Equilibrio General con Incertidumbre

Marcelo Gallardo

PUCP

Diciembre 2024

1. En el modelo de equilibrio general básico teníamos $1, \cdots, I$ consumidores que intercambiaban $1, \cdots, L$ bienes. Cada agente tenía una relación de preferencias $\succeq_i$ sobre el espacio de consumo $X_i = \mathbb{R}^L_+$ y se asumía que $\succeq_i$ venía representada por una función de utilidad u_i.
2. Ahora introduciremos incertidumbre.
3. Tanto las dotaciones, preferencias y consumos (en el caso de economías con producción, agregamos las tecnologías) son inciertos, es decir, dependerán del estado de la naturaleza.
4. Consideramos un número finito de estados de la naturaleza $1, \cdots, S$.
5. Usaremos los siguientes índices: ℓ para los bienes, i para los consumidores y s para los estados de la naturaleza.
6. Referencias: la noción de equilibrio competitivo bajo incertidumbre, formalizada en el artículo seminal de Roy Radner *Competitive Equilibrium Under Uncertainty*, publicado en *Econometrica* en 1968, se complementa con el análisis macroeconómico dinámico presentado en el capítulo 8 de *Recursive Macroeconomic Theory* de Lars Ljungqvist y Thomas J. Sargent (2010), y se explora desde las bases en el capítulo 19 de *Microeconomic Theory* de Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

Bienes contingentes

Bienes contingentes

1. Un vector de bienes contingentes, en un contexto con S estados de la naturaleza y L bienes físicos, es:

$$\underbrace{(x_1(1), ..., x_L(1))}_{x(1)}, ..., \underbrace{(x_1(s), ..., x_n(s))}_{x(s)}, ..., \underbrace{(x_1(S), ..., x_L(S))}_{x(S)} \in \mathbb{R}^{LS}.$$

2. El vector de precios contingentes asociados viene dado por

$$\underbrace{(p_1(1), ..., p_L(1))}_{p(1)}, ..., \underbrace{(p_1(s), ..., p_L(s))}_{p(s)}, ..., \underbrace{(p_1(S), ..., p_L(S))}_{p(S)}.$$

3. Entonces, si ocurre el estado s, el vector de precios será $p(s)$ y el consumo $x(s)$.

1. Un vector de bienes contingentes $(x_1(s), \cdots, x_L(s))$ puede verse como una realización de una colección de variables aleatorias, donde $x_\ell : S \to \mathbb{R}$.
2. De manera similar, definimos para cada consumidor $i = 1, \cdots, I$ sus dotaciones contingentes

$$\omega^i = \underbrace{(\omega_1(1), ..., \omega_L(1))}_{\omega^i(1)}, ..., \underbrace{(\omega_1(s), ..., \omega_L(s))}_{\omega^i(s)}, ..., \underbrace{(\omega_1(S), ..., \omega_L(S))}_{\omega^i(S)}.$$

3. Las preferencias también pueden depender del estado de la naturaleza.
4. Cada individuo tiene creencias sobre los estados de la naturaleza. Estas vienen resumidas por un vector de probabilidades

$$\pi^i = (\pi(1)^i, \cdots, \pi(s)^i, \cdots, \pi(S)^i) \in \Delta(S).$$

5. $\pi^i(s)$ representa la probabilidad que cree el individuo i de que ocurra el estado s.
6. Luego, las funciones de utilidad Bernouilli de los agentes son (note que pueden depender del estado y del individuo en cuestión)

$$u_{si}(x_1^i(s), \cdots, x_L^i(s)).$$

Utilidad esperada

Dados dos vectores de bienes contingentes $x_i, \tilde{x}_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{LS}$, se tiene la siguiente relación de preferencias

$$x_i \succeq_i \tilde{x}_i \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{S} \pi^i(s) u_s^i(x_i(s)) \geq \sum_{s=1}^{S} \pi^i(s) u_s^i(\tilde{x}_i(s)).$$

Denotaremos

$$U^i(x_i) = \sum_{s=1}^{S} \pi^i(s) u_s^i(x_i(s)).$$

De este modo,

$$x_i \succeq_i \tilde{x}_i \Leftrightarrow U^i(x_i) \geq U^i(\tilde{x}_i).$$

Equilibrio de Arrow-Debreu

1. Postulamos ahora la existencia de un mercado para cada bien contingente indexado por ℓs. Estos mercados abren antes de la resolución de la incertidumbre, podríamos decir que en la fecha $t = 0$. El precio del bien se denota como $p_{\ell s}$. Lo que se compra o vende en el mercado del bien contingente ℓs son compromisos para recibir o entregar cantidades del bien físico ℓ, si y solo si ocurre el estado del mundo s.
2. Es importante notar que, aunque los bienes son contingentes, los pagos no lo son. También es obligatorio que todos los agentes sean capaces de reconocer la ocurrencia del estado s.
3. El modelo descrito hasta ahora no es más que un caso particular (con un gran número de bienes) de las economías estudiadas en la teoría clásica del equilibrio general.
4. En este modelo, nos referimos al equilibrio competitivo como equilibrio de Arrow-Debreu, en vez de equilibrio Walrasiano.

Equilibrio de Arrow-Debreu

Definition

Una asignación

$$(x_1^*, \cdots, x_I^*) \in \prod_{i=1}^{I} X_i \subset \mathbb{R}^{LSI}$$

y un sistema de precios para los bienes contingentes $p = (p_1(1), \cdots, p_L(1), \cdots, p_L(S)) \in \mathbb{R}^{LS}$ constituyen un equilibrio de Arrow-Debreu si

1. Para cada i, x_i^* es un elemento máximo para $\succeq_i$ en el conjunto presupuestario

$$\{x_i \in X_i : \ p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\} . \tag{1}$$

2. $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} \omega_i \in \mathbb{R}^{LS}$.

