibrio.

Observación

Decir que M y M^* son equivalentes significa que

$$g(\mathbf{s}(\theta)) = g^*(\mathbf{s}^*(\theta)), \quad \forall\ \theta \in \Theta.$$

Observación

El teorema 1 nos dice que solo debemos fijarnos en mecanismos directos pues, podemos pasar de un mecanismo cualquiera a uno de revelación. En ese sentido, podemos simplificar sustancialmente el análisis.

1. **Problema Inicial:**

   El diseñador de un mecanismo M desea implementar una asignación g eficiente o maximizar una función objetivo. Cada agente i tiene un tipo privado $\theta_i \in \Theta_i$, que representa su información privada. En general, los participantes juegan estrategias $\mathbf{s}(\theta)$ en equilibrio.

2. **Principio de revelación:**

   Siempre existe un mecanismo de revelación directa M^* tal que:

   $$g(\mathbf{s}(\theta)) = g^*(\theta), \quad \forall\ \theta \in \Theta,$$

   donde decir la verdad (reportar θ) es un equilibrio en M^*.

3. **Construcción del mecanismo directo:**

   El mecanismo directo M^* induce a cada agente a reportar su tipo verdadero al resolver el siguiente problema de optimización de incentivos:

   $$u_i(\theta_i, g^*(\theta_i)) \geq u_i(\theta_i, g^*(\theta_i')),\ \forall\ \theta_i' \in \Theta_i,$$

   donde u_i es la función de utilidad del agente i. Esta formulación tiene un respectivo para el caso de la utilidad esperada.

1. **Ejemplo clave: Subastas.**

   En una subasta de primer precio, los postores envían ofertas $b_i = s(\theta_i)$. El mecanismo equivalente M^* es una subasta de segundo precio (Vickrey), donde reportar θ_i es óptimo:

$$b_i = \theta_i \implies u_i = \theta_i - p^*(\theta).$$

2. **Consecuencias:**
   - *Simplificación del diseño de mecanismos:*
     Los mecanismos de revelación directa facilitan el análisis de incentivos.
   - *Incentivos Compatibles:*
     El equilibrio garantiza que decir la verdad es óptimo:

$$\theta_i = \arg\max_{\theta_i'} u_i(\theta_i, g^*(\theta_i')).$$

   - *Aplicaciones:*
     Subastas eficientes (Vickrey-Clarke-Groves), contratos, bienes públicos, etc.

3. **Referencias:**

   - Myerson, R. (1981), *Optimal Auction Design*, *Mathematics of Operations Research*.
   - Green y Laffont (1977), *Characterization of Satisfactory Mechanisms*.
   - Mas-Colell, Whinston y Green (1995), *Microeconomic Theory*.

Aplicaciones y extensiones

Aplicaciones y extensiones

Hasta ahora tenemos definiciones y resultados generales. Discutiremos enseguida:

1. Screening.
2. Precios no lineales
3. Mecanismos Bayesianos.
4. Maximización del retorno esperado.
5. Subastas.

Seguimos a [Börgers, 2015] para los primeros puntos y a [Menezes and Monteiro, 2005] para el último.

Screening

1. La función de pagos es $\theta - t$ donde t es una transferencia monetaria y $\theta \geq 0$ la valoración privada del individuo.
2. $\theta \sim F$ con $dF/dx = f(x)$ y el soporte es $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.
3. $0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta}$.
4. $f(\theta) > 0$ for all θ.
5. La probabilidad de que la valoración de un individuo sea superior a p es $1 - F(p)$.
6. El p óptimo maximiza $p(1 - F(p))$.
7. Un mecanismo en este contexto es un par de funciones $q : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0, 1]$, $t : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}$.
8. q es la probabilidad que el comprador revele su verdadero tipo. $t(\theta)$ es lo que paga.
9. $s : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ indica el valor reportado al vendedor.

Screening

El principio de revelación en este contexto se enuncia de la manera siguiente:

Proposición

Para todo mecanismo Γ y toda estrategia óptima s, existe un mecanismo directo Γ' y una estrategia s' tal que

1. $s'(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in \Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.
2. Para todo $\theta \in \Theta$, $q(\theta)$ y $t(\theta)$ bajo Γ' son iguales a la probabilidad de compra y pago esperado bajo Γ y s.

Screening

Un mecanismo directo es compatible según incentivos si para todo $\theta \in \Theta$

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \ \forall \ \theta, \theta' \in \Theta.$$

Por otro lado, un mecanismo directo es individualmente racional si el comprador, controlando por su tipo, está dispuesto a participar:

$$u(\theta) \geq 0, \ \forall \ \theta \in \Theta.$$

Screening

Lema

Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces q es creciente en θ.

Proof.

Consideremos dos tipos θ y θ' con $\theta > \theta'$. La compatibilidad de incentivos requiere

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta')$$

y

$$\theta' q(\theta) - t(\theta) \leq \theta' q(\theta') - t(\theta').$$

Restando ambas desigualdades,

$$(\theta - \theta')q(\theta) \geq (\theta - \theta')q(\theta') \Leftrightarrow q(\theta) \geq q(\theta').$$

□

Screening

Lema

Si un mecanismo es directo es compatible según incentivos, entonces u es creciente. También es convexa y, por ende, diferenciable en casi todo punto. En los puntos de diferenciabilidad,

$$u'(\theta) = q(\theta).$$

Proof.

La condición de compatibilidad de incentivos implica que

$$u(\theta) = \max_{\theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]} (\theta q(\theta') - t(\theta')).$$

Para cualquier θ'

$$\theta q(\theta') - t(\theta')$$

es una función afín creciente, y por ende convexa en θ. El máximo de funciones crecientes es creciente y el máximo de funciones convexas también es convexa. Por lo tanto, u es creciente y convexa. Como consecuencia, es diferenciable en casi todo punto (salvo un conjunto enumerable). □

Screening

Proof.

