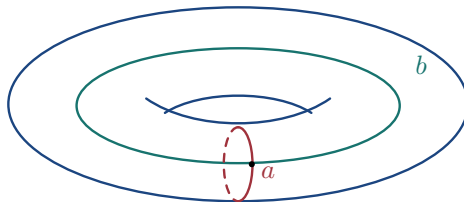


Topología General

Notas de clase

Espacios topológicos, compacidad, conexidad, metrización,
espacios de funciones y grupo fundamental



Marcelo Gallardo

`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`

Índice general

I	Espacios topológicos	1
1	Espacios métricos	1
1.1	Métricas y bolas	1
1.2	Conjuntos abiertos y cerrados	1
1.3	Interior, clausura y frontera	2
1.4	Funciones continuas	3
2	Espacios topológicos	5
2.1	Topologías	5
2.2	Conjuntos cerrados	6
2.3	Vecindades, interior, clausura y frontera	6
2.4	Puntos de acumulación y sucesiones	7
3	Bases y construcción de topologías	9
3.1	Subbases	9
3.2	Bases	10
3.3	Comparación de topologías	11
3.4	La topología inducida por un orden	11
3.5	La topología de un subespacio	12
3.6	El producto de dos espacios	13
4	Funciones continuas	14
4.1	Definición y caracterizaciones	14
4.2	Continuidad en un punto y sucesiones	15
4.3	Homeomorfismos y aplicaciones abiertas	15
4.4	Funciones con valores en un producto. Encajes	16
5	La topología cociente	18
5.1	Particiones y levantamientos	18
5.2	La topología cociente	18
5.3	Aplicaciones cociente	19
6	Espacios de Hausdorff y variedades	21
6.1	Un cociente en el que los límites no son únicos	21
6.2	Espacios de Hausdorff	21
6.3	Variedades	22
II	Compacidad y conexidad	24
7	Compacidad	24
7.1	Espacios compactos	24

7.2	Compacidad por puntos límite y por sucesiones	25
7.3	Compactos de $\mathbb{R}^n$ y el número de Lebesgue	27
7.4	Consecuencias	28
8	Espacios cociente clásicos	29
8.1	El círculo	29
8.2	El disco y la esfera	29
8.3	El toro	30
8.4	Espacios proyectivos	31
8.5	La cinta de Möbius y la adjunción	33
9	Conexidad	35
9.1	Espacios conexos	35
9.2	Los conexos de la recta	36
9.3	Productos de espacios conexos	36
9.4	Conexidad por caminos	37
III	Productos, separación y metrización	39
10	Productos arbitrarios	39
10.1	La topología producto	39
10.2	Convergencia en la topología producto	40
10.3	Métricas limitadas y metrizabilidad de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	41
10.4	Bases locales y un producto no metrizable	42
11	Axiomas de separación y metrización	43
11.1	Espacios regulares y normales	43
11.2	Los espacios métricos son normales	43
11.3	Regular con base numerable implica normal	44
11.4	El lema de Urysohn	44
11.5	El teorema de metrización de Urysohn	45
IV	Espacios de funciones	47
12	Espacios métricos completos	47
12.1	Sucesiones de Cauchy y completitud	47
12.2	Espacios totalmente limitados	48
13	La topología uniforme	50
13.1	La métrica uniforme	50
13.2	Completitud	50
13.3	Comparación con la topología producto	52
14	Equicontinuidad y el teorema de Arzelà-Ascoli	53
14.1	Familias equicontinuas	53
14.2	El teorema de Arzelà-Ascoli	54

15	Aplicaciones del teorema de Arzelà-Ascoli	55
15.1	Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales	55
15.2	Caminos de longitud mínima	57
16	La topología de la convergencia compacta	60
16.1	Convergencia uniforme en compactos	60
16.2	Espacios σ^0 -compactos y Arzelà-Ascoli	61
16.3	Una aplicación: el teorema de Montel	62
V	Grupo fundamental	63
17	Homotopía y grupo fundamental	63
17.1	Homotopías	63
17.2	Homotopía de caminos	64
17.3	El grupo fundamental	65
17.4	El grupo fundamental del círculo	66
18	Equivalencias homotópicas	68
18.1	El grupo fundamental de un producto	68
18.2	Equivalencias homotópicas	68
18.3	Retracciones y espacios simplemente conexos	69
18.4	Las esferas de dimensión mayor que uno	70
19	El teorema de Seifert-van Kampen	71
19.1	Grupos libres y presentaciones	71
19.2	Productos libres y productos amalgamados	72
19.3	El enunciado	73
19.4	Aplicaciones	73
19.5	Demostración del teorema de Seifert-van Kampen	75
	Bibliografía	78

Notación

Conjuntos y espacios

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$, enteros, racionales, reales, complejos.
(X, d)	espacio métrico.
$(X, \mathcal{T})$	espacio topológico; $\mathcal{T}$ es la colección de abiertos.
$B_r(p), B_r[p]$	bola abierta y bola cerrada de centro p y radio r .
$\mathbb{S}^n$	esfera $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x\ = 1\}$.
$\mathbb{D}$	disco $\{z \in \mathbb{C} : z \leq 1\}$.
$\mathbb{RP}^n, \mathbb{CP}^n$	espacios proyectivos real y complejo.
$\mathbb{R}^J, X^J$	producto de copias de $\mathbb{R}$ o de X indexadas por J .
$X^*, X/\sim$	partición de X y espacio cociente.
$\rho: X \rightarrow X^*$	proyección canónica sobre el cociente.

Topología

$\text{int}(A), \bar{A}, \partial A$	interior, clausura y frontera de A .
A'	conjunto de puntos de acumulación de A .
$\text{diam}(A)$	diámetro de A en un espacio métrico.
$d(x, A)$	$\inf\{d(x, a) : a \in A\}$.
$\bar{d}$	métrica limitada canónica $\min\{d, 1\}$.
$\tilde{f} = f \circ \rho$	levantamiento de $f: X^* \rightarrow Y$.
$f: X \hookrightarrow Y$	encaje topológico.
$X \cong Y$	X es homeomorfo a Y .
$X \cup_f Y$	adjunción de X a Y mediante f .

Espacios de funciones

Y^X	funciones de X en Y .
$\mathcal{B}(X, Y), \mathcal{C}(X, Y)$	funciones limitadas y funciones continuas de X en Y .
$\bar{\rho}$	métrica uniforme en Y^X .
$B(f, \varepsilon, K)$	básico de la topología de la convergencia compacta.
$\ell(\gamma)$	longitud del camino γ .

Homotopía

$f \simeq g$	f y g son homotópicas.
--------------	----------------------------

$\alpha \simeq_p \beta$	α y β son homotópicos con extremos fijos.
$\alpha * \beta, \bar{\alpha}$	yuxtaposición de caminos y camino inverso.
$\pi_1(X, p)$	grupo fundamental de X en p .
f_*	homomorfismo inducido por f .
$\langle S \rangle, \langle S \mid R \rangle$	grupo libre generado por S y grupo presentado por generadores S y relaciones R .
$G * H$	producto libre de los grupos G y H .

CAPÍTULO 1

Espacios métricos

1.1 Métricas y bolas

Definición 1.1 (Métrica). Sea X un conjunto. Una *métrica* en X es una función $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

- (I) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- (II) $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$;
- (III) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).

Un *espacio métrico* es un par (X, d) , donde X es un conjunto y d es una métrica en X .

Ejemplo 1.2. (a) Si $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$. Más generalmente, toda norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial real E define la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

(b) Dado cualquier conjunto X , la función

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \quad (1.1)$$

es una métrica en X , llamada *métrica discreta*.

(c) Todo subconjunto Y de un espacio métrico (X, d) es un espacio métrico con la restricción de d a $Y \times Y$.

Definición 1.3 (Bolas). Sea (X, d) un espacio métrico, $p \in X$ y $r > 0$. La *bola abierta* y la *bola cerrada* de centro p y radio r son, respectivamente,

$$B_r(p) = \{x \in X : d(x, p) < r\}, \quad B_r[p] = \{x \in X : d(x, p) \leq r\}.$$

1.2 Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 1.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $A \subset X$ es *abierto* si para todo $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$. Decimos que $F \subset X$ es *cerrado* si $X - F$ es abierto.

Lema 1.5. En un espacio métrico, toda bola abierta es un conjunto abierto y toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

Demostración. Sea $x \in B_r(p)$ y $s = r - d(x, p) > 0$. Si $y \in B_s(x)$, entonces $d(y, p) \leq d(y, x) + d(x, p) < s + d(x, p) = r$, luego $B_s(x) \subset B_r(p)$. Para la bola cerrada, sea $x \notin B_r[p]$ y $s = d(x, p) - r > 0$. Si $y \in B_s(x)$, entonces $d(y, p) \geq d(x, p) - d(x, y) > d(x, p) - s = r$, de modo que $B_s(x) \subset X - B_r[p]$. ■

Proposición 1.6. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) $\emptyset$ y X son abiertos.
- (b) La unión de una colección arbitraria $\{U_i\}_{i \in I}$ de abiertos de X es un abierto de X .
- (c) La intersección de una colección finita $U_1, \dots, U_k$ de abiertos de X es un abierto de X .

Demostración. (a) es inmediato. (b) Si $a \in \bigcup_i U_i$, existe i_0 con $a \in U_{i_0}$ y $r > 0$ con $B_r(a) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_i U_i$. (c) Si $a \in \bigcap_{i=1}^k U_i$, existen $r_1, \dots, r_k > 0$ con $B_{r_i}(a) \subset U_i$. Tomando $r = \min\{r_1, \dots, r_k\} > 0$ se tiene $B_r(a) \subset U_i$ para todo i , es decir $B_r(a) \subset \bigcap_{i=1}^k U_i$. ■

La hipótesis de finitud en (c) es necesaria: en $\mathbb{R}$ los intervalos $(-1/n, 1/n)$ son abiertos, pero $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-1/n, 1/n) = \{0\}$ no lo es.

Proposición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) $\emptyset$ y X son cerrados.
- (b) La intersección de una colección arbitraria $\{F_i\}_{i \in I}$ de cerrados de X es un cerrado de X .
- (c) La unión de una colección finita $F_1, \dots, F_k$ de cerrados de X es un cerrado de X .

Demostración. Por las leyes de De Morgan,

$$X - \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X - F_i), \quad X - \bigcup_{i=1}^k F_i = \bigcap_{i=1}^k (X - F_i),$$

y basta aplicar la [proposición 1.6](#). ■

1.3 Interior, clausura y frontera

Definición 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ cerrado, } F \supset A\}, \quad (1.2)$$

$$\text{int}(A) = \bigcup \{U \subset A : U \text{ abierto}\}, \quad (1.3)$$

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}. \quad (1.4)$$

Estos conjuntos son, respectivamente, la *clausura*, el *interior* y la *frontera* de A .