Con producción

Definition

Una asignación

$$(x_1^*, \cdots, x_I^*, \cdots, y_1^*, \cdots, y_J^*) \in \prod_{i=1}^{I} X_i \times \prod_{j=1}^{J} Y_j \subset \mathbb{R}^{LS(I+J)}$$

y un sistema de precios para los bienes contingentes $p = (p_1(1), \cdots, p_L(1), \cdots, p_L(S)) \in \mathbb{R}^{LS}$ constituyen un equilibrio de Arrow-Debreu si

1. Para cada j, y_j^* satisface $p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j$, [a] $\forall\ y_j \in Y_j$.
2. Para cada i, x_i^* es un elemento máximo para $\succeq_i$ en el conjunto presupuestario

$$\left\{ x_i \in X_i :\ p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p \cdot y_j^* \right\}. \tag{2}$$

3. $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} y_j^* + \sum_{i=1}^{I} \omega_i \in \mathbb{R}^{LS}$.

[a] Los vectores de producción también dependen de los estados de la naturaleza.

Ejemplo

Una economía consiste en dos agentes (1 y 2), dos bienes (x_1, x_2) y dos estados de la naturaleza (1, 2). Ambos consumidores comparten las mismas creencias respecto a las probabilidades de cada estado, dadas por $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Las funciones de utilidad de ambos consumidores son $u_i(x_1^i, x_2^i) = \ln(x_1^i) + \ln(x_2^i)$. Las dotaciones son:

	Estado 1	Estado 2
Consumidor 1	(2, 2)	(0, 0)
Consumidor 2	(0, 0)	(2, 2)

Consumidor 1:

$$\max_{x_1^1(1),x_2^1(1),x_1^1(2),x_2^1(2)} \frac{1}{2}\left[\ln(x_1^1(1)) + \ln(x_2^1(1))\right] + \frac{1}{2}\left[\ln(x_1^1(2)) + \ln(x_2^1(2))\right]$$

$$\text{s. a } p \cdot (x_1^1(1), x_2^1(1), x_1^1(2), x_2^1(2)) \leq p \cdot \underbrace{(2,2,0,0)}_{\omega^1}.$$

Consumidor 2:

$$\max_{x_1^2(1),x_2^2(1),x_1^2(2),x_2^2(2)} \frac{1}{2}\left[\ln(x_1^2(1)) + \ln(x_2^2(1))\right] + \frac{1}{2}\left[\ln(x_1^2(2)) + \ln(x_2^2(2))\right]$$

$$\text{s. a } p \cdot (x_1^2(1), x_2^2(1), x_1^2(2), x_2^2(2)) \leq p \cdot \underbrace{(0,0,2,2)}_{\omega^2}.$$

El vector de precios es $p = (p_1(1), p_2(1), p_1(2), p_2(2))$. Denotemos $\omega_1 = p \cdot \omega^1$ y $\omega_2 = p \cdot \omega^2$. Las CPO proveen (al igual que la estructura Cobb-Douglas)

$$
\begin{aligned}
x_1^1(s) &= \frac{\omega_1}{4p_1(s)} \\
x_2^1(s) &= \frac{\omega_1}{4p_2(s)} \\
x_1^2(s) &= \frac{\omega_2}{4p_1(s)} \\
x_2^2(s) &= \frac{\omega_2}{4p_2(s)}.
\end{aligned}
$$

La condición de limpieza del mercado es

$$
\begin{aligned}
x_1^1(s) + x_1^2(s) &= 2, \ \ s = 1, 2 \\
x_2^1(s) + x_2^2(s) &= 2, \ \ s = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, obtenemos el sistema

$$\frac{\omega_1}{4p_1(1)} + \frac{\omega_2}{4p_1(1)} = 2 \implies \omega_1 + \omega_2 = 8p_1(1),$$
$$\frac{\omega_1}{4p_2(1)} + \frac{\omega_2}{4p_2(1)} = 2 \implies \omega_1 + \omega_2 = 8p_2(1),$$
$$\frac{\omega_1}{4p_1(2)} + \frac{\omega_2}{4p_2(2)} = 2 \implies \omega_1 + \omega_2 = 8p_2(2).$$

Resolviendo el sistema, encontramos que $p_1(1) = p_2(1) = p_1(2) = p_2(2) = 1$, $\omega_1 = 4$ y $\omega_2 = 4$. Por lo tanto,

$$(x_1^1(1), x_2^1(1), x_1^1(2), x_2^1(2)) = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4,$$
$$(x_1^2(1), x_2^2(1), x_1^2(2), x_2^2(2)) = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4.$$

Ejemplo: Cobb-Douglas general con un individuo

Supongamos que tenemos solo un individuo y sus preferencias cambian en función de estado de la naturaleza

$$u(x_1(1), x_2(1)) = x_1(1)^{\alpha} x_2(1)^{1-\alpha}$$
$$u(x_1(2), x_2(2)) = x_1(2)^{\beta} x_2(2)^{1-\beta}$$

con $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

1. La utilidad esperada del individuo 1, asumiendo probabilidades objetivas, es

$$\pi_1 x_1(1)^{\alpha} x_2(1)^{1-\alpha} + \pi_2 x_1(2)^{\beta} x_2(2)^{1-\beta}$$

2. Lagrangiano el problema es

$$\begin{aligned} L(x_1(1), x_2(1), x_1(2), x_2(2)) &= \pi_1 x_1(1)^{\alpha} x_2(1)^{1-\alpha} + \pi_2 x_1(2)^{\beta} x_2(2)^{1-\beta} \\ &+ \lambda[p_1(1)\omega_1(1) + p_2(1)\omega_2(1) + p_1(2)\omega_1(2) + p_2(2)\omega_2(2)] \\ &- \lambda[p_1(1)x_1(1) + p_2(1)x_2(1) + p_1(2)x_1(2) + p_2(2)x_2(2)]. \end{aligned}$$

Las CPO son

$$\begin{aligned}
\pi_1 \alpha x_1(1)^{\alpha-1} x_2(1)^{1-\alpha} - \lambda p_1(1) &= 0 \\
\pi_1(1-\alpha) x_1(1)^{\alpha} x_2(1)^{-\alpha} - \lambda p_2(1) &= 0 \\
\pi_2 \beta x_1(2)^{\beta-1} x_2(2)^{1-\beta} - \lambda p_1(2) &= 0 \\
\pi_1(1-\beta) x_1(2)^{\beta} x_2(2)^{-\beta} - \lambda p_2(2) &= 0.
\end{aligned}$$

Para resolver el equilibrio general, resolvemos estas ecuaciones. Se debe limpiar el mercado. Si se tuvieran más consumidores, el procedimiento es análogo.