Luego, para todo θ tal que u es diferenciable, se tiene que, dado $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{u(\theta+\delta)-u(\theta)}{\delta} &\geq \lim_{\delta\to 0}\frac{((\theta+\delta)q(\theta)-t(\theta))-(\theta q(\theta)-t(\theta))}{\delta}\\ &= q(\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{u(\theta)-u(\theta-\delta)}{\delta} &\leq \lim_{\delta\to 0}\frac{(\theta q(\theta)-t(\theta))-((\theta-\delta)q(\theta)-t(\theta))}{\delta}\\ &= q(\theta).\end{aligned}$$

Concluimos que $u'(\theta) = q(\theta)$ en casi todo punto. □

Screening

Lema

Equivalencia de pago. Considere un mecanismo directo compatible según incentivos. Entonces, para todo $\theta \in \Theta$

$$u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\theta) d\theta.$$

Lema

Equivalencia del retorno. Considere un mecanismo directo compatible según incentivos. Entonces, para todo $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ se tiene que

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\theta) dx.$$

Proposición

Un mecanismo directo (q, t) es compatible según incentivos si y solo si

1. q es no decreciente.
2. Para todo $\theta \in \Theta$,

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx. \tag{1}$$

Proof.

Para probar la suficiencia, basta probar que un tipo θ prefiere no hacerse pasar por uno de tipo θ'.

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta')$$

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - \theta' q(\theta') + \theta' q(\theta') - t(\theta') \Leftrightarrow$$

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - \theta' q(\theta') + u(\theta')$$

$$\Leftrightarrow$$

$$u(\theta) - u(\theta') \geq (\theta - \theta') q(\theta') \Leftrightarrow$$

$$\int_{\theta'}^{\theta} q(x)dx \geq \int_{\theta'}^{\theta} q(\theta')dx.$$

□

Proposición

Un mecanismo directo compatible según incentivos es individualmente racional si y solo si $u(\underline{\theta}) \geq 0$ (o equivalentemente $t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} q(\underline{\theta})$).

Lema

Si un mecanismo directo es compatible según incentivos e individualmente racional maximiza el beneficio esperado del vendedor, entonces

$$t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta}).$$

Proof.

Si $t(\underline{\theta}) < \underline{\theta} q(\underline{\theta})$, el vendedor puede incrementar sus beneficios usando un mecanismo con el mismo q pero un t tal que $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta})$ (o sea un t base mayor). $\square$

Screening

Observación

Hasta ahora, podemos concluir que el vendedor restringe su elección de las funciones q y t a aquellas que cumplen lo siguiente:

1. $q : \Theta \to [0, 1]$ son crecientes.
2. $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta})$.
3. Se sigue entonces de (1) que

$$t(\theta) = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x) dx.$$

El espacio $\mathcal{F}$

Vamos a estudiar brevemente con mayor detalle el conjunto de funciones q. Sea

$$\mathcal{F} = \{f : \Theta \to \mathbb{R}, \text{ acotadas}\}.$$

Dotamos a $\mathcal{F}$ de la siguiente estructura lineal

1. $g = \alpha f \Leftrightarrow, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{F}$.
2. $h = f + g, \forall f, g, h \in \mathcal{F}$.

De este modo, $\mathcal{F}$ se convierte en un espacio vectorial. Completamos la estructura algebraica con estructura topológica. Para ello, dotamos a $\mathcal{F}$ de la norma L^1:

$$||f||_1 = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} |f(\theta)| d\mu.$$

Acá μ es la medida de Lebesgue. Finalmente, denotamos $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ el conjunto de funciones crecientes en $\mathcal{F}$ tales que $f(x) \in [0, 1]$, para todo $x \in \Theta$.

El espacio $\mathcal{F}$

Lema

El conjunto $\mathcal{M}$ es compacto y convexo.

Definición

Si C es un conjunto convexo de X (espacio vectorial), entonces $x \in C$ es un punto extremo de C si para todo $y \in X$, con $y \neq 0$, tenemos o bien $x + y \notin C$ o bien $x - y \notin C$ (o ambos).

Proposición

Sea X compacto y convexo y sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua y lineal. Luego, el conjunto $E \subset X$ de puntos extremos es no vacío y existe $e \in E$ tal que

$$f(e) \geq f(x), \ \forall \, x \in X.$$

El espacio $\mathcal{F}$

Lema

Una función $q \in \mathcal{M}$ es un punto extremo de $\mathcal{M}$ si y solo si $q(\theta) \in \{0,1\}$ para casi todo $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Proposición

El siguiente mecanismo directo maximiza el valor esperado del vendedor entre todos los mecanismos directos compatibles con incentivos y racionalmente individuales. Suponga que $p^* \in \operatorname{argmax}_{p \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]} p(1 - F(p))$. Entonces:

$$q(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta > p^* \\ 0, & \text{si } \theta < p^* \end{cases}$$

y

$$t(\theta) = \begin{cases} p^*, & \text{si } \theta > p^* \\ 0, & \text{si } \theta < p^*. \end{cases}$$

Precios no lineales

Precios no lineales

1. Un monopolista ofrece un bien infinitamente divisible (por ejemplo azúcar) a un potencial comprador.
2. Costos lineales: $C(q) = c \cdot q$ con $c > 0$.
3. Vendedor neutral al riesgo.
4. Utilidad del comprador: $\theta v(q) - t$. Se asume que $v(0) = 0$, $v' > 0$ y $v'' < 0$.
5. $\theta \sim F$ con soporte $\Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ y F tiene densidad f, $f(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \Theta$.
6. $\overline{\theta} v'(0) > c$.