Como consecuencia directa de las definiciones y de las proposiciones [1.6](#) y [1.7](#) se tiene:

- (a) $\text{int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.
- (b) $\overline{A}$ y ∂A son cerrados; $\text{int}(A)$ es abierto.

- (c) $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A : si F es cerrado y $F \supset A$, entonces $\bar{A} \subset F$.
- (d) $\text{int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A : si $U \subset A$ es abierto, entonces $U \subset \text{int}(A)$.
- (e) A es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$, y A es abierto si y sólo si $A = \text{int}(A)$.

Proposición 1.9. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

- (a) $x \in \text{int}(A)$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$.
- (b) $x \in \bar{A}$ si y sólo si para todo $r > 0$ la bola $B_r(x)$ contiene puntos de A .

Demostración. (a) Si $x \in \text{int}(A)$, existe un abierto $U \subset A$ con $x \in U$, y existe $r > 0$ con $B_r(x) \subset U \subset A$. Recíprocamente, si $B_r(x) \subset A$, como $B_r(x)$ es abierta (lema 1.5), se tiene $B_r(x) \subset \text{int}(A)$ y en particular $x \in \text{int}(A)$.

(b) Sea $x \in \bar{A}$ y supongamos que existe $r > 0$ con $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Entonces $F = X - B_r(x)$ es un cerrado que contiene a A , luego $\bar{A} \subset F$ y $x \in F$, lo cual es absurdo porque $x \in B_r(x)$. Recíprocamente, supongamos que toda bola centrada en x interseca A y que $x \notin \bar{A}$. Como $X - \bar{A}$ es abierto, existe $r > 0$ con $B_r(x) \subset X - \bar{A} \subset X - A$, lo cual contradice la hipótesis. ■

Definición 1.10 (Vecindad). Sea X un espacio métrico y $x \in X$. Una *vecindad* de x es un abierto de X que contiene a x .

Con esta terminología, la [proposición 1.9](#) adopta la forma siguiente, que es la que usaremos en espacios topológicos.

Corolario 1.11. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$.

- (a) $x \in \text{int}(A)$ si y sólo si x posee una vecindad contenida en A .
- (b) $x \in \bar{A}$ si y sólo si toda vecindad de x contiene puntos de A .

1.4 Funciones continuas

Definición 1.12. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos y $f: X_1 \rightarrow X_2$. Decimos que f es *continua* en $p \in X_1$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X_1, d_1(x, p) < \delta \implies d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon,$$

es decir, $f(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(f(p))$. Decimos que f es *continua* si es continua en todo punto de X_1 .

Proposición 1.13. Sean (X_1, d_1) , (X_2, d_2) espacios métricos y $f: X_1 \rightarrow X_2$. Entonces f es continua en p si y sólo si para toda vecindad V de $f(p)$ en X_2 existe una vecindad U de p en X_1 tal que $f(U) \subset V$.

Demostración. Supongamos f continua en p y sea V una vecindad de $f(p)$. Existe $\varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(f(p)) \subset V$, y existe $\delta > 0$ con $f(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(f(p)) \subset V$. Basta tomar $U = B_\delta(p)$.

Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, la bola $V = B_\varepsilon(f(p))$ es una vecindad de $f(p)$, luego existe una vecindad U de p con $f(U) \subset V$. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ con $B_\delta(p) \subset U$, y entonces $f(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(f(p))$. ■

Teorema 1.14. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos y $f: X_1 \rightarrow X_2$. Entonces f es continua si y sólo si para todo abierto U de X_2 el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en X_1 .

Demostración. Supongamos f continua y sea $U \subset X_2$ abierto. Si $p \in f^{-1}(U)$, entonces U es una vecindad de $f(p)$ y, por la proposición anterior, existe una vecindad W de p con $f(W) \subset U$, es decir $W \subset f^{-1}(U)$. Luego $f^{-1}(U)$ es abierto.

Recíprocamente, sean $p \in X_1$ y V una vecindad de $f(p)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es abierto y contiene a p , es decir, es una vecindad de p , y $f(f^{-1}(V)) \subset V$. Por la proposición anterior, f es continua en p . ■

Corolario 1.15. Bajo las hipótesis del teorema anterior, f es continua si y sólo si para todo cerrado F de X_2 el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X_1 .

Demostración. Basta observar que $f^{-1}(X_2 - F) = X_1 - f^{-1}(F)$. ■

El [teorema 1.14](#) muestra que la noción de función continua entre espacios métricos sólo requiere que esté bien establecido qué es un conjunto abierto, tanto en el dominio como en el contradominio. Luego, la estructura mínima que se requiere en un conjunto X para darle sentido a la noción de continuidad es una colección adecuada de subconjuntos de X , llamados abiertos. Esto conduce a la noción de espacio topológico.

Espacios topológicos

En los espacios métricos, las nociones de límite, continuidad, conexidad y compacidad pueden describirse en términos de los conjuntos abiertos, y muchos de los teoremas importantes del análisis se demuestran usando sólo las propiedades de estos conjuntos. Esto llevó a F. Hausdorff (1914) a tomar dichas propiedades como axiomas.

2.1 Topologías

Definición 2.1 (Topología). Sea X un conjunto. Una *topología* en X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las propiedades siguientes:

- (I) $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$;
- (II) la unión de cualquier colección de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$;
- (III) la intersección de cualquier colección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una topología en X . Los elementos de X se llaman *puntos* y los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman *abiertos*. Cuando no haya ambigüedad escribiremos simplemente X en lugar de $(X, \mathcal{T})$.

Ejemplo 2.2. Si (X, d) es un espacio métrico, la colección de los abiertos de X definidos por la métrica (definición 1.4) es una topología en X , por la proposición 1.6. Se llama *topología inducida por d* . Salvo mención en contrario, todo espacio métrico se considera con esta topología.

Definición 2.3. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *metrizable* si existe una métrica d en X cuya topología inducida es $\mathcal{T}$.

Ejemplo 2.4 (Topología discreta). Si X es cualquier conjunto, la colección $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X es una topología, llamada *topología discreta*. Es inducida por la métrica discreta (1.1): para esa métrica, $B_1(x) = \{x\}$, de modo que cada punto es abierto y, como todo subconjunto de X es unión de sus puntos, todo subconjunto de X es abierto.

Ejemplo 2.5 (Topología trivial). Si X es cualquier conjunto, la colección $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es una topología, llamada *topología trivial* (o indiscreta). Si X tiene al menos dos elementos, esta topología no es metrizable. En efecto, supongamos que existe una métrica d que la induce. Tomemos puntos distintos $a, b \in X$ y sea $r = d(a, b) > 0$. La bola $B_r(a)$ es un abierto no vacío, pues contiene a a , y distinto de X , pues no contiene a b . Luego $B_r(a) \notin \mathcal{T}$, lo cual es una contradicción.

2.2 Conjuntos cerrados

Definición 2.6. Sea X un espacio topológico. Decimos que $F \subset X$ es *cerrado* si $X - F$ es abierto.

Proposición 2.7. Sea X un espacio topológico.

- (a) $\emptyset$ y X son cerrados.
- (b) La intersección de cualquier colección de cerrados es un cerrado.
- (c) La unión de cualquier colección finita de cerrados es un cerrado.

Demostración. Es consecuencia inmediata de las leyes de De Morgan y de la [definición 2.1](#), como en la [proposición 1.7](#). ■

Ejemplo 2.8. En $\mathbb{R}$, el intervalo $[a, b]$ es cerrado, pues $\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto. El conjunto $\mathbb{Z}$ es cerrado, pues $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$. El conjunto $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado, ya que todo intervalo abierto contiene racionales e irracionales. En un espacio discreto, todo subconjunto es a la vez abierto y cerrado.

2.3 Vecindades, interior, clausura y frontera

Definición 2.9 (Vecindad). Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Una *vecindad* de x es un abierto de X que contiene a x .

Definición 2.10. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Definimos el *interior*, la *clausura* y la *frontera* de A como

$$\text{int}(A) = \bigcup \{U \subset A : U \text{ abierto}\}, \quad \bar{A} = \bigcap \{F \supset A : F \text{ cerrado}\}, \quad \partial A = \bar{A} \cap \overline{X - A}.$$

Los puntos de $\bar{A}$ se llaman *puntos de adherencia* de A . También escribiremos A° en lugar de $\text{int}(A)$.

Igual que en el caso métrico, $\text{int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A y $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A ; A es abierto si y sólo si $A = \text{int}(A)$, y es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$. Además, tomando complementos en las definiciones,

$$X - \bar{A} = \text{int}(X - A), \quad X - \text{int}(A) = \overline{X - A}. \quad (2.1)$$

Proposición 2.11. Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$.

- (a) $x \in \text{int}(A)$ si y sólo si x posee una vecindad contenida en A .
- (b) $x \in \bar{A}$ si y sólo si toda vecindad de x contiene puntos de A .
- (c) $x \in \partial A$ si y sólo si toda vecindad de x contiene puntos de A y puntos de $X - A$.

Demostración. (a) es la definición de interior. (b) Por (2.1), $x \notin \bar{A}$ si y sólo si $x \in \text{int}(X - A)$, es decir, si y sólo si existe una vecindad de x contenida en $X - A$, o sea, disjunta de A . (c) se sigue de (b) aplicado a A y a $X - A$. ■

Proposición 2.12. Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Entonces:

- (a) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$;
- (b) si $A \subset B$, entonces $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$;
- (c) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$;
- (d) $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subset \text{int}(A \cup B)$.

Demostración. (a) $\text{int}(A)$ es abierto. (b) $\text{int}(A)$ es un abierto contenido en B , luego está contenido en $\text{int}(B)$. (c) Por (b), $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$; recíprocamente, $\text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ es un abierto contenido en $A \cap B$. (d) se sigue de (b). ■

La inclusión en (d) puede ser estricta: en $\mathbb{R}$, con $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, se tiene $\text{int}(A) = \text{int}(B) = \emptyset$, mientras que $\text{int}(A \cup B) = \mathbb{R}$.

Proposición 2.13. Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Entonces:

- (a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
- (b) si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$;
- (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- (d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demostración. Basta tomar complementos en la proposición anterior usando (2.1). Por ejemplo, para (c): $X - \overline{A \cup B} = \text{int}((X - A) \cap (X - B)) = \text{int}(X - A) \cap \text{int}(X - B) = (X - \overline{A}) \cap (X - \overline{B})$. ■

La inclusión en (d) puede ser estricta: en $\mathbb{R}$, con $A = (-1, 0)$ y $B = (0, 1)$, se tiene $\overline{A \cap B} = \emptyset$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$.

Ejemplo 2.14. En $\mathbb{R}$: $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\text{int}([a, b]) = (a, b)$ y $\overline{(a, b)} = [a, b]$. En $\mathbb{R}^2$, con $\mathbb{S}^1 = \{x : \|x\| = 1\}$ y $\mathbb{D} = \{x : \|x\| \leq 1\}$: $\text{int}(\mathbb{S}^1) = \emptyset$, $\text{int}(\mathbb{D}) = B_1(0)$ y $\overline{B_1(0)} = \mathbb{D}$.