Enfoque secuencial

Introducimos un modelo de comercio secuencial y establecemos que el equilibrio de Arrow-Debreu puede reinterpretarse como procesos de comercio que se desarrollan a lo largo del tiempo.

- Consideramos únicamente economías de intercambio puro, $X_i = \mathbb{R}^{LS}_{+}$.
- Hay dos periodos, $t = 0$ y $t = 1$. No hay consumo en $t = 0$.
- Hay LS bienes contingentes que se fijan en $t = 0$.
- Una asignación $(x_1^*, \ldots, x_I^*) \in \mathbb{R}^{LSI}$ con precios $(p_{11}, \ldots, p_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS}$ constituye un equilibrio de Arrow-Debreu.
- Los mercados operan para la entrega de bienes en $t = 1$.

1. En $t = 1$, se revela el estado s del mundo y los contratos se ejecutan.
2. Cada consumidor recibe:
$$x_i^*(s) = (x_{1i}^*(s), \ldots, x_{Li}^*(s)) \in \mathbb{R}^n.$$
3. Supongamos que después de $t = 1$, pero antes del consumo, se abren mercados para los bienes físicos n.
4. ¿Habría incentivos para comerciar en estos mercados? Respuesta: **no**.
5. ¿Por qué? Violaría la optimalidad de Pareto (primer teorema del bienestar).

- En $t = 0$, los consumidores pueden comerciar directamente para alcanzar una asignación de Pareto general.
- Ex ante Pareto implica ex post Pareto.
- Si no están disponibles todos los mercados de bienes contingentes en $t = 0$, la situación cambia radicalmente.
- Arrow (1953) señaló que, bajo ciertas condiciones, incluso si no están disponibles todos los bienes contingentes, la optimalidad de Pareto puede alcanzarse en $t = 1$.

Condiciones para alcanzar Pareto en $t = 1$:

1. Al menos un bien físico puede comerciarse contingentemente en $t = 0$.
2. En $t = 1$, los mercados spot están disponibles y los precios son correctamente anticipados.

Intuición:

- Si se permite el comercio spot en cada estado, el único objetivo en $t = 0$ es transferir el poder adquisitivo eficientemente entre estados.
- Esto puede lograrse comerciando un único bien contingente.

Síntesis:

- Para que exista el equilibrio de Arrow-Debreu, es necesario contar con un gran número de mercados de bienes contingentes (LS).
- Este es un requisito fuerte.
- Puede relajarse adoptando una estructura secuencial y asumiendo la existencia de un único bien contingente para cada estado (valores Arrow).

Radner

1. En $t = 0$, los consumidores tienen expectativas sobre los precios spot en $t = 1$ para cada estado $s \in \{1, \ldots, S\}$.
2. Denotemos el vector esperado de precios spot en s como $p(s) \in \mathbb{R}^l$.
3. El vector total de expectativas es $p \in \mathbb{R}^{LS}$, asumiendo expectativas homogéneas entre consumidores.
4. En $t = 0$, solo hay comercio contingente del bien con etiqueta 1, con precios $q = (q(1), \ldots, q(S)) \in \mathbb{R}^S$.
5. Los consumidores formulan un plan de comercio $(z^i(1), \ldots, z^i(S)) \in \mathbb{R}^S$ en $t = 0$ y un plan de consumo $(x^i(1), \ldots, x^i(S)) \in \mathbb{R}^{LS}$ en $t = 1$.

El problema de maximización de utilidad para el consumidor i es:

$$\max_{\{x^i, z^i\}} \; u_i(x^i(1), \ldots, x^i(S))$$

sujeto a:

$$\sum_{s=1}^{S} q(s) z^i(s) \leq 0, \quad p(s) \cdot x^i(s) \leq p(s)\omega^i(s) + p_1(s) z^i(s), \; \forall s.$$

Definición: Un equilibrio de Radner es una asignación

$$\{(x^{i*}, z^{i*})\}_{i=1,\cdots,I} \in \mathbb{R}^{I(LS+S)}$$

y un vector de precios $(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^{LS+S}$ tales que:

1. Para cada agente i, (x^{i*}, z^{i*}) resuelve el problema de maximización de la slide anterior.
2. Para cada estado s,
$$\sum_h z^{i*}(s) \leq 0, \quad \sum_i x^{i*}(s) \leq \sum_i \omega^i(s).$$

Proposición: Si una asignación x^* y precios contingentes $\{p(1), \ldots, p(S)\}$ constituyen un equilibrio de Arrow-Debreu, entonces existe un equilibrio de Radner con precios q y consumos z^*.

Proposición: Si x^*, z^*, q, p constituyen un equilibrio de Radner, entonces existen multiplicadores $\mu(s)$ tales que x^* y precios ajustados $\{\mu(s)p(s)\}$ constituyen un equilibrio de Arrow-Debreu.