Precios no lineales

Un mecanismo directo (q, t) es compatible según incentivos si y solo si:

1. q es creciente.
2. $\forall\ \theta \in \Theta$

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta v(q(\theta))) - \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx.$$

Además, un mecanismo directo es compatible según incentivos y además individualmente racional si y solo si

$$t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})).$$

De hecho, por argumentos anteriores, es fácil notar que $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} v(q(\underline{\theta}))$. Así,

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx. \tag{2}$$

Precios no lineales

A partir de (2) se deduce que el valor esperado de los beneficios son

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx - cq(\theta) \right] f(\theta)d\theta.$$

Esto se re-escribe

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \theta v(q(\theta))f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dxf(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} cq(\theta)f(\theta)d\theta. \tag{3}$$

Precios no lineales

La segunda integral doble en (3) se re-escribe como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dxf(\theta)d\theta &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))f(\theta)dxd\theta \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{x}^{\overline{\theta}} v(q(x))f(\theta)d\theta dx \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(x)) \int_{x}^{\overline{\theta}} f(\theta)d\theta dx \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(x))(1 - F(x))dx \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(\theta))(1 - F(\theta))d\theta.
\end{aligned}$$

Precios no lineales

De este modo, el beneficio esperado es igual a

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \underbrace{\left[v(q(\theta))\left(\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right)-cq(\theta)\right]}_{\text{excedente o surplus virtual}} f(\theta)d\theta. \tag{4}$$

El vendedor busca maximizar en q la expresión (4). La CPO provee

$$v'(q)\left(\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right)-c=0$$

$$v'(q)\left(\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right)=c.$$

Si $\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\leq 0$, $q(\theta)=0$, no hay solución. Si $\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}>0$, entonces $\underline{\theta}v'(q)\to L<c$ cuando $q\to\infty$ por lo que, si $v'(0)\left(\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right)\leq c$, $q(\theta)=0$. Si $v'(0)\left(\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right)>c$, existe una única solución.

Precios no lineales

1. Supondremos que $\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ es creciente en θ.
2. Se sigue que q es creciente.
3. $\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ creciente en θ se cumple si, por ejemplo, $\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ es decreciente en θ.
4. A esta condición se le denominará <u>F es regular</u>.

Proposición

Suponga que F es regular. Entonces, la maximización del beneficio esperado en q está definido por las siguientes condiciones:

1. Si $v'(0)\left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right) \leq c$, entonces $q(\theta) = 0$.
2. Si no (caso contrario) $v'(q(\theta))\left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right) = c$.

El correspondiente t es

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx.$$

Ejemplo

Consideremos $c = 1$, $v(q) = \sqrt{q}$, $\theta \sim U[0, 1]$. El puesto de regularidad se cumple pues

$$\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = 2\theta - 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} v'(0)\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) &\leq c \\ \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} &\leq 0 \\ 2\theta - 1 &\leq 0 \\ \theta &\leq 0.5. \end{aligned}$$

Ejemplo

Si $\theta > 0.5$,

$$v'(q(\theta))\left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right) = c$$
$$\frac{1}{2\sqrt{q}}(2\theta - 1) = 1$$
$$q = \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Finalmente, si $\theta \leq 0.5$, $t(\theta) = 0$. Caso contrario,

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx \\ &= \theta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) - \int_{0.5}^{\theta}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx \\ &= \theta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{0.5}^{\theta} \\ &= \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Haciendo algunas manipulaciones algebraicas,

$$\theta = \sqrt{q} + \frac{1}{2}$$

$$t(\theta) = \frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q}}{2}.$$

Diseño de mecanismos Bayesianos

Modelo de valores privados

Consideremos el siguiente escenario:

1. $I = \{1, 2, \cdots, N\}$
2. La utilidad del individuo i es $\theta_i - t_i$.
3. El vendedor recibe $\sum_{i \in I} t_i$.
4. θ_i es de información privada y $\theta_i \sim F_i$ con soporte común $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.
5. $0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta}$.
6. $f_i(\theta) > 0$.

Definición

Un mecanismo directo consiste en funciones q y $\{t_i\}_{i\in I}$ donde

$$q : \Theta \to \Delta = \left\{ (q_1, \cdots, q_N) : \ 0 \leq q_i \leq 1, \ \sum_{i=1}^{N} q_i \leq 1 \right\}.$$

$$t_i : \Theta \to \mathbb{R}, \ \forall \ i \in I.$$

1. En un mecanismo directo, a los individuos se les pide reportar su tipo simultáneamente e independientemente.
2. La función $q(\cdot)$ describe una regla mediante la cual el bien es asignado. $q_i(\theta)$ es la probabilidad de que el individuo i se quede con el bien, dado que se reporta θ.
3. $1 - \sum_{i=1}^{N} q_i$ es la probabilidad de que no se venda el objeto.

Proposición

Principio de revelación. Para todo mecanismo Γ y equilibrio Nash-Bayesiano σ de Γ, existe un mecanismo directo Γ' y un equilibrio Nash-Bayesiano $\sigma' \in \Gamma'$ tal que

1. Para cada i y $\theta_i \in \Theta_i$, $\sigma_i'(\theta_i) = \theta_i$.
2. Para cada vector θ, la distribución de los pago que resultan de Γ si los agentes juegan σ es la misma distribución bajo Γ' si se juega σ', al igual que el valor esperado de la transferencia monetaria.