2.4 Puntos de acumulación y sucesiones

Definición 2.15. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que $p \in X$ es un *punto de acumulación* (o punto límite) de A si toda vecindad de p contiene algún punto de A distinto de p . El conjunto de los puntos de acumulación de A se denota A' .

Proposición 2.16. Para todo $A \subset X$ se tiene $\overline{A} = A \cup A'$.

Demostración. Por la [proposición 2.11](#), $A' \subset \overline{A}$, luego $A \cup A' \subset \overline{A}$. Recíprocamente, si $x \in \overline{A}$ y $x \notin A$, toda vecindad de x contiene puntos de A , que necesariamente son distintos de x ; luego $x \in A'$. ■

Definición 2.17 (Convergencia). Sea X un espacio topológico. Decimos que una sucesión (x_n) en X *converge* a $x \in X$ si para toda vecindad U de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n > N$. En este caso escribimos $x_n \rightarrow x$ o $\lim x_n = x$.

En un espacio métrico esta definición coincide con la usual: $x_n \rightarrow x$ si y sólo si $d(x_n, x) \rightarrow 0$. En un espacio topológico general el límite de una sucesión no tiene por qué ser único; veremos un ejemplo en el [capítulo 6](#).

Proposición 2.18. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.*

- (a) *Si (x_n) es una sucesión en A que converge a $x \in X$, entonces $x \in \overline{A}$.*
- (b) *Si X es métrico, para todo $x \in \overline{A}$ existe una sucesión (x_n) en A con $x_n \rightarrow x$.*

Demostración. (a) Toda vecindad de x contiene los términos x_n con n grande, que están en A . (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la bola $B_{1/n}(x)$ contiene algún punto $x_n \in A$ ([proposición 1.9](#)). Entonces $d(x_n, x) < 1/n \rightarrow 0$. ■

Ejemplo 2.19. La afirmación (b) es falsa en espacios topológicos generales. Consideremos en $\mathbb{R}$ la colección $\mathcal{T}$ formada por $\emptyset$ y los complementos de los conjuntos numerables. Por las leyes de De Morgan, $\mathcal{T}$ es una topología: una intersección de conjuntos numerables es numerable y una unión finita de conjuntos numerables es numerable. Sea $A = \mathbb{R} - \{0\}$. Todo abierto no vacío es no numerable, luego interseca A ; así $0 \in \overline{A}$. Sin embargo, si (x_n) es una sucesión en A , el conjunto $U = \mathbb{R} - \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una vecindad de 0 que no contiene a ningún x_n , de modo que $x_n \not\rightarrow 0$.

Bases y construcción de topologías

Describir una topología enumerando todos sus abiertos suele ser impracticable; es más cómodo describirla mediante una familia que la genere.

3.1 Subbases

Sea X un conjunto. Si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de X , denotamos por $\bigcup \mathcal{C}$ y $\bigcap \mathcal{C}$ la unión y la intersección de los elementos de $\mathcal{C}$, con la convención $\bigcup \emptyset = \emptyset$. Un conjunto de la forma $\bigcup \mathcal{C}'$ con $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ se llama una *unión en $\mathcal{C}$* , y uno de la forma $\bigcap \mathcal{C}'$ con $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito y no vacío se llama una *intersección finita en $\mathcal{C}$* .

Sea ahora $\mathcal{S}$ una colección cualquiera de subconjuntos de X . Queremos construir la menor topología en X que contiene a $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \{X\}$ y sea $\mathcal{T}$ la colección formada por las uniones de intersecciones finitas en $\mathcal{S}^*$. Es claro que cualquier topología que contenga a $\mathcal{S}$ tiene que contener también a $\mathcal{T}$.

Proposición 3.1. *La colección $\mathcal{T}$ es una topología en X . En consecuencia, $\mathcal{T}$ es la menor topología en X que contiene a $\mathcal{S}$.*

Demostración. $\emptyset \in \mathcal{T}$ por ser la unión vacía, y $X \in \mathcal{T}$ porque $X \in \mathcal{S}^*$. Una unión de uniones de intersecciones finitas en $\mathcal{S}^*$ es, de nuevo, una unión de intersecciones finitas en $\mathcal{S}^*$. Por inducción, basta ver que la intersección de dos elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Si $U = \bigcup_{i \in I} A_i$ y $V = \bigcup_{j \in J} B_j$, donde los A_i y los B_j son intersecciones finitas en $\mathcal{S}^*$, entonces

$$U \cap V = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j),$$

y cada $A_i \cap B_j$ es una intersección finita en $\mathcal{S}^*$. Luego $U \cap V \in \mathcal{T}$. ■

Definición 3.2 (Subbase). En las condiciones anteriores decimos que $\mathcal{T}$ es la topología generada por $\mathcal{S}$ y que $\mathcal{S}$ es una *subbase* de $\mathcal{T}$.

Ejemplo 3.3. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4\}$. Las intersecciones finitas en $\mathcal{S}^*$ son X , A , B , C , $A \cap B = \{3\}$, $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \{4\}$ y $A \cap B \cap C = \emptyset$. Tomando uniones obtenemos la topología generada por $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, A, B, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

3.2 Bases

Definición 3.4 (Base). Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es una *base* si

- (I) $\bigcup \mathcal{B} = X$;
- (II) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

La topología generada por $\mathcal{B}$ se llama topología generada por la base $\mathcal{B}$, y decimos que $\mathcal{B}$ es una base de dicha topología.

Proposición 3.5. Si $\mathcal{B}$ es una base en X , la topología generada por $\mathcal{B}$ es la colección de todas las uniones en $\mathcal{B}$.

Demostración. Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ la colección de uniones en $\mathcal{B}$. Contiene a $\emptyset$ (unión vacía) y a X , por (i), y es cerrada por uniones. Si $U = \bigcup_i B_i$ y $V = \bigcup_j B'_j$ están en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_i \cap B'_j$ para ciertos i, j , y por (ii) existe $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subset B_i \cap B'_j \subset U \cap V$. Luego $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} B_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Así $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es una topología que contiene a $\mathcal{B}$, y está contenida en toda topología que contenga a $\mathcal{B}$. Por la [proposición 3.1](#), $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es la topología generada por $\mathcal{B}$. ■

Teorema 3.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Son equivalentes:

- (a) $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$;
- (b) los abiertos de X son exactamente las uniones de elementos de $\mathcal{B}$;
- (c) para todo abierto U y todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) es la proposición anterior. (b) $\Rightarrow$ (c): si $U = \bigcup_i B_i$ y $x \in U$, entonces $x \in B_i \subset U$ para algún i . (c) $\Rightarrow$ (a): como X es abierto, (c) implica $\bigcup \mathcal{B} = X$. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, como $B_1 \cap B_2$ es abierto, (c) da $B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Luego $\mathcal{B}$ es una base. Además, por (c), todo abierto U es la unión de los $B \in \mathcal{B}$ contenidos en U , de modo que $\mathcal{T}$ coincide con la topología generada por $\mathcal{B}$. ■

Ejemplo 3.7. (a) En un espacio discreto, la colección de los conjuntos unitarios $\{x\}$ es una base.

- (b) En un espacio métrico (X, d) , las bolas abiertas forman una base de la topología inducida por d ; también la forman las bolas $B_{1/n}(x)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Los intervalos abiertos forman una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.
- (d) Las bolas $B_q(c) \subset \mathbb{R}^n$ con $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ y $c \in \mathbb{Q}^n$ forman una base *numerable* de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. En efecto, si U es abierto y $x \in U$, existe $r > 0$ con $B_r(x) \subset U$; tomando $q \in \mathbb{Q}$ con $0 < q < r/2$ y $c \in \mathbb{Q}^n$ con $\|c - x\| < q$ se obtiene $x \in B_q(c) \subset B_r(x) \subset U$.

3.3 Comparación de topologías

Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son topologías en X con $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, decimos que $\mathcal{T}$ es *más gruesa* que $\mathcal{T}'$ y que $\mathcal{T}'$ es *más fina* que $\mathcal{T}$.

Proposición 3.8. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ topologías en X generadas por las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Demostración. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, cada $B \in \mathcal{B}$ es abierto en $\mathcal{T}'$ y basta aplicar el [teorema 3.6\(c\)](#) a la topología $\mathcal{T}'$. Recíprocamente, la condición dice que cada $B \in \mathcal{B}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}'$, luego $B \in \mathcal{T}'$; como todo elemento de $\mathcal{T}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$, se concluye $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. ■

Definición 3.9. Dos métricas en un conjunto X son *equivalentes* si inducen la misma topología.

Corolario 3.10. Las métricas d y d' en X son equivalentes si y sólo si para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$B_{\delta_1}^{d'}(x) \subset B_{\varepsilon}^d(x) \quad y \quad B_{\delta_2}^d(x) \subset B_{\varepsilon}^{d'}(x).$$

Demostración. Aplicar la [proposición 3.8](#) a las bases formadas por las bolas de cada métrica, observando que si $y \in B_{\varepsilon}^d(x)$, entonces $B_{\varepsilon-d(x,y)}^{d'}(y) \subset B_{\varepsilon}^d(x)$. ■

Ejemplo 3.11. En $\mathbb{R}^n$, las normas $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_2 = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$ y $\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$ satisfacen $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty}$, luego las métricas que definen son equivalentes.

3.4 La topología inducida por un orden

Sea X un conjunto con un *orden total estricto* $<$, es decir, una relación binaria tal que:

- (I) dados $x, y \in X$, se cumple exactamente una de las relaciones $x < y$, $y < x$, $x = y$;
- (II) dados $x, y, z \in X$, si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

Escribimos $x \leq y$ cuando $x < y$ o $x = y$. Es fácil verificar que $\leq$ es un orden total: es reflexivo, antisimétrico, transitivo y dos elementos cualesquiera son comparables. Decimos que $\alpha \in X$ es el *mínimo* de X si $\alpha \leq x$ para todo $x \in X$, y que $\beta \in X$ es el *máximo* de X si $x \leq \beta$ para todo $x \in X$; naturalmente, estos elementos no siempre existen. Para $a, b \in X$ usamos las notaciones

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x : a < x < b\}, & [a, b) &= \{x : a \leq x < b\}, \\ (a, b] &= \{x : a < x \leq b\}, & [a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\}, \\ (a, +\infty) &= \{x : a < x\}, & [a, +\infty) &= \{x : a \leq x\}, \\ (-\infty, b) &= \{x : x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x : x \leq b\}. \end{aligned}$$

Llamamos *intervalos abiertos* de X a los conjuntos de la forma (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ y al propio X .

Observación 3.12. Si α es el mínimo de X , entonces $[\alpha, b) = (-\infty, b)$ es un intervalo abierto; si β es el máximo de X , entonces $(a, \beta] = (a, +\infty)$ es un intervalo abierto; y si existen ambos, $[\alpha, \beta] = X$.

Proposición 3.13. La colección $\mathcal{B}$ de los intervalos abiertos de X es una base. La topología que genera se llama topología inducida por el orden.