Ejemplo: Encuentre el equilibrio de Radner con los siguientes activos:

$$z_1 = (1, 1), \quad z_2 = (0.5, 2).$$

Restricciones presupuestarias:

$$p_1(1)x_1^1(1) + p_2(1)x_2^1(1) = p_1(1)\omega_1^1(1) + p_2(1)\omega_2^1(1) + p_1(1)z^1(1),$$

$$p_1(2)x_1^1(2) + p_2(2)x_2^1(2) = p_1(2)\omega_1^1(2) + p_2(2)\omega_2^1(2) + p_1(2)z^1(2).$$

Resolviendo:

$$z^1(1) = -2, \quad z^1(2) = 2,$$
$$z^2(1) = 2, \quad z^2(2) = -2.$$

Restricciones:

$$q(1)z^1(1) + q(2)z^1(2) \leq 0, \quad q(1)z^2(1) + q(2)z^2(2) \leq 0.$$

Con $q_1^* = q_2^*$, el bien x_1 se vende a corto plazo $(z^1(1) < -\omega_1^1(1))$.

Modelo con dos consumidores y dos bienes

Activos de Arrow

En $t = 0$, existen mercados para negociar S activos (conocidos como activos de Arrow). Cada activo asegura recibir una unidad de valor monetario en $t = 1$ solo si se da un estado específico. Luego, en $t = 1$ se dará el intercambio entre los consumidores. En cada estado, la riqueza depende de las dotaciones a los precios spot más el retorno del portafolio de activos.
Los consumidores venderán y comprarán activos en $t = 0$ para transferir riqueza entre estados y financiar su consumo. Sea $d_{si} \in \mathbb{R}$ la posición del consumidor i en el activo s. Si $d_{si} > 0$, entonces i ha comprado dicho activo y recibirá d_s unidades de valor si el estado es s. Si $d_{si} < 0$, ha vendido dicho activo y por ende, en $t = 1$, pagará $|d_s|$ unidades de valor si el estado es s.
Sea β_s el precio en $t = 0$ del activo s. Como no hay riqueza en $t = 0$,

$$\sum_{s=1}^{S} \beta_s d_{si} = 0, \ \forall i.$$

Luego, si $\rho_{\ell s}$ es el precio spot del bien ℓ en $t = 1$ si el estado es s, entonces

$$\rho_1(s)x_{1i}(s) + \rho_2(s)x_{2i}(s) = \rho_1(s)\omega_{1i}(s) + \rho_2(s)\omega_{i2}(s) + d_{si}.$$

Problema del consumidor

El problema del consumidor $i = 1, 2$ es encontrar $x_{\ell i}(s)$, $\ell = 1, 2$, $s = 1, ..., S$ solución de

$$\mathcal{P}_A : \begin{cases} \max & \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(x_{1i}(s), x_{2i}(s)) \\ \text{s. a} & \sum_{s=1}^{S} \beta_s d_{si} = 0 \\ & \rho_1(s)x_{1i}(s) + \rho_2(s)x_{2i}(s) = \rho_1(s)\omega_{1i}(s) + \rho_2(s)\omega_{2i}(s) + d_{si}, \;\; s = 1, ..., S. \end{cases}$$

Definición de equilibrio con activos de Arrow

Definition

Dada una economía con dos bienes, sin producción con dos momentos de tiempo, S estados de la naturaleza en $t = 1$, dos consumidores $(i = 1, 2)$ cuyas utilidades son

$$U_i(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(x_{1i}(s), x_{2i}(s)).$$

Unos precios $(\rho_1^*(s), \rho_2^*(s))$ para $s = 1, ..., S$, unos precios para los activos $\beta_1^*, \cdots, \beta_S^*$, unos planes de consumo contingentes $(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))$ para $i = 1, 2$ y $s = 1, ..., S$ y unos portafolios $(d_{1i}^*, \cdots, d_{Si}^*)$ para $i = 1, 2$, y $s = 1, ..., S$ sin un equilibrio si:

1. para cada $i = 1, 2$, los planes de consumo $\{(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))\}_{s=1,...,S}$ junto a los portafolios $\{d_{si}^*\}_{s=1,...,S}$ son solución de $\mathcal{P}_A$,
2. para cada $s = 1, ..., S$ y $\ell = 1, 2$
$$x_{\ell 1}^*(s) + x_{\ell 2} = \omega_{\ell 1}(s) + \omega_{\ell 2}(s)$$
3. para cada $s = 1, ..., S$
$$d_{s1}^* + d_{s2}^* = 0.$$

Lagrangiano asociado a $\mathcal{P}_A$

El Lagrangiano asociado a $\mathcal{P}_A$ es

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \lambda_i) &= \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(x_{1i}(s), x_{2i}(s)) - \lambda_i \sum_{s=1}^{S} \beta_s d_{si} \\ &+ \sum_{s=1}^{S} \mu_{si} \left[\rho_1(s)\omega_{1i}(s) + \rho_2(s)\omega_{2i}(s) + d_{si} - \rho_1(s)x_{1i}(s) - \rho_2(s)x_{2i}(s)\right]. \end{aligned}$$

Las CPO proveen

$$\pi_s \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell i}}(x_{1i}(s), x_{2i}(s)) - \mu_{si}\rho_\ell(s) = 0,\ s = 1, ..., S,\ \ell = 1, 2 \tag{3}$$

$$-\lambda_i \beta_s + \mu_{si} = 0,\ s = 1, ..., S. \tag{4}$$

Despejando μ_{si} de (4)

$$\pi_s \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell i}}(x_{1i}(s), x_{2i}(s)) - \lambda_i(\beta_s \rho_\ell(s)) = 0,\ \forall\ s = 1, .., S,\ \ell = 1, 2.$$