1. Sea θ_{-i} el vector de tipos sin contar al $i-$ésimo.
2. $\Theta_{-i} = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^{N-1}$.
3. F_{-i} es la acumulada de θ_{-i}.
4. $Q_i : \Theta \to [0, 1]$ dada por

$$Q_i(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} q_i(\theta_i, \theta_{-i}) f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i}$$

   es al esperanza condicional de la probabilidad de que el agente i obtenga el bien sujeto a que su tipo es θ_i.
5. Análogamente, la esperanza condicional de la transferencia del agente i es

$$T_i(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} t_i(\theta_i, \theta_{-i}) f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i}.$$

6. La utilidad esperada de i dado θ_i es entonces

$$U_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - T_i(\theta_i).$$

Definición

Un mecanismo directo es compatible según incentivos si decir la verdad es un equilibrio Nash-Bayesiano, esto es, si

$$\theta_i Q_i(\theta_i) - T_i(\theta_i) \geq \theta_i Q_i(\theta_i') - T_i(\theta_i'),\ \forall\ i \in I,\ \ \theta_i, \theta_i' \in \Theta_i.$$

Definición

Un mecanismo directo es individualmente racional si cada agente, condicionado a su tipo, participa. Esto es,

$$U_i(\theta_i) \geq 0,\ \forall\ i \in I,\ \ \theta_i \in \Theta_i.$$

Caracterizando la compatibilidad de incentivos y racionalidad individual

Lema

Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces para cada agente $i \in I$ la función Q_i es creciente.

Proof.

Muy similar a la demostración de la proposición 3. □

Lema

Si un mecanismo directo es compatible según incentivos, entonces para cada agente $i \in I$, la función U_i es creciente. Además es convexa y por ende, diferenciable en casi todo punto. En dichos puntos,

$$U_i'(\theta_i) = Q_i(\theta_i).$$

Caracterizando la compatibilidad de incentivos y racionalidad individual

Lema

Equivalencia de pago. Considere un mecanismo directo compatible según incentivos. Entonces, para todo $i \in I$ y $\theta_i \in \Theta$,

$$U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} Q_i(x)dx.$$

Lema

Equivalencia de retorno. Considere un mecanismo directo compatible según incentivos. Entonces, para todo $i \in I$ y $\theta_i \in \Theta$,

$$T_i(\theta_i) = T_i(\underline{\theta}) + (\theta_i Q_i(\theta_i) - \underline{\theta}_i Q(\underline{\theta}_i)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$$

Caracterizando la compatibilidad de incentivos y racionalidad individual

Proposición

Un mecanismo directo $(q, t_1, \cdots, t_N)$ es compatible según incentivos si y solo si para todo $i \in I$

1. Q_i es creciente.
2. Para todo $\theta_i \in \Theta$

$$T_i(\theta_i) = T_i(\underline{\theta}) + (\theta_i Q_i(\theta_i) - \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$$

Proposición

Un mecanismo directo es compatible según incentivos y además individualmente racional si y solo si para todo $i \in I$

$$T_i(\underline{\theta}_i) \leq \underline{\theta}_i Q_i(\underline{\theta}_i).$$

Maximización del retorno esperado

Maximización del retorno esperado

Lema

Si un mecanismo directo es compatible según incentivos y racional individualmente maximiza el retorno esperado del vendedor, entonces para todo $i \in I$ tenemos

$$T_i(\underline{\theta}) = \underline{\theta} Q_i(\underline{\theta}).$$

Maximización del retorno esperado

Se sigue que:

1. El vendedor debe escoger funciones q tales que Q_i es creciente para todo $i \in I$.
2. Los pagos vienen determinados por la proposición 10.
3. Se sigue del lema 12 que

$$T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$$

4. El retorno esperado que recibe el vendedor por parte de cualquier comprador $i \in I$ es

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} Q_i(\theta_i)\left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}\right) f_i(\theta_i)d\theta_i.$$

5. El retorno esperado total viene dado por

$$\sum_{i\in I}\left[\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} Q_i(\theta_i)\left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}\right) f_i(\theta_i)d\theta_i\right] = \sum_{i\in I}\left[\int_{\Theta} q_i(\theta)\left(\theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}\right) f(\theta)d\theta\right].$$

Maximización del retorno esperado

1. Definamos
$$\psi_i(\theta_i) = \theta_i - \frac{1 - F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}, \ \forall \ i \in I, \ \theta_i \in \Theta.$$

2. La regla de asignación óptima, sin tener en cuenta la monotonicidad es, para todo $i \in I$ y $\theta \in \Theta$
$$q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \psi_i(\theta_0) > 0, \ \wedge \ \psi_i(\theta_i) > \psi_j(\theta_j), \ \forall j \in I - \{i\} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

3. El caso $\psi_i(\theta_i) = \psi_j(\theta_j)$ para algún $j \neq i$ no se toma en cuenta pues es un evento con probabilidad cero.

4. Para todo $i \in I$, la función $\psi_i(\theta_i)$ es estrictamente creciente.

Maximización del retorno esperado

En Myerson, R. (1981), *Optimal Auction Design*, *Mathematics of Operations Research* se establece el siguiente resultado.

Proposición

(Myerson, 1981). Suponga que para cada agente $i \in I$ la función de distribución F_i es regular. Entre todos los mecanismo directos que son compatibles según incentivos y racionales individualmente, aquellos que maximizan el valor esperado del beneficio del vendedor satisfacen para todo $i \in I$ y para todo $\theta \in \Theta$ las siguientes dos condiciones:

1. $$q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \psi_i(\theta_i) > 0, \wedge\ \psi_i(\theta_i) > \psi_j(\theta_j),\ \forall\ j \in I - \{i\} \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$
2. $T_i(\theta_i) = \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$

Maximización del bienestar

1. Supongamos ahora que el vendedor no busca maximizar el beneficio esperado pero si no el bienestar esperado.
2. La función de bienestar considerada es

$$\sum_{i \in I} q_i(\theta)\theta_i.$$

3. Se busca q tal que Q_i sea creciente.
4. $T_i(\underline{\theta}_i) \leq \underline{\theta}_i Q_i(\underline{\theta}_i)$.