Demostración. Como $X \in \mathcal{B}$, la condición (i) de la definición 3.4 se cumple. Cada elemento de $\mathcal{B}$ es de la forma $\{x : \lambda(x) \text{ y } v(x)\}$, donde la condición inferior $\lambda(x)$ es « $a < x$ » para algún $a \in X$ o es vacía, y la condición superior $v(x)$ es « $x < b$ » para algún $b \in X$ o es vacía. La intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ se obtiene tomando, de las dos condiciones inferiores, la más exigente (la de mayor a) y, de las dos superiores, la más exigente (la de menor b). Por lo tanto la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ es vacía o es un elemento de $\mathcal{B}$, y (ii) se cumple trivialmente. ■

Ejemplo 3.14. Para el orden usual de $\mathbb{R}$, la topología inducida por el orden coincide con la topología usual: los intervalos (a, b) son bolas, las semirrectas $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ son uniones de bolas, y toda bola es un intervalo abierto. En $\mathbb{Z}$ con el orden usual se tiene $\{n\} = (n-1, n+1)$, de modo que la topología del orden es la discreta.

3.5 La topología de un subespacio

Definición 3.15. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subset X$. La colección

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en Y , llamada *topología inducida* por X en Y . Con ella decimos que Y es un *subespacio* de X .

Que $\mathcal{T}_Y$ es una topología se sigue de las identidades $\bigcup_i (U_i \cap Y) = (\bigcup_i U_i) \cap Y$ y $\bigcap_{i=1}^k (U_i \cap Y) = (\bigcap_{i=1}^k U_i) \cap Y$. Si d es una métrica en X , la topología de subespacio en Y coincide con la inducida por la restricción de d a Y , pues las bolas de Y son las intersecciones con Y de las bolas de X centradas en puntos de Y , y si U es abierto en X e $y \in U \cap Y$, alguna de estas bolas centrada en y está contenida en $U \cap Y$.

Ejemplo 3.16. En $X = [0, 1]$, con la topología inducida por $\mathbb{R}$, los conjuntos $[0, 1/2) = (-\infty, 1/2) \cap X$ y $(1/2, 1] = (1/2, +\infty) \cap X$ son abiertos, aunque no lo son en $\mathbb{R}$.

Proposición 3.17. Sea Y un subespacio de X .

- (a) $K \subset Y$ es cerrado en Y si y sólo si $K = F \cap Y$ para algún cerrado F de X .
- (b) Si $A \subset Y$, la clausura de A en Y es $\overline{A} \cap Y$, donde $\overline{A}$ es la clausura de A en X .
- (c) Si Y es abierto en X , los abiertos de Y son exactamente los abiertos de X contenidos en Y . Análogamente, si Y es cerrado en X , los cerrados de Y son los cerrados de X contenidos en Y .
- (d) Si $\mathcal{B}$ es una base de X , entonces $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de Y .

Demostración. (a) Para $F \subset X$ se tiene $Y - (F \cap Y) = (X - F) \cap Y$. Luego, si F es cerrado en X , $F \cap Y$ es cerrado en Y . Si K es cerrado en Y , entonces $Y - K = G \cap Y$ con G abierto en X , y $K = (X - G) \cap Y$.

(b) Por (a), los cerrados de Y que contienen a A son los conjuntos $F \cap Y$ con F cerrado en X y $F \supset A$. Su intersección es $(\bigcap F) \cap Y = \overline{A} \cap Y$.

(c) Si Y es abierto y U es abierto en X , entonces $U \cap Y$ es abierto en X . El caso cerrado es análogo usando (a).

(d) Si $U \cap Y$ es abierto en Y y $x \in U \cap Y$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U$, y entonces $x \in B \cap Y \subset U \cap Y$. Se aplica el [teorema 3.6](#). ■

3.6 El producto de dos espacios

Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos y sea

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

Proposición 3.18. *La colección $\mathcal{B}$ es una base en $X_1 \times X_2$. La topología que genera se llama topología producto.*

Demostración. $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$, así que $\mathcal{B}$ cubre $X_1 \times X_2$. Si $U = A_1 \times A_2$ y $V = B_1 \times B_2$ son elementos de $\mathcal{B}$ y $x = (x_1, x_2) \in U \cap V$, entonces

$$x \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) = U \cap V,$$

y $(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{B}$. ■

Proposición 3.19. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son bases de X_1 y X_2 respectivamente, entonces $\{C \times D : C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$ es una base de la topología producto en $X_1 \times X_2$.*

Demostración. Cada $C \times D$ es abierto en $X_1 \times X_2$. Si G es abierto en $X_1 \times X_2$ y $(x, y) \in G$, existe un básico $U \times V$ con $(x, y) \in U \times V \subset G$. Como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son bases, existen $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ con $x \in C \subset U$ e $y \in D \subset V$. Entonces $(x, y) \in C \times D \subset G$, y se aplica el [teorema 3.6](#). ■

La topología producto en $X_1 \times \cdots \times X_n$ se define del mismo modo, tomando como base los productos $U_1 \times \cdots \times U_n$ de abiertos $U_i \subset X_i$; coincide con la que se obtiene aplicando reiteradamente la construcción anterior.

Ejemplo 3.20. La topología producto en $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ coincide con la topología usual. Por la [proposición 3.19](#), los productos de intervalos abiertos forman una base de la topología producto. Cada bola de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un producto de intervalos abiertos y cada producto de intervalos abiertos es unión de tales bolas; por la [proposición 3.8](#), la topología producto coincide con la inducida por $\|\cdot\|_\infty$, que es la usual ([ejemplo 3.11](#)).

Funciones continuas

4.1 Definición y caracterizaciones

Definición 4.1. Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es *continua* si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo abierto V de Y .

Por el [teorema 1.14](#), cuando X e Y son métricos esta definición coincide con la definición ε - δ .

- Ejemplo 4.2.** (a) Toda función constante $c: X \rightarrow Y$ es continua, pues $c^{-1}(V)$ es $\emptyset$ o X .
 (b) La identidad $\text{id}_X: X \rightarrow X$ es continua.
 (c) Si X es discreto, toda función $f: X \rightarrow Y$ es continua. Si Y tiene la topología trivial, toda función $f: X \rightarrow Y$ es continua.
 (d) Si $Y \subset X$ es un subespacio, la inclusión $i: Y \rightarrow X$ es continua, pues $i^{-1}(U) = U \cap Y$.

Proposición 4.3. Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son continuas, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es continua.

Demostración. $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$. ■

Proposición 4.4. Sea $f: X \rightarrow Y$ continua.

- (a) Si $A \subset X$ es un subespacio, la restricción $f|_A: A \rightarrow Y$ es continua.
 (b) Si $Z \subset Y$ es un subespacio con $f(X) \subset Z$, la función $f: X \rightarrow Z$ es continua.

Demostración. (a) $f|_A = f \circ i$, con $i: A \rightarrow X$ la inclusión. (b) Si W es abierto en Z , entonces $W = V \cap Z$ con V abierto en Y , y $f^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ porque $f(X) \subset Z$. ■

Teorema 4.5. Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$. Son equivalentes:

- (a) f es continua;
 (b) $f^{-1}(F)$ es cerrado en X para todo cerrado F de Y ;
 (c) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$;
 (d) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subset Y$.

Demostración. (a) $\Leftrightarrow$ (b) se sigue de $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$.

(b) $\Rightarrow$ (c): como $\overline{f(A)}$ es cerrado, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es un cerrado que contiene a A ; luego contiene a $\overline{A}$, es decir $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(c) $\Rightarrow$ (d): aplicando (c) a $A = f^{-1}(B)$ se obtiene $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$.

(d) $\Rightarrow$ (b): si F es cerrado, (d) da $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{F})$, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado. ■

Proposición 4.6. Sea $\mathcal{B}$ una base (o una subbase) de Y . Una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si $f^{-1}(B)$ es abierto para todo $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. Todo abierto de Y es una unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B} \cup \{Y\}$, y la preimagen conmuta con uniones e intersecciones. ■

Ejemplo 4.7. La función $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f(t) = e^{it}$, es continua. Los arcos abiertos de la circunferencia forman una base de $\mathbb{S}^1$. Si G es un arco que no contiene a 1, entonces $f^{-1}(G)$ es un intervalo abierto $(a, b) \subset (0, 2\pi)$; si G contiene a 1, entonces $f^{-1}(G) = [0, a) \cup (b, 2\pi)$, que es abierto en $[0, 2\pi)$. Sin embargo, f es biyectiva y f^{-1} no es continua en 1: los puntos $e^{-i/n}$ convergen a 1, mientras que $f^{-1}(e^{-i/n}) = 2\pi - 1/n$ no converge a 0 (véase la [proposición 4.11](#) más adelante).

Lema 4.8 (del pegamento). Sea $X = A \cup B$ con A y B cerrados en X , y sea $f: X \rightarrow Y$ tal que $f|_A$ y $f|_B$ son continuas. Entonces f es continua. Lo mismo vale si A y B son abiertos en X .

Demostración. Sea $F \subset Y$ cerrado. Entonces $f^{-1}(F) = (f|_A)^{-1}(F) \cup (f|_B)^{-1}(F)$. Cada sumando es cerrado en A o en B , y como A y B son cerrados en X , es cerrado en X ([proposición 3.17](#)). El caso abierto es análogo usando preimágenes de abiertos. ■

4.2 Continuidad en un punto y sucesiones

Definición 4.9. Una función $f: X \rightarrow Y$ es *continua en* $x \in X$ si para toda vecindad V de $f(x)$ en Y existe una vecindad U de x en X tal que $f(U) \subset V$.

Proposición 4.10. $f: X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si es continua en todo punto de X .

Demostración. Si f es continua y V es una vecindad de $f(x)$, basta tomar $U = f^{-1}(V)$. Recíprocamente, sea V abierto en Y . Para cada $x \in f^{-1}(V)$ existe una vecindad U_x de x con $f(U_x) \subset V$, es decir $U_x \subset f^{-1}(V)$. Luego $f^{-1}(V) = \bigcup_x U_x$ es abierto. ■

Proposición 4.11. Sea $f: X \rightarrow Y$ continua en $x \in X$. Entonces, para toda sucesión (x_n) en X con $x_n \rightarrow x$, se tiene $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demostración. Sea V una vecindad de $f(x)$ y U una vecindad de x con $f(U) \subset V$. Existe N tal que $x_n \in U$ para $n > N$, y entonces $f(x_n) \in V$ para $n > N$. ■

4.3 Homeomorfismos y aplicaciones abiertas

Definición 4.12. Una biyección $f: X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si f y f^{-1} son continuas. En tal caso decimos que X y Y son *homeomorfos* y escribimos $X \cong Y$.

Por la [proposición 4.3](#), la relación $\cong$ es de equivalencia. Un homeomorfismo f establece una biyección entre los abiertos de X y los de Y , de modo que dos espacios homeomorfos son indistinguibles desde el punto de vista topológico.