Si definimos $p_\ell(s) = \beta_s \rho_\ell(s)$, obtenemos las CPO del problema del consumidor $\mathcal{P}$. Por otro lado,

$$\sum_{s=1}^{S}[p_1(s)x_{1i}(s) + p_2(s)x_{2i}(s)] = \sum_{s=1}^{S}(p_1(s)\omega_{1i}(s) + p_2(s)\omega_{2i}(s)) + \underbrace{\sum_{s=1}^{S} \beta_s d_{si}}_{=0}$$

re-construyen la restricción presupuestaria. De hecho, definiendo

$$d_{ki} = \left(\frac{p_1(k)}{\beta_k}x_{1i}(k) + \frac{p_2(k)}{\beta_k}x_{2i}(k)\right) - \left(\frac{p_1(k)}{\beta_k}\omega_{1i}(k) + \frac{p_2(k)}{\beta_k}\omega_{2i}(k)\right)$$

obtenemos

$$\sum_{k=1}^{K} \beta_k d_{ki} = 0.$$

Teorema sobre bienes contingentes

Theorem

Dada una economía con dos bienes, sin producción, con dos momentos del tiempo, con S estados posibles de la naturaleza en $t = 1$ y con dos consumidores $i = 1, 2$ y cuyas utilidades son

$$U_i(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(x_{1i}(s), x_{2i}(s)).$$

1. *Si $(p_1^*(s), p_2^*(s))$, $(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))$ para $i = 1, 2$, $s = 1, ..., S$ son un equilibrio con bienes contingentes. Entonces, para cualquier $(\beta_1^*, \cdots, \beta_S^*) \in \mathbb{R}_+^S$, definiendo $\rho_\ell^*(s) = \frac{p_\ell^*(s)}{\beta_s}$ y*

$$d_{si}^* = \left(\frac{p_1^*(s)}{\beta_s^*} x_{1i}^*(s) + \frac{p_2^*(s)}{\beta_s} x_{2i}^*(s)\right) - \left(\frac{p_1^*(s)}{\beta_s^*} \omega_{1i}(s) + \frac{p_2(s)}{\beta_s^*} \omega_{2i}(s)\right)$$

se tiene que $(\rho_1^*(s), \rho_2^*(s))$, $(\beta_1^*, \cdots, \beta_S^*)$, $(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))$, $(d_{1i}^*, \cdots, d_{Si}^*)$ para $i = 1, 2$, $s = 1, ..., S$ son un equilibrio con bienes contingentes.

Teorema sobre bienes contingentes (continúa)

Theorem

1. *Si* $(\rho_1^*(s), \rho_2^*(s))$, $(\beta_1^*, \cdots, \beta_S^*)$, $(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))$, $(d_{1i}^*, \cdots, d_{Si}^*)$ *para* $i = 1, 2$, $s = 1, ..., S$ *son un equilibrio con bienes contingentes. Definiendo* $p_\ell^*(s) = \beta_s^* \rho_\ell^*(s)$ *para cada* ℓ *y cada* s*, entonces* $(p_1^*(s), p_2^*(s))$ *para cada* $s = 1, ..., S$ *y* $(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))$ *para* $i = 1, 2$, $s = 1, ..., S$ *son un equilibrio con bienes contingentes.*

Modelo de Radner

Este es el tercer y último modelo, que dicho sea de paso, es más realista. En $t = 0$ existen M activos, cada uno asegura realizar un cierto valor en $t = 1$ contingente al estado que se realice. El activo v_m entrega $v_m(s) \in \mathbb{R}$ unidades si el estado es s. Luego, en $t = 1$ se da el intercambio de bienes entre los consumidores.

Mercados completos y arbitraje

Los activos disponibles son $(v_1, \cdots, v_m)$. La transferencia de riqueza se realiza comprando o vendiendo activos en $t = 0$. Sea θ_{mi} la posición larga/corta del activo m del consumidor i. Si $\theta_{mi} > 0$ (posición larga) el consumidor i ha comprado esa cantidad del activo m. Si $\theta_{mi} < 0$, el consumidor m ha vendido $|\theta_{mi}|$ del activo m. El vector $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{1i}, \cdots, \theta_{Mi})$ es el portafolio del consumidor. En $t = 1$, este portafolio genera resultados

$$\begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi} v_{mi}(1) \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi} v_{mi}(S) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^S.$$

Si definimos

$$V = \begin{bmatrix} v_1(1) & v_2(1) & \cdots & v_M(1) \\ v_1(2) & v_2(2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_1(S) & \cdots & \cdots & v_M(S) \end{bmatrix}$$

y consideramos $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_M)^T$, entonces

$$V\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi} v_{mi}(1) \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi} v_{mi}(S) \end{bmatrix}.$$

Definición de mercados completos

Definition

Se dice que un mercado es completo si para todo $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^S$, podemos encontrar un portafolio $\boldsymbol{\Theta}$ tal que

$$V\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{d}. \tag{5}$$

En caso $M < S$, $V\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{d}$ tiene solución solo para ciertos $\mathbf{d}$. Por ende, con la finalidad de tener mercados completos, se requiere que $M \geq S$ (eso es consecuencia del teorema del rango).

No existe oportunidad de arbitraje (NOA)

Definition

No existe oportunidad de arbitraje (NOA). Dada una estructura de activos V y unos precios $\mathbf{\Phi}$, decimos que no existe oportunidad de arbitraje si para todo portafolio $\boldsymbol{\theta}$ se cumple que

1. Si $V\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$.
2. Si $V\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$.

(1) dice que si un portafolio no genera ningún pago o cobro en $t = 1$, entonces debe costar 0 en $t = 0$. Por otro lado, la condición (2) dice que si un portafolio genera un cobro en $t = 1$, entonces cuesta en $t = 0$.

Analicemos ahora el problema del consumidor de cada individuo:

$$\mathcal{P}_R : \begin{cases} \max & \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(x_{1i}(s), x_{2i}(s)) \\ \text{s. a.} & \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi}\varphi_m = 0 \\ & \rho_1(s)x_{1i}(s) + \rho_2(s)x_{2i}(s) = \rho_1(s)\omega_{1i}(s) + \rho_2(s)\omega_{2i}(s) + \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi} v_m(s). \end{cases}$$

La primera restricción corresponde al hecho que el consumidor no dispone de riqueza en $t = 0$. La segunda restricción es la restricción presupuestaria, donde $\rho_i(s)$ es el precio del bien i en el estado s en $t = 1$.