Proposición

Dentro de todo los mecanismos directos que son compatibles según incentivos e individualmente racionales, son maximizadores del bienestar esperado si y solamente si para todo $i \in I$ y $\theta \in \Theta$ se cumple que

1. $q_i(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_i > \theta_j, \ \forall\, j \in I - \{i\} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$
2. $T_i(\theta_i) \leq \theta_i Q_i(\theta_i) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta_i} Q_i(x)dx.$

Ejemplo

Supongamos que $N = 2$, $\underline{\theta} = 0$, $\overline{\theta}_1 = 1$, $F_1(\theta_1) = \theta_1^2$ y $F_2(\theta_2) = 2\theta_2 - \theta_2^2$. Luego,

$$\psi_1(\theta_1) = \frac{3}{2}\theta_1 - \frac{1}{2\theta_1}$$
$$\psi_2(\theta_2) = \frac{3}{2}\theta_2 - \frac{1}{2}.$$

Luego,

$$\psi_1(\theta_1) < 0 \Leftrightarrow \theta_1 < \sqrt{1/3}$$
$$\psi_2(\theta_2) < 0 \Leftrightarrow \theta_2 < 1/3.$$

Finalmente, el bien se vende a 1 si

$$\psi_1(\theta_1) > \psi_2(\theta_2) \Leftrightarrow \theta_1 - \frac{1}{3\theta_1} + \frac{1}{3} > \theta_2.$$

Bienes públicos

1. La teoría de diseño de mecanismos Bayesianos inicia con la provisión de bienes públicos.
2. Considere una comunidad con N agentes, $I = \{1, \cdots, N\}$, donde $N \geq 2$.
3. Considere un bien público no excludible $g \in \{0, 1\}$.
4. Cada agente puede pagar $t_i \geq 0$.
5. La utilidad que percibe cada comprador es $\theta_i g - t_i$.
6. $\theta_i \sim F_i$ con soporte $\Theta_i = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ y densidad f_i tal que $f_i(\theta_i) > 0$ para todo $\theta_i \in \Theta$.
7. Los θ_i son iid y denotamos por θ al vector aleatorio $(\theta_1, \cdots, \theta_N)$ con soporte $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]^N$.
8. l costo de producir el bien público es $c > 0$.
9. La función de bienestar social es $\left(\sum_{i \in I} \theta_i\right) g - \sum_{i \in I} t_i$.

Compatibilidad de incentivos e individualidad racional

1. Un mecanismo directo en este contexto es una familia de funciones $q : \Theta \to \{0, 1\}$, $t_i : \Theta \to \mathbb{R}$ para todo $i \in I$.
2. Como antes, $Q_i : \Theta_i \to [0, 1]$ y $T_i : \Theta_i \to \mathbb{R}$.
3. $U_i(\theta_i) = Q_i(\theta_i)\theta_i - T_i(\theta_i)$.
4. Diremos que un mecanismo directo es ex-post presupuesto balanceado si para todo $\theta \in \Theta_i^N$,
$$\sum_{i \in I} t_i(\theta) \geq cq(\theta).$$
5. Diremos que un mecanismo directo es ex-ante presupuesto balanceado si
$$\int_\Theta \sum_{i \in I} t_i(\theta) f(\theta) d\theta \geq \int_\Theta cq(\theta) f(\theta) d\theta.$$

Definición

Dos mecanismos directos son equivalentes si tienen la misma regla de decisión y para todo $i \in I$, $\theta_i, \theta_i' \in \Theta_i$, las transferencias condicionales al reporte de θ_i (θ_i') son las mismas en los dos mecanismos.

Proposición

Para todo mecanismo directo que es ex-ante presupuesto balanceado, existe un mecanismo directo ex-post presupuesto balanceado equivalente.

Proof.

Véase [Börgers, 2015]. □

Maximización del bienestar

1. Para cada mecanismo $(q, t_1, \cdots, t_N)$, la regla de asignación óptima es

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i \in I} \theta_i \geq c \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. La regla de transferencias es

$$\sum_{i \in I} t_i^*(\theta) = \begin{cases} c, & \text{si } \ q^*(\theta) = 1 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Proposición

Un mecanismo compatible según incentivos e individualmente racional si y solo si $N\underline{\theta} \geq c$ o $N\overline{\theta} \leq c$.

Definición

Un mecanismo pivot es un mecanismo que viene dado por la regla de decisión q^* y por el siguiente esquema de transferencias

$$t_i(\theta) = \underline{\theta} q^*(\underline{\theta}, \theta_{-i}) + (q^*(\theta) - q^*(\underline{\theta}, \theta_{-i})) \left(c - \sum_{j \neq i} \theta_j \right)$$

para todo $i \in I$ y $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^N$.

Lema

El mecanismo pivote es compatible según incentivos y racional individualmente.

Lema

Si $N\underline{\theta} < c < N\overline{\theta}$, el ex-ante presupuesto esperado del mecanismo pivote es negativo.

Mecanismo Vickrey-Clarke-Groves

1. El mecanismo pivote es un caso particular es un mecanismo Vickrey-Clarke-Groves.
2. En general un mecanismo es un mecanismo VCG si la regla de decisión es q^* y si el pago a cada agente consiste en dos términos: uno que depende únicamente de lo reportado por el agente, y otro que no depende de lo reportado por el agente.
3. El segundo término en el pago del mecanismo VCG puede ser arbitrario.