Ejemplo 4.13. $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a la bola $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$: la función $x \mapsto x/(1 + \|x\|)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $B_1(0)$, cuya inversa es $y \mapsto y/(1 - \|y\|)$. Componiendo con traslaciones y homotecias, $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a cualquier bola abierta de $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.14. Una función $f: X \rightarrow Y$ es *abierta* (respectivamente *cerrada*) si $f(U)$ es abierto en Y para todo abierto U de X (respectivamente, si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado F de X).

Teorema 4.15. Sea $f: X \rightarrow Y$ continua y biyectiva. Son equivalentes: f es un homeomorfismo; f es abierta; f es cerrada.

Demostración. Como f es biyectiva, para $A \subset X$ se tiene $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ y $f(X - A) = Y - f(A)$. Luego f^{-1} es continua si y sólo si f es abierta, y f es abierta si y sólo si es cerrada. ■

Definición 4.16. Una función $f: X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo local* si todo $x \in X$ posee una vecindad V_x tal que $f(V_x)$ es abierto en Y y $f|_{V_x}: V_x \rightarrow f(V_x)$ es un homeomorfismo.

Proposición 4.17. Todo homeomorfismo local es una aplicación abierta.

Demostración. Sea $U \subset X$ abierto e $y = f(x) \in f(U)$ con $x \in U$. Sea V_x como en la definición. El conjunto $U \cap V_x$ es abierto en V_x , luego $f(U \cap V_x)$ es abierto en $f(V_x)$, y como $f(V_x)$ es abierto en Y , es abierto en Y . Así $f(U \cap V_x)$ es una vecindad de y contenida en $f(U)$, y $f(U)$ es abierto. ■

Ejemplo 4.18. Recordemos que el *argumento principal* $\text{Arg}: \mathbb{C} - (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$ es continuo; por ejemplo, $\text{Arg}(x + iy) = 2 \arctan(y/(|z| + x))$ con $z = x + iy$. En consecuencia, para cada $\theta_0 \in \mathbb{R}$ la restricción de $\theta \mapsto e^{i\theta}$ al intervalo $(\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ es un homeomorfismo sobre $\mathbb{S}^1 - \{-e^{i\theta_0}\}$, con inversa $z \mapsto \theta_0 + \text{Arg}(ze^{-i\theta_0})$. Por lo tanto $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f(t) = e^{2\pi it}$, es un homeomorfismo local: su restricción a cualquier intervalo abierto de longitud 1 es un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{S}^1$. Por la proposición anterior, f es abierta.

4.4 Funciones con valores en un producto. Encajes

Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios topológicos y consideremos en $X_1 \times \dots \times X_n$ la topología producto. Las *proyecciones canónicas* $\pi_i: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, son continuas: si $U \subset X_i$ es abierto, $\pi_i^{-1}(U) = X_1 \times \dots \times U \times \dots \times X_n$ es un abierto básico.

Proposición 4.19. Sea Z un espacio topológico y $f: Z \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$, $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$. Entonces f es continua si y sólo si cada f_i es continua.

Demostración. Si f es continua, $f_i = \pi_i \circ f$ es continua. Recíprocamente, por la [proposición 4.6](#) basta ver que la preimagen de un abierto básico $U_1 \times \dots \times U_n$ es abierta, y en efecto

$$f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_n) = \{z : f_i(z) \in U_i \forall i\} = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(U_i)$$

es una intersección finita de abiertos. ■

Definición 4.20 (Encaje). Una función $f: X \rightarrow Y$ es un *encaje* (topológico) si es un homeomorfismo de X sobre el subespacio $f(X)$ de Y .

Ejemplo 4.21. (a) Si $X \subset Y$ es un subespacio, la inclusión $X \rightarrow Y$ es un encaje.

(b) La función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, es un encaje.

(c) La función del [ejemplo 4.7](#) es continua e inyectiva, pero no es un encaje.

Proposición 4.22. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces $F: X \rightarrow X \times Y$, $F(x) = (x, f(x))$, es un encaje. En particular, el gráfico de f es homeomorfo a su dominio.

Demostración. F es continua por la [proposición 4.19](#) y es inyectiva. Su inversa $F(X) \rightarrow X$ es la restricción a $F(X)$ de la proyección π_1 , que es continua. ■

La topología cociente

5.1 Particiones y levantamientos

Sea X un conjunto y sea X^* una *partición* de X , es decir, una colección $\{C_j\}_{j \in J}$ de subconjuntos no vacíos de X , dos a dos disjuntos, tales que $\bigcup_j C_j = X$. El conjunto X^* puede pensarse como el resultado de identificar en un solo punto todos los elementos de cada clase. La partición tiene asociada la *proyección canónica*

$$\rho: X \rightarrow X^*,$$

que asocia a cada $x \in X$ la clase de X^* que lo contiene. Los conjuntos $\rho^{-1}(C)$, $C \in X^*$, son precisamente los elementos de la partición. Dar una partición de X es lo mismo que dar una relación de equivalencia $\sim$ en X ; en ese caso escribimos $X/\sim$ en lugar de X^* y $[x]$ en lugar de $\rho(x)$.

Sea Y otro conjunto y $f: X^* \rightarrow Y$ una función. La función

$$\tilde{f} = f \circ \rho: X \rightarrow Y$$

se llama el *levantamiento* de f . Obviamente $\tilde{f}$ es constante en cada clase de X^* . Recíprocamente, si $g: X \rightarrow Y$ es constante en cada clase, podemos definir $f: X^* \rightarrow Y$ por $f(C) = g(x)$ para cualquier $x \in C$, y entonces $\tilde{f} = g$. Así, hay una correspondencia biyectiva entre las funciones de X^* en Y y las funciones de X en Y que son constantes en las clases de X^* .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & X^* \\ & \searrow \tilde{f}=f \circ \rho & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

5.2 La topología cociente

Cuando X es un espacio topológico, existe una topología en X^* que convierte la correspondencia anterior en una correspondencia entre las funciones *continuas* de X^* en Y y las funciones *continuas* de X en Y constantes en las clases, para cualquier espacio topológico Y .

Definición 5.1 (Topología cociente). Sea X un espacio topológico y X^* una partición de X . La *topología cociente* en X^* es

$$\mathcal{T}^* = \left\{ A \subset X^* : \bigcup A \text{ es abierto en } X \right\} = \{ A \subset X^* : \rho^{-1}(A) \text{ es abierto en } X \}.$$

El espacio $(X^*, \mathcal{T}^*)$ se llama *espacio cociente*.

Que $\mathcal{T}^*$ es una topología se sigue de $\rho^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\rho^{-1}(X^*) = X$ y de que ρ^{-1} conmuta con uniones e intersecciones. Por definición, $\rho: X \rightarrow X^*$ es continua, y $\mathcal{T}^*$ es la topología más fina en X^* con esta propiedad. Además, $C \subset X^*$ es cerrado si y sólo si $\rho^{-1}(C)$ es cerrado en X .

Proposición 5.2 (Propiedad universal). *Sea X^* un espacio cociente de X , Y un espacio topológico y $f: X^* \rightarrow Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si su levantamiento $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ es continuo.*

Demostración. Si f es continua, $\tilde{f} = f \circ \rho$ es continua por ser composición de continuas. Recíprocamente, si $\tilde{f}$ es continua y $U \subset Y$ es abierto, entonces $\rho^{-1}(f^{-1}(U)) = \tilde{f}^{-1}(U)$ es abierto en X , lo cual significa que $f^{-1}(U)$ es abierto en X^* . ■

Como toda función $g: X \rightarrow Y$ constante en las clases es el levantamiento de alguna $f: X^* \rightarrow Y$, la proposición establece una correspondencia biyectiva entre las funciones continuas de X^* en Y y las funciones continuas de X en Y constantes en las clases de X^* . Esta propiedad caracteriza a la topología cociente.

Proposición 5.3. *Sea $\mathcal{T}'$ una topología en la partición X^* y denotemos $X' = (X^*, \mathcal{T}')$. Supongamos que, para todo espacio topológico Y y toda función $f: X' \rightarrow Y$, se tiene que f es continua si y sólo si su levantamiento $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ es continuo. Entonces $\mathcal{T}'$ es la topología cociente.*

Demostración. La identidad $\text{id}: X' \rightarrow X'$ es continua, luego su levantamiento, que es la proyección $\rho: X \rightarrow X'$, es continuo. Entonces todo $U \in \mathcal{T}'$ cumple que $\rho^{-1}(U)$ es abierto en X , es decir, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}^*$.

Por otro lado, considerando en X^* la topología cociente, la proyección $\rho: X \rightarrow (X^*, \mathcal{T}^*)$ es continua. Como ρ es el levantamiento de $\text{id}: X' \rightarrow (X^*, \mathcal{T}^*)$, por hipótesis esta identidad es continua, lo cual significa que $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}'$. ■

5.3 Aplicaciones cociente

Una partición de X puede definirse mediante los conjuntos de nivel de una función sobreyectiva $f: X \rightarrow Y$, donde Y es un conjunto cualquiera: los elementos de la partición X^* son los conjuntos $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. La función $\varphi: X^* \rightarrow Y$ que hace corresponder a cada $f^{-1}(y)$ el punto y es una biyección, y $f = \varphi \circ \rho$. Si X es un espacio topológico y consideramos la topología cociente en X^* , podemos definir en Y la topología cuyos abiertos son los conjuntos $\varphi(U)$ con U abierto en X^* . Con ella φ es un homeomorfismo, de modo que Y es, esencialmente, el espacio cociente X^* . Explícitamente, $V \subset Y$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Esta topología en Y también se llama topología cociente (inducida por f).

Definición 5.4 (Aplicación cociente). Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es una *aplicación cociente* si es sobreyectiva y, para todo $V \subset Y$, V es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Equivalentemente, f es sobreyectiva y $F \subset Y$ es cerrado si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

Toda aplicación cociente es continua. Por lo dicho antes, si $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente, entonces $\varphi: X^* \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, donde X^* es la partición de X en los conjuntos de nivel de f . En particular:

Corolario 5.5. *Si $f_1: X \rightarrow Y_1$ y $f_2: X \rightarrow Y_2$ son aplicaciones cociente que definen la misma partición de X , entonces Y_1 e Y_2 son homeomorfos.*

Corolario 5.6. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X y sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación cociente cuyos conjuntos de nivel son exactamente las clases de $\sim$. Entonces $X/\sim$ es homeomorfo a Y .*

Proposición 5.7. *Sea $f: X \rightarrow Y$ sobreyectiva y continua. Si f es abierta o cerrada, entonces f es una aplicación cociente.*

Demostración. Supongamos f abierta y sea $V \subset Y$ con $f^{-1}(V)$ abierto. Como f es sobreyectiva, $V = f(f^{-1}(V))$, que es abierto. La otra implicación es la continuidad de f . El caso cerrado es análogo, usando cerrados. ■

Un subconjunto $W \subset X$ es *saturado* (respecto de una función $f: X \rightarrow Y$) si es unión de conjuntos de nivel de f , es decir, si $W = f^{-1}(f(W))$.