Equilibrio de Radner

Definition

Sea una economía con dos bienes, sin producción con dos momentos con S estados posibles de la naturaleza en $t = 1$ y con dos consumidores con utilidades $U_i(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(x_{1i}(s), x_{2i}(s))$. En esta economía se tiene una estructura de M activos dada por la matriz V. Unos precios $(\rho_1^*(s), \rho_2^*(s))$ para $s = 1, ..., S$ y $(\varphi_1^*, \cdots, \varphi_M^*)$, unos planes de consumo contingentes $(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))$ para $i = 1, 2$ son un equilibrio de Radner si

1. Para $i = 1, 2$ $(x_{1i}^*(s), x_{2i}^*(s))$ para $s = 1, ..., S$ junto con $(\theta_{1,i}^*, \cdots, \theta_{M,i}^*)$ es solución de $\mathcal{P}_R$.
2. Para cada $s = 1, ..., S$ y $\ell = 1, 2$
$$x_{\ell 1}^*(s) + x_{\ell 2}^*(s) = \omega_{\ell 1}(s) + \omega_{\ell 2}(s).$$
3. Para cada $m = 1, ..., M$
$$\theta_{m1}^* + \theta_{m2}^* = 0.$$

Condiciones de primer orden (CPO) en el modelo de Radner

Apliquemos CPO a $\mathcal{P}_R$. El Lagrangiano del problema es

$$L(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i, \lambda_i, \boldsymbol{\mu}_i) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(x_{1i}(s), x_{2i}(s)) - \lambda_i \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi}\varphi_m$$
$$+ \sum_{s=1}^{S} \mu_{is} \left[\rho_1(s)\omega_{1i}(s) + \rho_2(s)\omega_{2i}(s) + \sum_{m=1}^{M} \theta_{mi} v_m(s) - \rho_1(s)x_{1i}(s) - \rho_2(s)x_{2i}(s) \right].$$

Luego,

$$\pi_s \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell i}}(x_{1i}(s), x_{2i}(s)) \right] = \mu_{si}\rho_\ell(s), \ \forall \ s, \ell, i$$
$$\lambda_i \varphi_m = \sum_{s=1}^{S} \mu_{si} v_m(s), \ \forall \ m, i.$$

De no haber oportunidad de arbitraje, $\varphi_m = \sum_{s=1}^{S} \beta_s v_m(s)$. Así,

$$\lambda_i \varphi_m = \sum_{s=1}^{S} \lambda_i \beta_s v_m(s).$$

Si identificamos $\lambda_i \beta_s = \mu_{si}$, obtenemos

Ejercicio: Restricciones presupuestarias

Pruebe que las restricciones presupuestarias, asumiendo mercados completos, son las mismas en el modelo de Radner y del de activos contingentes. Esto es,

$$\sum_{s=1}^{S} \beta_s \rho_1(s)\omega_1(s) + \sum_{s=1}^{S} \beta_s \rho_2(s)\omega_2(s) + \sum_{s=1}^{S} \beta_s \sum_{m=1}^{M} \theta_m v_m(s) = \sum_{s=1}^{S} p_1(s)\omega_1(s) + p_2(s)\omega_2(s).$$

Ejercicio: Modelo de activos contingentes

Sitúese en el modelo de activos contingentes y asuma que los precios son $p_\ell(s)$. Defina para $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^S_{++}$,

$$\rho_\ell(s) = \frac{p_\ell(s)}{\beta_s}$$

$$\varphi_m = \sum_{s=1}^{S} \beta_s v_m(s).$$

y

$$d_s = \rho_1(s)(x_1(s) - \omega_1(s)) + \rho_2(s)(x_2(s) - \omega_2(s)).$$

Pruebe que $\sum_{m=1}^{M} \theta_m \varphi_m = 0$. Sugerencia: $d_s = \sum_{m=1}^{M} \theta_m v_m(s)$.

Equilibrio de Radner

Theorem

Sea una economía con dos bienes, sin producción, dos periodos de tiempo, K estados de la naturaleza y utilidades

$$U_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k u_i(x_{1i}(k), x_{2i}(k))$$

M activos con matriz V y mercados completos.

1. *Si los precios $(\rho_1^*(k), \rho_2^*(k))$ para $k = 1, ..., K$ y $\boldsymbol{\Phi} = (\varphi_1^*, \cdots, \varphi_M^*)$ los planes de consumo contingentes $(x_{1i}^*(k), x_{2i}^*(k))$ para $i = 1, 2$ y para $k = 1, ..., K$ y los portafolios $(\theta_{1i}^*, ..., \theta_{Mi}^*)$ para $i = 1, 2$ son equilibrio de Radner, entonces existe un vector de precio de estados $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_K) \in \mathbb{R}_{++}^K$ que cumple $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\beta} V$, tal que si definimos $p_\ell^*(k) = \beta_k \rho_\ell^*(k)$, tenemos que $(p_1^*(k), p_2^*(k))$ para $k = 1, ..., K$ y $(x_{1i}(k), x_{2i}(k))$ para $i = 1, 2$ y para $k = 1, ..., K$ son un equilibrio con bienes contingentes.*

Equilibrio de Radner (continúa)

Theorem

1. *Si los precios* $(p_1^*(k), p_2^*(k))$ *para* $k = 1, .., K$ *y los planes de consumo contingentes* $(x_{1i}(k), x_{2i}(k))$ *para* $i = 1, 2$ *y para* $k = 1, ..., K$ *son un equilibrio con bienes contingentes, entonces para cualquier vector de estados* $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^K_{++}$*, definiendo* $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\beta} V$ *y para cada* $k = 1, ..., K$ *y* $\ell = 1, 2$
$$\rho_\ell^*(k) = \frac{p_\ell^*(k)}{\beta_k}$$
tenemos que existen unos portafolios $\boldsymbol{\theta}^*$ *para* $i = 1, 2$ *tales que* $\boldsymbol{\rho}^*$, $\boldsymbol{\Phi}^*$. $\boldsymbol{x}^*$ *son un equilibrio de Radner.*