1. El que diseña el mecanismo puede tener como función objetivo el esperado de la ganancia neta agregada de cada agente. Esto es,

$$\int_\Theta q(\theta)\left(\sum_{i\in I}\theta_i - c\right) f(\theta)d\theta.$$

2. Según lo discutido,
   - Q_i debe ser creciente (restricción de incentivo).
   - $U_i(\underline{\theta}) \geq 0$ (restricción de racionalidad individual)
   - Restricción de presupuesto:

$$-\sum_{i\in I} U_i(\underline{\theta}) + \int_\Theta q(\theta)\left[\sum_{i\in I}\left(\theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)} - c\right)\right] f(\theta)d\theta = 0.$$

Formulación de KKT

El Lagrangiano del problema es, para $\lambda \geq 0$ multiplicador de Lagrange

$$\int_\Theta q(\theta)\left(\sum_{i\in I}\theta_i - c\right) f(\theta)d\theta + \lambda \int_\Theta q(\theta)\left[\sum_{i\in I}\left(\theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}\right) - c\right] f(\theta)d\theta.$$

Además, $\lambda = 0$ solo si

$$\int_\Theta q(\theta)\left[\sum_{i\in I}\left(\theta_i - \frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}\right) - c\right] f(\theta)d\theta > 0.$$

Observación

Dado que se maximiza sobre $q \in X$ con X convexo, y la función objetivo es lineal (en particular cóncava) se tiene condiciones de segundo orden.

Concluimos esta parte con los siguientes elementos:

1. El Lagrangiano puede escribirse

$$\int_{\Theta} q(\theta)(1+\lambda)\left[\sum_{i\in I}\left(\theta_i - \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}\right)\right] f(\theta)d\theta.$$

2. Se tiene que

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i\in I}\theta_i > c + \sum_{i\in I}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1-F_i(\theta_i)}{f_i(\theta_i)}\right) \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Subastas

Introducción: Subastas y Supuestos Básicos

- Consideramos $n > 1$ compradores potenciales con valoraciones V_i para un bien indivisible.
- El vector de valoraciones $V = (V_1, \ldots, V_n)$ sigue una función de distribución acumulada conjunta:

$$\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n) = \mathbb{P}\{V_1 \leq v_1, \ldots, V_n \leq v_n\}.$$

- Supuestos clave:
  - Las valoraciones V_i son independientes e idénticamente distribuidas (iid).
  - Los compradores conocen sus propias valoraciones, pero no las de otros.
  - Los compradores y el vendedor son neutrales al riesgo.
- Tipos de subastas comunes: inglés (ascendente), holandés (descendente), primer precio y segundo precio.

Principio de Revelación: Fundamentos

- El Principio de Revelación establece que cualquier mecanismo puede rediseñarse para que sea óptimo para los participantes revelar sus valoraciones verdaderas.
- En una subasta de segundo precio (inglés), la estrategia dominante es:

$$b^*(v) = v.$$

- En una subasta de primer precio (holandés), la estrategia de equilibrio es:

$$b^*(v) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v.$$

- Este principio garantiza eficiencia en la asignación y maximización de ingresos esperados bajo ciertos supuestos.

Subastas de Primer Precio: Estrategia de Equilibrio

- El beneficio esperado de un postor con valoración v que realiza una oferta b es:

$$U(b, v) = \rho(b)(v - b),$$

donde la probabilidad de ganar es:

$$\rho(b) = \mathbb{P}\{b > b^*(V_{(n-1)})\}.$$

- Resolviendo el problema de maximización:

$$\max_{b \geq 0} \rho(b)(v - b),$$

obtenemos la ecuación diferencial para $\sigma(b)$, la valoración que corresponde a la oferta b:

$$(n-1)f(\sigma(b))(\sigma(b) - b)\sigma'(b) - F(\sigma(b)) = 0.$$

Solución: Subasta de Primer Precio

- Suponiendo una distribución uniforme $F(x) = x$, la ecuación diferencial para $\sigma(b)$ es:

$$\sigma'(b) = \frac{\sigma(b)}{(\sigma(b) - b)(n-1)}.$$

- Con la condición inicial $\sigma(0) = 0$, se obtiene:

$$\sigma(b) = \frac{n}{n-1} b.$$

- Finalmente, la estrategia de equilibrio es:

$$b^*(v) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v.$$

- Las ofertas son estrictamente crecientes y subestimadas en comparación con las valoraciones.

Margen de Ingreso: Definición y Uso

- El margen de ingreso, $\gamma(v)$, refleja la contribución marginal de cada valoración al ingreso esperado:
$$\gamma(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}.$$
- Este concepto es clave en el diseño de subastas óptimas.
- El ingreso esperado del subastador está dado por:
$$\Pi(n, v_0) = \int_{v_0}^{\overline{v}} \gamma(v) \frac{d}{dv} F(v)^n dv.$$
- Para distribuciones uniformes $F(x) = x$, $\gamma(v)$ toma una forma analítica simple.

Dominancia Estocástica: Definición

- Una distribución $F_D(x)$ domina en segundo orden a $F_E(x)$ ($F_D \geq_{\text{SOSD}} F_E$) si:

$$\int_0^a F_D(t)dt \leq \int_0^a F_E(t)dt, \quad \forall a \in [0,1].$$

- Equivalentemente, existe un par de variables aleatorias X y ε tal que:

$$X_E = X_D + \varepsilon, \quad \mathbb{E}[\varepsilon | X_D] \leq 0.$$

- Aplicado a subastas, esto permite comparar pagos en términos de riesgo y beneficio esperado.

Dominancia Estocástica: Demostración

- Consideremos P_D y P_E como pagos en subastas de primer y segundo precio respectivamente.
- Condicional en $P_D = p$, el pago en la subasta de segundo precio satisface:

$$\mathbb{E}[P_E | P_D = p] = p.$$

- Esto implica que existe una variable aleatoria Z tal que:

$$P_E = P_D + Z, \quad \mathbb{E}[Z | P_D = p] = 0.$$

- Por definición, $P_D \geq_{\text{SOSD}} P_E$, ya que los pagos de primer precio tienen mayor riesgo relativo.