Proposición 5.8. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación cociente y $W \subset X$ un abierto saturado. Entonces $f(W)$ es abierto en Y y la restricción $f|_W: W \rightarrow f(W)$ es una aplicación cociente.*

Demostración. $f^{-1}(f(W)) = W$ es abierto, luego $f(W)$ es abierto. Sea $V \subset f(W)$ tal que $(f|_W)^{-1}(V)$ es abierto en W . Como $V \subset f(W)$ y W es saturado, $(f|_W)^{-1}(V) = f^{-1}(V)$, que es abierto en W y por lo tanto en X . Luego V es abierto en Y y, en particular, en $f(W)$. ■

Una aplicación cociente no tiene por qué ser abierta: en el [ejemplo 8.1](#) veremos que $t \mapsto e^{2\pi it}$, de $[0, 1]$ en $\mathbb{S}^1$, es una aplicación cociente, pero no es abierta, pues la imagen del abierto $[0, 1/2)$ de $[0, 1]$ no es abierta en $\mathbb{S}^1$.

Ejemplo 5.9 ($\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$). Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $f(t) = e^{2\pi it}$. Es continua, sobreyectiva y, por el [ejemplo 4.18](#), abierta; luego es una aplicación cociente. Dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ pertenecen al mismo conjunto de nivel $f^{-1}(u)$, $u \in \mathbb{S}^1$, si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Es decir, la partición definida por f en $\mathbb{R}$ es la de las clases laterales del subgrupo $\mathbb{Z}$. Por el [corolario 5.6](#), el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con la topología cociente, es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Espacios de Hausdorff y variedades

6.1 Un cociente en el que los límites no son únicos

Ejemplo 6.1. Para cada $c \in \mathbb{R}$ sea P_c el gráfico de la función

$$x \mapsto \frac{1}{x(1-x)} - c, \quad x \in (0, 1).$$

Las curvas P_c forman una partición de la banda $(0, 1) \times \mathbb{R}$. Si agregamos las rectas verticales $R_c = \{x = c\}$ para $c \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, obtenemos una partición de $\mathbb{R}^2$. Dotemos a esta partición de la topología cociente y denotemos por X el espacio resultante y por $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow X$ la proyección canónica.

Para $n \geq 4$ la curva P_n corta el eje $y = 0$ en los puntos $a_n = (x_n, 0)$ y $b_n = (1 - x_n, 0)$, donde $x_n = (1 - \sqrt{1 - 4/n})/2$ es la menor raíz de $x(1 - x) = 1/n$. Como $x_n \rightarrow 0$, en $\mathbb{R}^2$ se tiene $a_n \rightarrow a = (0, 0) \in R_0$ y $b_n \rightarrow b = (1, 0) \in R_1$. Por la continuidad de ρ (proposición 4.11),

$$P_n = \rho(a_n) \rightarrow \rho(a) = R_0 \quad \text{y} \quad P_n = \rho(b_n) \rightarrow \rho(b) = R_1.$$

Así, en X la sucesión (P_n) tiene dos límites distintos.

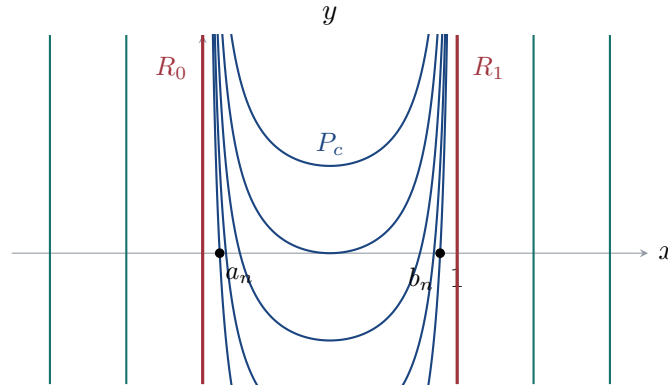


Figura 6.1: La partición de $\mathbb{R}^2$ del ejemplo 6.1. Cuando $c \rightarrow +\infty$, las curvas P_c se acercan simultáneamente a las rectas R_0 y R_1 .

6.2 Espacios de Hausdorff

Definición 6.2. Un espacio topológico X es *de Hausdorff* si para todo par de puntos distintos $a, b \in X$ existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $a \in U$ y $b \in V$.

Ejemplo 6.3. Todo espacio métrico es de Hausdorff: si $a \neq b$ y $r = d(a, b) > 0$, las bolas $B_{r/2}(a)$ y $B_{r/2}(b)$ son disjuntas por la desigualdad triangular. Un espacio con la topología trivial y al menos dos puntos no es de Hausdorff.

Proposición 6.4. Si X es de Hausdorff, el límite de una sucesión en X , si existe, es único.

Demostración. Supongamos $x_n \rightarrow a$ y $x_n \rightarrow b$ con $a \neq b$. Sean U, V vecindades disjuntas de a y b . Existen N_1, N_2 tales que $x_n \in U$ para $n > N_1$ y $x_n \in V$ para $n > N_2$. Entonces, para $n > \max\{N_1, N_2\}$, $x_n \in U \cap V = \emptyset$, lo cual es absurdo. ■

En particular, el espacio X del ejemplo 6.1 no es de Hausdorff.

Proposición 6.5. (a) En un espacio de Hausdorff todo conjunto finito es cerrado.

(b) Todo subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.

(c) El producto de dos espacios de Hausdorff es de Hausdorff.

(d) Si X es de Hausdorff e Y es homeomorfo a X , entonces Y es de Hausdorff.

Demostración. (a) Basta ver que $\{x\}$ es cerrado: si $y \neq x$, existe una vecindad de y que no contiene a x , luego $X - \{x\}$ es abierto. (b) Si U, V separan $a, b \in Y$ en X , entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ los separan en Y . (c) Si $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$, digamos $a_1 \neq b_1$, y U, V separan a_1, b_1 en X_1 , entonces $U \times X_2$ y $V \times X_2$ separan los puntos dados. (d) Si $h: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo y U, V separan $h^{-1}(a)$ y $h^{-1}(b)$, entonces $h(U)$ y $h(V)$ separan a y b . ■

Proposición 6.6. Sea X de Hausdorff, $A \subset X$ y $p \in A'$. Entonces toda vecindad de p contiene infinitos puntos de A .

Demostración. Supongamos que existe una vecindad U de p tal que $U \cap (A - \{p\}) = \{a_1, \dots, a_k\}$ es finito. Por (a) de la proposición anterior, $W = U - \{a_1, \dots, a_k\}$ es una vecindad de p , y $W \cap (A - \{p\}) = \emptyset$, lo cual contradice que $p \in A'$. ■

6.3 Variedades

Definición 6.7. Decimos que un espacio topológico tiene *base numerable* si su topología admite una base numerable.

Por el ejemplo 3.7(d), $\mathbb{R}^n$ tiene base numerable, y por la proposición 3.17(d), todo subespacio de un espacio con base numerable tiene base numerable. Junto con la proposición 6.5, esto muestra que todo subespacio de un espacio euclidiano es de Hausdorff y tiene base numerable.

Definición 6.8 (Variedad). Un espacio topológico X es *localmente euclidiano de dimensión n* si todo punto de X posee una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si X es localmente euclidiano de dimensión n , de Hausdorff y posee base numerable, decimos que X es una *variedad de dimensión n* .

Como toda bola abierta de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (ejemplo 4.13), en la definición anterior se puede pedir, de manera equivalente, que cada punto tenga una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Además, si X está cubierto por abiertos U_j cada uno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces X es localmente euclidiano de dimensión n .

Ejemplo 6.9. (a) $\mathbb{R}^n$ y todo abierto de $\mathbb{R}^n$ son variedades de dimensión n .

(b) El círculo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ es una variedad de dimensión 1. Es de Hausdorff y tiene base numerable por ser subespacio de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Dado $p = e^{i\theta_0} \in \mathbb{S}^1$, el conjunto $\mathbb{S}^1 - \{-p\}$ es una vecindad de p homeomorfa al intervalo $(\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ (ejemplo 4.18).

El ejemplo siguiente muestra que la condición de Hausdorff en la definición de variedad no es consecuencia de las otras dos.

Ejemplo 6.10 (Un espacio localmente euclidiano que no es de Hausdorff). Sea X el espacio del ejemplo 6.1. Consideremos los subconjuntos

$$U_1 = \{R_c : c \leq 0\} \cup \{P_c : c \in \mathbb{R}\}, \quad U_2 = \{R_c : c \geq 1\} \cup \{P_c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Se tiene $\rho^{-1}(U_1) = W_1 = \{(x, y) : x < 1\}$ y $\rho^{-1}(U_2) = W_2 = \{(x, y) : x > 0\}$, que son abiertos saturados; luego U_1 y U_2 son abiertos de X y $X = U_1 \cup U_2$. Probemos que U_1 es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Observemos que el punto (x, y) con $0 < x < 1$ pertenece a P_c con $c = \frac{1}{x(1-x)} - y$. Definamos $F_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_1(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \exp\left(y - \frac{1}{x(1-x)}\right), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Así, F_1 vale c sobre R_c y e^{-c} sobre P_c ; es constante en las clases. Es continua: lo es en $\{x < 0\}$ y en $\{0 < x < 1\}$, y si $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$ con $x > 0$, entonces $\frac{1}{x(1-x)} - y \rightarrow +\infty$ y $F_1(x, y) \rightarrow 0 = F_1(0, y_0)$. Por las proposiciones 5.8 y 5.2, F_1 induce una función continua $h_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$, que es biyectiva: aplica $\{R_c : c \leq 0\}$ sobre $(-\infty, 0]$ y $\{P_c\}$ sobre $(0, +\infty)$.

Para ver que h_1^{-1} es continua, construyamos una función continua $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow W_1$ que elija un punto en cada clase. Sea $\sigma(s) = (s, 0)$ para $s \leq 0$. Para $0 < s \leq e^{-4}$ ponemos $c = -\log s \geq 4$ y $\sigma(s) = (x(s), 0)$, donde $x(s) = (1 - \sqrt{1 - 4/c})/2$ es la menor raíz de $x(1-x) = 1/c$. Para $s \geq e^{-4}$ ponemos $\sigma(s) = (1/2, 4 + \log s)$. Las definiciones coinciden en $s = e^{-4}$, donde valen $(1/2, 0)$, y $x(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0^+$, de modo que σ es continua. Por construcción $\rho(\sigma(s))$ es la clase en la que F_1 vale s , es decir, $\rho \circ \sigma = h_1^{-1}$, que es por lo tanto continua. Así h_1 es un homeomorfismo.