CAPM

CAPM

1. El CAPM nos da un marco conceptual para la valoración de activos riesgosos. ¿Como se puede valorar activos con retornos ciertos?
2. Considere un activo que genera un ingreso V_t en el periodo Δt, aunque sufre una depreciación δ_t.
3. $A = V_t \Delta t + p_{t+\Delta t}(1 - \delta_t \Delta t)$.
4. El coso de oportunidad es el rendimiento en un ahorro en un banco: $B = p_t(1 + r_t \Delta t)$.
5. Si no hay oportunidad de arbitraje,

$$V_t \Delta t + p_{t+\Delta t}(1 - \delta_t \Delta t) = p_t(1 + r_t \Delta t)$$
$$(p_t r_t + p_{t+\Delta t} \delta t) = \frac{p_{t+\Delta t} - p_t}{\Delta t} + V_t.$$

6. Haciendo $\Delta t \to 0$,

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)} + \frac{V(t)}{p(t)} - \delta(t).$$

7. La tasa de retorno (costo de oportunidad) debe ser igual a las ganancias de capital (cambio en el precio del activo), más el retorno generado por el activo en el período, menos la depreciación del mismo.

Ejemplos

1. Petróleo: $V(t) = \delta(t) = 0$ y $r(t)p(t) = p'(t)$.
2. Stock $\delta(t) = 0$ y así $r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)} + \frac{V(t)}{p(t)}$.
3. Durables: $p'(t) = 0$, $V(t) = (r(t) + \delta(t))p(t)$.

Mercados completos

1. Un mercado es completo si para cada estado de la naturaleza existe un mercado de consumos contingentes.
2. En la práctica los mercados serán completos si cualquier instrumento financiero complejo puede ser replicado por un portafolio de consumos contingentes.

Supongamos que en un entorno de dos estados de la naturaleza, existen dos activos, uno libre de riesgo y otro riesgoso.

1. El activo libre de riesgo D rinde $z_D(1) = z_D(2) = 1$.
2. El activo riesgoso B rinde mejor en el estado de la naturaleza 2: $z_B(1) = 1$, $z_B(2) = 4$.
3. Un individuo tiene como dotación únicamente 100 unidades del activo D, lo que le permite consumir lo mismo en cada estado de la naturaleza.
4. Existiendo precios para los activos, puede ser sencillo para el individuo escoger otra combinación de consumos.
5. Asumamos que:

$$p_D^A = 1 \quad \text{y} \quad p_B^A = 2.$$

Los precios de los activos pueden ser computados directamente si los precios de los consumos contingentes en los diferentes estados de la naturaleza fueran conocidos:

$$p_D^A = z_D(1) \cdot p_1 + z_D(2) \cdot p_2,$$

$$p_B^A = z_B(1) \cdot p_1 + z_B(2) \cdot p_2.$$

1. Reemplazando los rendimientos:

$$p_D^A = p_1 + p_2\,,$$

$$p_B^A = p_1 + 4\cdot p_2\,.$$

2. Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} p_D^A \\ p_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

3. Esta relación nos permite, más bien, conocidos los precios de los activos, conocer los precios de los consumos contingentes. Invirtiendo la matriz:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_D^A \\ p_B^A \end{bmatrix}.$$

4. Obtenemos los precios de los consumos contingentes:

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{2}{3}.$$

Mercados completos e incompletos

- Un mercado donde es posible intercambiar en todos los estados de la naturaleza es un **mercado completo**.
- Los mercados son **incompletos** cuando no existen Arrow-Debreu Securities debido a:
  - No existencia de un número suficiente de activos.
  - Correlación alta o rendimientos como combinación lineal de otros activos.
  - Activos no correlacionados pero no transables (e.g., capital humano).

Ejemplo de mercados incompletos

- En el ejemplo anterior:
  - El activo B rinde mejor en el estado 2, pero no existe un activo que rinda mejor en el estado 1.
  - El activo libre de riesgo D cubre relativamente el estado 1.
- Si existieran activos que rindieran una unidad de consumo en un estado específico y cero en los demás (**Arrow-Debreu Securities**), tendríamos una economía de Arrow-Debreu.

Activos Arrow-Debreu

- Supongamos que:
  - Existen S estados de la naturaleza con probabilidades π_k, $k = 1, 2, \ldots, S$.
  - Existen S activos, cada uno asociado a un estado k.
  - El activo k rinde 1 unidad de consumo en el estado k y 0 en los demás.
  - El precio del activo asociado al estado k es ϕ_k.

Problema de maximización bajo incertidumbre

- Dado que c_k es la inversión en el activo asociado al estado k, y que la riqueza es W, el portafolio óptimo se define por:

$$\max_{c_k} U_e = \sum_{k=1}^{S} \pi_k \, v(c_k)$$

sujeto a:

$$W = \sum_{k=1}^{S} \phi_k \, c_k.$$

- La función Lagrangiana asociada es:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{S} \pi_k \, v(c_k) + \lambda \left(W - \sum_{k=1}^{S} \phi_k \, c_k \right).$$

Condiciones de optimalidad

- Las condiciones de primer orden son:

$$\pi_k\, v'(c_k) - \lambda\, \phi_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, S.$$

- Resolviendo:

$$v'(c_k) = \lambda\, \frac{\phi_k}{\pi_k}.$$

- Relación consistente con el **teorema fundamental del manejo de riesgos**:

$$\lambda = \frac{\pi_1\, v'(c_1)}{\phi_1} = \frac{\pi_2\, v'(c_2)}{\phi_2} = \cdots = \frac{\pi_S\, v'(c_S)}{\phi_S}.$$

Problema: Demanda de activos Arrow-Debreu

- Consideremos un individuo con aversión al riesgo relativa constante:

$$v(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

- Su riqueza es W, la probabilidad del estado s es π_k, y el precio del activo Arrow-Debreu es ϕ_k.
- Objetivo: Mostrar que la demanda de los activos es proporcional a la riqueza W.