Subastas de Segundo Precio

- En una subasta de segundo precio, la estrategia dominante es:

$$b^*(v) = v.$$

- El postor ganador paga la segunda valoración más alta:

$$\overline{P}_E = \mathbb{E}[V_{(n-1)}].$$

- Para distribuciones uniformes $F(x) = x$, la expectativa del segundo máximo es:

$$\mathbb{E}[V_{(n-1)}] = \frac{n-1}{n+1}.$$

Subastas All-Pay: Resultados Clave

- En subastas "all-pay", todos los participantes pagan su oferta independientemente del resultado.
- Estrategia de equilibrio:
$$b^*(v) = \frac{n-1}{n} v^n.$$
- Ingreso esperado de cada postor:
$$\mathbb{E}[b^*(V)] = \frac{n-1}{n(n+1)}.$$
- Las subastas "all-pay" presentan mayores riesgos debido al pago obligatorio para todos.

Cuotas de Participación en Subastas

- Las cuotas de participación pueden ser usadas para maximizar ingresos.
- El valor crítico de entrada es:

$$v_0 = \sqrt{c}, \quad \text{donde } c \text{ es la cuota.}$$

- La cuota óptima que maximiza ingresos es:

$$c^* = \frac{1}{4}, \quad \text{ingreso máximo: } \frac{5}{12}.$$

- Los postores con valoraciones por debajo de v_0 no participan, reduciendo competencia.

Subastas de Primer Precio: Procedimiento Alternativo

Proposición

Las subastas de primer precio y holandesas tienen una estrategia de equilibrio simétrica única:

$$b^*(v) = \mathbb{E}[V_{(n-1)} | V_{(n-1)} < v] < v.$$

Demostración: Simetría en el Equilibrio

- Suponemos que $b^*(v)$ es estrictamente creciente y continua.
- Beneficio esperado de un postor con valoración v que ofrece $b^*(x)$:

$$U(x, v) = \rho(x)(v - b^*(x)),$$

donde

$$\rho(x) = \mathbb{P}\{b^*(V_{(n-1)}) < b^*(x)\} = F(x)^{n-1}.$$

- En equilibrio, $b^*(v)$ debe maximizar el beneficio:

$$v \in \operatorname{argmax}_x U(x, v).$$

Condición de Primer Orden para el Equilibrio

- Derivando respecto a x e igualando a cero:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} U(x, v)\Big|_{x=v} = \rho'(v)(v - b^*(v)) - \rho(v) b^{*'}(v).$$

- Rearreglando:

$$v d\rho = d(\rho b) \implies b\rho = \int_0^v x d\rho.$$

- Con $\rho(v) = F(v)^{n-1}$, integramos por partes:

$$b^*(v) = v - \int_0^v \left(\frac{F(x)}{F(v)} \right)^{n-1} dx.$$

Detalles de la derivación:

$$\begin{aligned}
b^*(v) &= \frac{1}{\rho(v)} \int_0^v x d\rho \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}\{V_{(n-1)} < v\}} \int_0^v x dF(x)^{n-1} \\
&= \frac{1}{F(v)^{n-1}} \left[\int_0^v x dF(x)^{n-1} \right] \\
&= \frac{1}{F(v)^{n-1}} \left[xF(x)^{n-1}|_0^v - \int_0^v F(x)^{n-1} dx \right] \\
&= v - \int_0^v \left(\frac{F(x)}{F(v)} \right)^{n-1} dx < v.
\end{aligned}$$

Monotonicidad de la Función de Oferta de Equilibrio

Lemma

La función de oferta de equilibrio $b^*(v)$ es estrictamente creciente.

Proof.

El beneficio esperado de un postor con valoración v que ofrece b es:

$$U(b, v) = \rho(b)v - \mathcal{E}(b),$$

donde $b = b^*(v)$ debe ser la mejor respuesta. Entonces:

$$U^*(v) = U(b^*(v), v) = \rho(b^*(v))v - \mathcal{E}(b^*(v)).$$

Por el Teorema del Sobre:

$$\frac{dU^*(v)}{dv} = \frac{\partial}{\partial v} U(b^*(v), v) = \rho(b^*(v)).$$

Dado que $U^*(v)$ es convexa, dU^*/dv es creciente en v. Como $\rho(\cdot)$ es creciente en b, $b^*(\cdot)$ es estrictamente creciente en v. □

Convexidad del Beneficio Esperado

Observación

Es necesario demostrar que $U^*(v)$ es estrictamente convexa.

Proof.

Sean $v_1 \neq v_2$ y $\hat{v} = \theta v_1 + (1-\theta)v_2$ para $\theta \in (0,1)$. Entonces:

$$\rho(\hat{v})v_i - \mathcal{E}^*(\hat{v}) < \rho(v_i)v_i - \mathcal{E}^*(v_i), \quad i = 1, 2.$$

Multiplicando por θ para $i = 1$ y por $1-\theta$ para $i = 2$, y sumando, se concluye la estricta convexidad de $U^*(v)$. $\square$

Probabilidad de Ganar en Equilibrio

Lemma

El postor con la mayor valoración gana la subasta si su valoración es mayor a v_0. La probabilidad de ganar en equilibrio es:

$$\rho^*(v) = \rho^*(b^*(v)) = \mathbb{P}\{V_j \leq v\} = F(v)^{n-1}.$$

Proof.

En equilibrio, $b^*(v)$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, el postor con la valoración más alta gana la subasta si $v \geq v_0$. La probabilidad de ganar está dada por $F(v)^{n-1}$, que corresponde a la probabilidad de que las valoraciones de todos los demás postores sean menores o iguales a v. □

Ingresos en Subastas Simétricas

Proposición

Todas las subastas que seleccionan al postor con la mayor oferta como ganador, bajo un equilibrio simétrico, generan los mismos ingresos esperados.

Proof.