La simetría $(x, y) \mapsto (1-x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ lleva cada P_c en sí misma y R_c en R_{1-c} , e induce un homeomorfismo de X que intercambia U_1 y U_2 . Luego U_2 también es homeomorfo a $\mathbb{R}$, y X es localmente euclidiano de dimensión 1. Además X tiene base numerable, pues la unión de bases numerables de U_1 y U_2 es una base de X . Sin embargo, por el ejemplo 6.1, X no es de Hausdorff, así que no es una variedad.

CAPÍTULO 7

Compacidad

7.1 Espacios compactos

Definición 7.1. Sea X un espacio topológico. Un *cubrimiento abierto* de X es una colección $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de abiertos de X tal que $X = \bigcup_j U_j$. Un *subcubrimiento* de $\mathcal{U}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$ que también cubre X . Decimos que X es *compacto* si todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento finito. Un subconjunto $K \subset X$ es compacto si lo es como subespacio.

Observación 7.2. Sea $Y \subset X$. Como los abiertos de Y son las intersecciones con Y de los abiertos de X , el subespacio Y es compacto si y sólo si todo cubrimiento $Y \subset \bigcup_j V_j$ por abiertos V_j de X admite un subcubrimiento finito.

Ejemplo 7.3. (a) Todo espacio finito es compacto. Más generalmente, todo espacio cuya topología es finita es compacto.

(b) $\mathbb{R}$ no es compacto: el cubrimiento $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene subcubrimiento finito. Tampoco lo es $(0, 1]$, cubierto por $\{(1/n, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$.

El teorema más importante sobre compacidad es el siguiente.

Teorema 7.4. Sea X compacto y $f: X \rightarrow Y$ continua. Entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración. Sea $\{V_j\}$ un cubrimiento de $f(X)$ por abiertos de Y . Entonces $\{f^{-1}(V_j)\}$ es un cubrimiento abierto de X , que admite un subcubrimiento finito $f^{-1}(V_{j_1}), \dots, f^{-1}(V_{j_n})$. Luego $f(X) \subset V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_n}$. ■

Proposición 7.5. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración. Sea $F \subset X$ cerrado y sea $\{V_j\}$ un cubrimiento de F por abiertos de X . Agregando el abierto $X - F$ obtenemos un cubrimiento abierto de X , que tiene un subcubrimiento finito. Quitando de él $X - F$, si aparece, queda un subcubrimiento finito de F . ■

Proposición 7.6. Sea X un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ compacto. Si $x \notin K$, existen abiertos disjuntos $U \ni x$ y $V \supset K$. En particular, todo subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración. Para cada $y \in K$ existen abiertos disjuntos $U_y \ni x$ y $V_y \ni y$. Los V_y cubren K , luego existen $y_1, \dots, y_n$ con $K \subset V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. El abierto $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ contiene a x y es disjunto de V . Así, todo punto de $X - K$ tiene una vecindad disjunta de K , y K es cerrado. ■

Corolario 7.7. *Los subespacios compactos de un espacio métrico son cerrados.*

Definición 7.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ no vacío. El *diámetro* de A es $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ si este supremo existe, y $\text{diam}(A) = +\infty$ en caso contrario. Decimos que A es *limitado* si $\text{diam}(A) < +\infty$.

Proposición 7.9. *Todo subespacio compacto K de un espacio métrico es limitado.*

Demostración. Fijemos $x_0 \in X$. Las bolas $B_n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, cubren K , luego $K \subset B_N(x_0)$ para algún N , y $\text{diam}(K) \leq 2N$. ■

7.2 Compacidad por puntos límite y por sucesiones

Definición 7.10. Decimos que un espacio topológico X es

- *compacto por puntos límite* si todo subconjunto infinito de X posee algún punto de acumulación;
- *compacto por sucesiones* si toda sucesión en X posee una subsucesión convergente.

Proposición 7.11. *Todo espacio compacto es compacto por puntos límite.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y supongamos que $A' = \emptyset$. Entonces cada $x \in X$ posee una vecindad U_x tal que $U_x \cap A \subset \{x\}$. Por compacidad, existen $x_1, \dots, x_n$ con $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$, y entonces

$$A = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap A) \subset \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Así, un conjunto sin puntos de acumulación es finito. ■

Definición 7.12. Sea X un espacio topológico y $a \in X$. Una colección $\mathcal{A}$ de vecindades de a es una *base en a* (o un sistema fundamental de vecindades de a) si para toda vecindad U de a existe $A \in \mathcal{A}$ con $A \subset U$.

Si X tiene base numerable $\mathcal{B}$, los elementos de $\mathcal{B}$ que contienen a a forman una base numerable en a . Si X es métrico, las bolas $B_{1/n}(a)$, $n \in \mathbb{N}$, forman una base numerable en a . Si $\{B_1, B_2, \dots\}$ es una base numerable en a , también lo es $\{B_1, B_1 \cap B_2, B_1 \cap B_2 \cap B_3, \dots\}$, de modo que podemos suponer que la base es decreciente.

Proposición 7.13. *Sea X un espacio de Hausdorff, compacto por puntos límite, tal que todo punto de X posee una base numerable. Entonces X es compacto por sucesiones.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en X y $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si A es finito, algún valor se repite infinitas veces y (x_n) posee una subsucesión constante. Supongamos A infinito. Entonces A posee un punto de acumulación p . Sea $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ una base decreciente

en p . Por la [proposición 6.6](#), cada B_k contiene infinitos puntos de A , luego $x_n \in B_k$ para infinitos índices n . Podemos entonces elegir índices $n_1 < n_2 < \dots$ con $x_{n_k} \in B_k$. Si W es una vecindad de p , existe K con $B_K \subset W$, y para $k \geq K$ se tiene $x_{n_k} \in B_k \subset B_K \subset W$. Luego $x_{n_k} \rightarrow p$. ■

Lema 7.14 (Lindelöf). *Sea X un espacio con base numerable. Entonces todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento numerable.*

Demostración. Sea $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ un cubrimiento abierto y $\mathcal{B}$ una base numerable de X . Sean $B_1, B_2, \dots$ los elementos de $\mathcal{B}$ que están contenidos en algún U_j . Todo $x \in X$ está en algún U_j y existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U_j$; luego $X = B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Si para cada n elegimos j_n con $B_n \subset U_{j_n}$, entonces $X = U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \dots$. ■

Proposición 7.15. *Sea X compacto por sucesiones y con base numerable. Entonces X es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X . Por el lema anterior existen $U_1, U_2, \dots$ en $\mathcal{U}$ con $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots$. Los conjuntos

$$K_j = X - (U_1 \cup \dots \cup U_j), \quad j \in \mathbb{N},$$

son cerrados y $K_1 \supset K_2 \supset \dots$. Si algún K_j es vacío, $U_1, \dots, U_j$ es un subcubrimiento finito. Supongamos que $K_j \neq \emptyset$ para todo j y elijamos $x_j \in K_j$. Existe una subsucesión $x_{j_n} \rightarrow p$. Dado $k \in \mathbb{N}$, para n grande se tiene $j_n \geq k$ y $x_{j_n} \in K_{j_n} \subset K_k$; como K_k es cerrado, $p \in K_k$ ([proposición 2.18](#)), es decir $p \notin U_k$. Como k es arbitrario, $p \notin \bigcup_k U_k = X$, lo cual es absurdo. ■

Proposición 7.16. *Todo espacio métrico compacto por sucesiones tiene base numerable. Más precisamente, para todo $r > 0$ el espacio puede cubrirse con un número finito de bolas de radio r .*

Demostración. Sea $r > 0$ y supongamos que X no puede cubrirse por finitas bolas de radio r . Tomemos $x_1 \in X$. Como $B_r(x_1) \neq X$, existe $x_2 \notin B_r(x_1)$; como $B_r(x_1) \cup B_r(x_2) \neq X$, existe $x_3 \notin B_r(x_1) \cup B_r(x_2)$, y así sucesivamente. Obtenemos una sucesión con $d(x_i, x_j) \geq r$ para $i \neq j$, que no puede tener subsucesiones convergentes: si $x_{n_k} \rightarrow p$, para $k \neq l$ grandes se tendría $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, p) + d(p, x_{n_l}) < r$. Esto contradice la hipótesis.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{B}_n$ una colección finita de bolas de radio $1/n$ que cubre X , y sea $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$, que es numerable. Probemos que $\mathcal{B}$ es base. Sea U abierto y $p \in U$, y sea $r > 0$ con $B_r(p) \subset U$. Tomemos n con $2/n < r$. Como $\mathcal{B}_n$ cubre X , existe una bola $B \in \mathcal{B}_n$ de radio $1/n$ que contiene a p , y como $\text{diam}(B) \leq 2/n < r$, se tiene $B \subset B_r(p) \subset U$. ■

Teorema 7.17. *Supongamos que X es un espacio de Hausdorff con base numerable, o que X es un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

- (a) X es compacto;
- (b) X es compacto por puntos límite;
- (c) X es compacto por sucesiones.

Demostración. Supongamos primero que X es de Hausdorff con base numerable. Las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c) y (c) $\Rightarrow$ (a) son, respectivamente, las proposiciones 7.11, 7.13 y 7.15. Supongamos ahora que X es métrico. En particular X es de Hausdorff y cada punto tiene una base numerable, así que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) se siguen de nuevo de las proposiciones 7.11 y 7.13. Si vale (c), por la [proposición 7.16](#) X tiene base numerable y, por la [proposición 7.15](#), vale (a). ■

7.3 Compactos de $\mathbb{R}^n$ y el número de Lebesgue

Teorema 7.18 (Heine-Borel). *Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y limitado.*

Demostración. Si X es compacto, es cerrado y limitado por el [corolario 7.7](#) y la [proposición 7.9](#). Recíprocamente, supongamos X cerrado y limitado. Como X es métrico, basta ver que es compacto por sucesiones. Sea (x_n) una sucesión en X . Como X es limitado, por el teorema de Bolzano-Weierstrass (x_n) posee una subsucesión que converge a un punto $a \in \mathbb{R}^n$, y $a \in X$ porque X es cerrado. ■

En particular, las bolas cerradas, las esferas $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y los cubos $[0, 1]^n$ son compactos. Sin embargo, en un espacio métrico general ser cerrado y limitado no basta.

Ejemplo 7.19. Sea X el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ con la métrica

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Sea $C = \{f \in X : |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in [0, 1]\}$. Es claro que C es limitado. Probemos que C es cerrado. Si $f \in X - C$, existe $a \in [0, 1]$ con $|f(a)| = 1 + \delta$, $\delta > 0$. Si $g \in B_\delta(f)$, entonces $|g(a) - f(a)| < \delta$, de donde $|g(a)| > |f(a)| - \delta = 1$ y $g \notin C$. Luego $B_\delta(f) \subset X - C$. Veamos que C no es compacto; como X es métrico, basta ver que C no es compacto por sucesiones. Sea $f_n(x) = x^n$. Si una subsucesión (f_{n_k}) convergiera en X a una función continua g , convergería también puntualmente a g ; pero $f_n(x) \rightarrow 0$ para $0 \leq x < 1$ y $f_n(1) = 1$, y esta función límite es discontinua.