Formulación del problema de maximización

- La función Lagrangiana asociada es:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{S} \pi_k \frac{c_k^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda \left(W - \sum_{k=1}^{S} \phi_k c_k \right).$$

- La condición de primer orden para todo $k = 1, 2, \ldots, S$ es:

$$\pi_k c_k^{-\gamma} - \lambda \phi_k = 0.$$

- De esta relación se obtiene:

$$c_k^{-\gamma} = \frac{\lambda \phi_k}{\pi_k}.$$

Teorema Fundamental del Manejo de Riesgos

- Usando la condición de primer orden:

$$\lambda = \frac{\pi_1 c_1^{-\gamma}}{\phi_1} = \frac{\pi_2 c_2^{-\gamma}}{\phi_2} = \cdots = \frac{\pi_S c_S^{-\gamma}}{\phi_S}.$$

- Relación entre c_k y c_1:

$$\frac{\pi_k}{\phi_k} c_k^{-\gamma} = \frac{\pi_1}{\phi_1} c_1^{-\gamma}.$$

- Reorganizando:

$$c_k = c_1 \left(\frac{\pi_k \phi_1}{\pi_1 \phi_k} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Restricción presupuestal y proporcionalidad

- Sustituyendo c_k en la restricción presupuestal:

$$W = \sum_{k=1}^{S} \phi_k c_k = \sum_{k=1}^{S} \phi_k c_1 \left(\frac{\pi_k \phi_1}{\pi_1 \phi_k} \right)^{\frac{1}{\gamma}} .$$

- Factor común:

$$W = c_1 \sum_{k=1}^{S} \phi_k \left(\frac{\pi_k \phi_1}{\pi_1 \phi_k} \right)^{\frac{1}{\gamma}} .$$

- Resolviendo para c_1:

$$c_1 = W \left(\sum_{k=1}^{S} \phi_k \left(\frac{\pi_k \phi_1}{\pi_1 \phi_k} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-1} .$$

Conclusión: Proporcionalidad de la demanda

- Dado que c_1 es proporcional a W, la demanda total para cada activo es:

$$c_k = W \left(\sum_{j=1}^{S} \phi_j \left(\frac{\pi_j \phi_1}{\pi_1 \phi_j} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-1} \left(\frac{\pi_k \phi_1}{\pi_1 \phi_k} \right)^{\frac{1}{\gamma}} .$$

- La demanda de los activos es proporcional a la riqueza W, y depende de los precios ϕ_k y las probabilidades π_k.

Ejercicio CAPM

En una economía competitiva hay muchos inversionistas con la función de utilidad esperada:

$$\mathbb{E}U(\mu,\sigma) = \mu^{10} e^{-\sigma}.$$

- Hay tres activos $(1,2,3)$, no correlacionados ($\sigma_{ij} = 0$ para todo i,j).
- Cada individuo tiene como dotación una unidad de cada activo.
- Los estadísticos relevantes y precios se usan para construir los portafolios.

Preferencias en el espacio μ, σ

- La curva de indiferencia se encuentra resolviendo:

$$d\mathbb{E}U = 10\mu^9 e^{-\sigma} d\mu - \mu^{10} e^{-\sigma} d\sigma = 0.$$

- Esto implica:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\mu}{10}.$$

- Las curvas de indiferencia tienen pendiente positiva y creciente, consistente con la aversión al riesgo.

Compra de un solo activo

- Si el inversionista compra únicamente un activo, la riqueza es:

$$w = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 1 \cdot 1 + 0.46 \cdot 1 + 0.04 \cdot 1 = 1.5.$$

- Los valores para cada activo son:

$$q_1 = \frac{w}{p_1} = 1.5, \quad \mu = q_1 \mu_1 = 1.5, \quad \sigma^2 = 0.$$

$$q_2 = \frac{w}{p_2} = \frac{1.5}{0.46} = 3.26, \quad \mu = q_2 \mu_2 = 3.26, \quad \sigma^2 = 95.65.$$

$$q_3 = \frac{w}{p_3} = \frac{1.5}{0.04} = 37.5, \quad \mu = q_3 \mu_3 = 37.5, \quad \sigma^2 = 22500.$$

Combinaciones de portafolio con activos riesgosos

- Si el inversionista compra solo los activos riesgosos $(2, 3)$:

$$\sigma^2 = \left(\frac{\mu - \mu_2}{\mu_3 - \mu_2}\right)^2 \sigma_3^2 + \left(\frac{\mu_3 - \mu}{\mu_3 - \mu_2}\right)^2 \sigma_2^2.$$

- Sustituyendo:

$$\sigma^2 = \frac{(\mu - 3.26)^2}{(37.5 - 3.26)^2} \cdot 22500 + \frac{(37.5 - \mu)^2}{(37.5 - 3.26)^2} \cdot 95.65.$$

- Resolviendo:

$$\sigma^2 = 320.96 - 131.37\mu + 19.27\mu^2.$$

Portafolio óptimo

- La pendiente de la curva eficiente es:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{2\sigma}{38.54\mu - 131.37}.$$

- Para incluir un activo libre de riesgo, la combinación eficiente es:

$$\mu = 1.5 + m\sigma,$$

  donde:

$$m = \frac{2\sigma}{38.54\mu - 131.37}.$$

- Resolviendo:

$$\mu = 6.05, \quad \sigma = 15.22.$$

Costo de la reducción de riesgo

- El costo marginal de la reducción de riesgo es:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\mu - 1.5}{15.22}.$$

- Esto proporciona una medida del sacrificio en retorno esperado por reducir el riesgo en la cartera.

Gracias