El beneficio esperado del ganador es:

$$U^*(v) = \int_{v_0}^{v} \rho(b^*(x))dx = \int_{v_0}^{v} F(x)^{n-1}dx.$$

El pago esperado del postor con valoración v es:

$$\mathcal{E}(b^*(v)) = \rho(b^*(v))v - U^*(v) = vF(v)^{n-1} - \int_{v_0}^{v} F(x)^{n-1}dx.$$

La contribución total de cada postor al ingreso del vendedor es independiente del formato de la subasta, dado que el equilibrio es simétrico. $\square$

Cálculo de los Ingresos Esperados

- Ingreso total del subastador:

$$\Pi(n, v_0) = \int_{v_0}^{\overline{v}} \left(v - \frac{1 - F(v)}{f(v)} \right) \frac{d}{dv} F(v)^n dv.$$

- Usando integración por partes:

$$\int_{v_0}^{\overline{v}} \left(\int_{v_0}^{v} F(x)^{n-1} dx \right) \frac{d}{dv} F(v) dv = \int_{v_0}^{\overline{v}} F(v)^{n-1} dv - \int_{v_0}^{\overline{v}} F(v)^n dv.$$

- Resultado final:

$$\Pi(n, v_0) = \int_{v_0}^{\overline{v}} \left(v - \frac{1 - F(v)}{f(v)} \right) \frac{d}{dv} F(v)^n dv.$$

Nivel Marginal de Ingreso

Observación

El término:

$$\gamma(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}$$

es conocido como **margen de ingreso**. Se relaciona directamente con los ingresos esperados:

$$\Pi(n, v_0) = \mathbb{E}_{V_{(n)} \geq v_0}[\gamma(V_{(n)})].$$

Funciones de Oferta en Subastas Estándar

Proposición

Las funciones de oferta de equilibrio en subastas estándares son:

$$b^*(v) = v - \int_{v_0}^{v} \left(\frac{F(x)}{F(v)} \right)^{n-1} dx, \quad \text{Subasta Holandesa,}$$

$$b^*(v) = v, \quad \text{Subasta Inglesa.}$$

Proof.

Para la subasta holandesa, el pago esperado del ganador es:

$$\mathcal{E}^*(v) = \rho^*(v) b^*(v).$$

Sabiendo que $\rho^*(v) = F(v)^{n-1}$, la solución es directa. Para la subasta inglesa, la estrategia de decir la verdad $b^*(v) = v$ es débilmente dominante. $\square$

Conclusión: Principio de Revelación y Eficiencia

- El Principio de Revelación permite el diseño de mecanismos eficientes donde la verdad es la mejor estrategia.
- Las subastas estándar (primer precio, segundo precio, inglés, holandés) maximizan ingresos bajo los supuestos SIPV.
- Herramientas clave:
  - Dominancia estocástica para comparar ingresos y riesgos.
  - Margen de ingreso para analizar la contribución marginal de cada postor.
- Las extensiones incluyen análisis de riesgo, mecanismos óptimos y variaciones en los supuestos.

Anexo

Definición de Log-Cóncavidad

Definition

Una función no negativa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es log-cóncava si su dominio es un conjunto convexo y satisface:

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \geq f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta}, \quad \forall x, y \in D_f,\ \theta \in (0,1).$$

- Una función log-cóncava es siempre cuasi-cóncava.
- Toda función cóncava positiva es log-cóncava, pero no toda log-cóncava es cóncava.
- Ejemplo: $f(x) = e^{-x^2/2}$ es log-cóncava, pero no cóncava.

Condición de Segunda Derivada para Log-Cóncavidad

- Una función $f(x)$ no negativa, dos veces diferenciable, es log-cóncava si:

$$f(x)\nabla^2 f(x) \preceq \nabla f(x)\nabla f(x)^T, \quad \text{para } f(x) > 0.$$

- Equivalentemente:

$$f(x)\nabla^2 f(x) - \nabla f(x)\nabla f(x)^T$$

  es semidefinida negativa.

- Esta condición asegura que la log-cóncavidad puede verificarse usando las derivadas de $f(x)$.

Propiedades de las Funciones Log-Cóncavas

- Las convoluciones y marginales preservan la log-cóncavidad.
- El producto de funciones log-cóncavas positivas es log-cóncavo.
- Las funciones log-cóncavas son unimodales, es decir, tienen un único modo.
- Muchas densidades de distribuciones son log-cóncavas:
  - Normal.
  - Exponencial.
  - Logística.
  - Valor extremo, Laplace.
  - χ^2, Wishart, β, Weibull, Γ, Dirichlet.

Ejemplos de Log-Cóncavidad en Distribuciones

- Distribución Normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \log f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{\log(2\pi)}{2}.$$

  La log-cóncavidad se verifica porque $-x^2/2$ es una función cóncava.

- Distribución Exponencial:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \log f(x) = -\lambda x + \log \lambda.$$

- Producto de distribuciones: el producto de densidades log-cóncavas es log-cóncavo.

Aplicaciones de la Log-Cóncavidad en Subastas

- La log-cóncavidad en las funciones de densidad simplifica los cálculos de estrategias de equilibrio en subastas.
- En subastas de primer precio, la log-cóncavidad asegura que:

$$\gamma(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}$$

  es decreciente, lo que simplifica la maximización de ingresos.
- Muchas distribuciones utilizadas en aplicaciones económicas (como normal y exponencial) son log-cóncavas, asegurando soluciones estables y únicas.

Gracias

(2020).
Mechanism design and the revelation principle.
Consulted: 2024.

Bergson, A. (1938).
A reformulation of certain aspects of welfare economics.
Quarterly Journal of Economics, 52(2):310–334.

Börgers, T. (2015).
An Introduction to the Theory of Mechanism Design.
Oxford University Press.

Gibbons, R. (1992).
Game Theory for Applied Economists.
Princeton University Press, Princeton, NJ.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995).
Microeconomic Theory.
Oxford University Press.

Menezes, F. and Monteiro, P. (2005).
An Introduction to Auction Theory.
Oxford University Press.

Samuelson, P. A. (1947).

Foundations of economic analysis: Chapter on social welfare functions.
Harvard University Press, pages 219–247.