Lema 7.20 (Número de Lebesgue). *Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X . Existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de X de diámetro menor que δ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces para cada n existe $A_n \subset X$ no vacío, con $\text{diam}(A_n) < 1/n$, no contenido en ningún elemento de $\mathcal{U}$. Elijamos $x_n \in A_n$. Por el [teorema 7.17](#), existe una subsucesión $x_{n_k} \rightarrow p$. Sea $U \in \mathcal{U}$ con $p \in U$ y $\varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(p) \subset U$. Para k grande, $d(x_{n_k}, p) < \varepsilon/2$ y $1/n_k < \varepsilon/2$, de modo que $A_{n_k} \subset B_\varepsilon(p) \subset U$, lo cual es absurdo. ■

Proposición 7.21. *Sea $f: X \rightarrow Y$ continua, con X métrico compacto e Y métrico. Entonces f es uniformemente continua: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x') < \delta$ implica $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.*

Demostración. Los abiertos $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(y))$, $y \in Y$, cubren X . Sea δ un número de Lebesgue de este cubrimiento. Si $d(x, x') < \delta$, el conjunto $\{x, x'\}$ tiene diámetro menor que δ , luego $f(x), f(x') \in B_{\varepsilon/2}(y)$ para algún y , y $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. ■

7.4 Consecuencias

Proposición 7.22. *Todo espacio cociente de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Si $\rho: X \rightarrow X^*$ es la proyección canónica, $X^* = \rho(X)$ es compacto por el [teorema 7.4](#). ■

Proposición 7.23. *Sea $f: X \rightarrow Y$ continua, con X compacto e Y de Hausdorff. Entonces f es cerrada. En consecuencia:*

- (a) *si f es biyectiva, f es un homeomorfismo;*
- (b) *si f es sobreyectiva, f es una aplicación cociente.*

Demostración. Si $F \subset X$ es cerrado, es compacto ([proposición 7.5](#)); luego $f(F)$ es compacto y, como Y es de Hausdorff, cerrado ([proposición 7.6](#)). Las consecuencias se siguen del [teorema 4.15](#) y de la [proposición 5.7](#). ■

Proposición 7.24. *Sea Y un espacio con la topología inducida por un orden total y sea $K \subset Y$ compacto y no vacío. Entonces K tiene elementos máximo y mínimo.*

Demostración. Supongamos que K no tiene máximo. Entonces para cada $x \in K$ existe $a \in K$ con $x < a$, es decir $x \in (-\infty, a)$. Así $K \subset \bigcup_{a \in K} (-\infty, a)$ y, por compacidad, existen $a_1, \dots, a_n \in K$ con $K \subset (-\infty, a_1) \cup \dots \cup (-\infty, a_n) = (-\infty, a')$, donde $a' = \max\{a_1, \dots, a_n\}$. Esto es absurdo, pues $a' \in K$. El caso del mínimo es análogo. ■

Teorema 7.25 (de los valores extremos). *Sea $f: X \rightarrow Y$ continua, donde X es compacto y no vacío e Y tiene la topología inducida por un orden total. Entonces existen $a, b \in X$ tales que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. $f(X)$ es compacto y no vacío; basta aplicar la proposición anterior. ■

Lema 7.26 (del tubo). *Sea Y compacto, X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Si N es un abierto de $X \times Y$ que contiene a $\{x_0\} \times Y$, existe una vecindad W de x_0 tal que $W \times Y \subset N$.*

Demostración. Para cada $y \in Y$ existe un abierto básico $U_y \times V_y$ con $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset N$. Los V_y cubren Y , luego existen $y_1, \dots, y_k$ con $Y = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_k}$. Sea $W = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_k}$. Entonces $W \times Y \subset \bigcup_i U_{y_i} \times V_{y_i} \subset N$. ■

Teorema 7.27. *El producto de un número finito de espacios compactos, con la topología producto, es compacto.*

Demostración. Por inducción basta considerar dos espacios compactos X e Y . Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de $X \times Y$. Para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y , luego compacto, y está cubierto por finitos elementos $A_1, \dots, A_m$ de $\mathcal{A}$. Por el lema del tubo, existe una vecindad W_x de x con $W_x \times Y \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$. Por compacidad de X , finitos $W_{x_1}, \dots, W_{x_r}$ cubren X , y entonces $X \times Y$ queda cubierto por los finitos elementos de $\mathcal{A}$ elegidos para $x_1, \dots, x_r$. ■

El producto de una familia arbitraria de espacios compactos también es compacto (teorema de Tychonoff); lo enunciaremos en el [capítulo 10](#).

Espacios cociente clásicos

En todos los ejemplos de este capítulo se usa la misma estrategia: para probar que $X/\sim$ es homeomorfo a un espacio Y , se construye una función $f: X \rightarrow Y$ continua y sobreyectiva cuyos conjuntos de nivel son exactamente las clases de $\sim$, y se verifica que f es una aplicación cociente ([corolario 5.6](#)). Cuando X es compacto e Y es de Hausdorff, esto último es automático ([proposición 7.23](#)).

8.1 El círculo

Ejemplo 8.1 ($[0, 1]/\{0 \sim 1\} \cong \mathbb{S}^1$). Consideremos en $[0, 1]$ la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff x = y \text{ o } \{x, y\} = \{0, 1\}.$$

El cociente $[0, 1]/\sim$ es el resultado de identificar 0 y 1 en el intervalo. La función $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, $g(t) = e^{2\pi it}$, es continua y sobreyectiva, y $g(s) = g(t)$ si y sólo si $s \sim t$. Como $[0, 1]$ es compacto y $\mathbb{S}^1$ es de Hausdorff, g es una aplicación cociente, y por lo tanto $[0, 1]/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Equivalentemente, la función $f: [0, 1]/\sim \rightarrow \mathbb{S}^1$ inducida por g es continua ([proposición 5.2](#)) y biyectiva, y su inversa es continua porque f lleva cerrados en cerrados: si F es cerrado en $[0, 1]/\sim$, entonces $\rho^{-1}(F)$ es cerrado, y por lo tanto compacto, en $[0, 1]$, de modo que $f(F) = g(\rho^{-1}(F))$ es compacto y, en consecuencia, cerrado en $\mathbb{S}^1$.

8.2 El disco y la esfera

Ejemplo 8.2 (Coordenadas polares). Sea $\Delta = [0, 1] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ y consideremos en Δ la relación de equivalencia generada por las identificaciones

- (I) $(0, \theta) \sim (0, \theta')$ para cualesquiera $\theta, \theta' \in [0, 2\pi]$;
- (II) $(r, 0) \sim (r, 2\pi)$ para todo $r \in (0, 1]$.

Probemos que $\Delta/\sim$ es homeomorfo al disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Sea $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \mathbb{D}$, $\tilde{f}(r, \theta) = re^{i\theta}$. Es continua y sobreyectiva, y $\tilde{f}(r, \theta) = \tilde{f}(r', \theta')$ si y sólo si $r = r' = 0$, o bien $r = r' > 0$ y $\theta = \theta'$ o $\{\theta, \theta'\} = \{0, 2\pi\}$; es decir, si y sólo si $(r, \theta) \sim (r', \theta')$. Como Δ es compacto y $\mathbb{D}$ es de Hausdorff, $\tilde{f}$ es una aplicación cociente y $\Delta/\sim \cong \mathbb{D}$.

Ejemplo 8.3 ($\mathbb{D}/\partial\mathbb{D} \cong \mathbb{S}^2$). Consideremos en $\mathbb{D}$ la relación de equivalencia $\sim$ que identifica entre sí todos los puntos del borde $\partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$. Probemos que $\mathbb{D}/\sim$ es homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Para $(r, \theta) \in \Delta$ definamos

$$F(r, \theta) = (\sin(\pi r) \cos \theta, \sin(\pi r) \sin \theta, \cos(\pi r)) \in \mathbb{S}^2.$$

F es continua y constante en las clases de la relación del ejemplo anterior, de modo que induce una función continua $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{S}^2$ con $G(re^{i\theta}) = F(r, \theta)$. Como $(\pi r, \theta)$ recorre todas

las coordenadas esféricas, G es sobreyectiva. G lleva el centro de $\mathbb{D}$ al polo norte $(0, 0, 1)$ y todo el borde $\partial\mathbb{D}$ al polo sur $(0, 0, -1)$. Además G es inyectiva en el interior de $\mathbb{D}$: si $0 \leq r < 1$, el par $(\sin \pi r, \cos \pi r)$ determina r , y si además $r > 0$, entonces $\sin \pi r > 0$ y las dos primeras coordenadas determinan θ módulo 2π . Así, los conjuntos de nivel de G son exactamente las clases de $\sim$. Como $\mathbb{D}$ es compacto y $\mathbb{S}^2$ es de Hausdorff, G es una aplicación cociente y $\mathbb{D}/\sim \cong \mathbb{S}^2$.

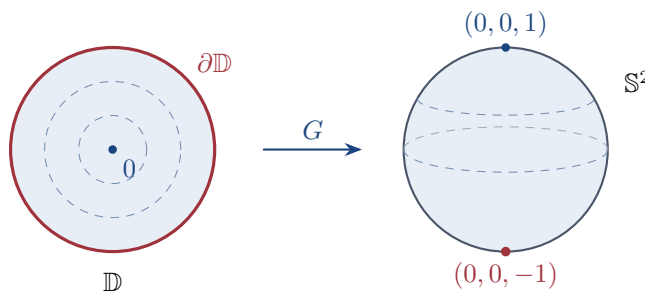


Figura 8.1: La función G del ejemplo 8.3: las circunferencias $|z| = r$ del disco van a los paralelos de la esfera y todo el borde $\partial\mathbb{D}$ se colapsa en el polo sur.

8.3 El toro

Ejemplo 8.4 ($\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$). Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Dados $p, q \in \mathbb{R}^2$, se tiene $f(p) = f(q)$ si y sólo si $p - q \in \mathbb{Z}^2$. Esto muestra que la partición definida por f en $\mathbb{R}^2$ es la de las clases laterales del subgrupo $\mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^2$, es decir, el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Mostremos que, con la topología cociente, este espacio es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$; para ello basta ver que f es una aplicación cociente, es decir, que $C \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es cerrado si y sólo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$. La continuidad de f garantiza que $f^{-1}(C)$ es cerrado si C lo es. Recíprocamente, supongamos que $A = f^{-1}(C)$ es cerrado y sea $\Delta = [0, 1] \times [0, 1]$. Mostremos que $C = f(A \cap \Delta)$. Si $p \in C$, digamos $p = f(x, y)$ con $(x, y) \in A$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $(x', y') = (x - m, y - n) \in \Delta$. Entonces $f(x', y') = f(x, y) = p \in C$, luego $(x', y') \in A$ y $p \in f(A \cap \Delta)$. Como $A \cap \Delta$ es compacto, $C = f(A \cap \Delta)$ es compacto y, por lo tanto, cerrado en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

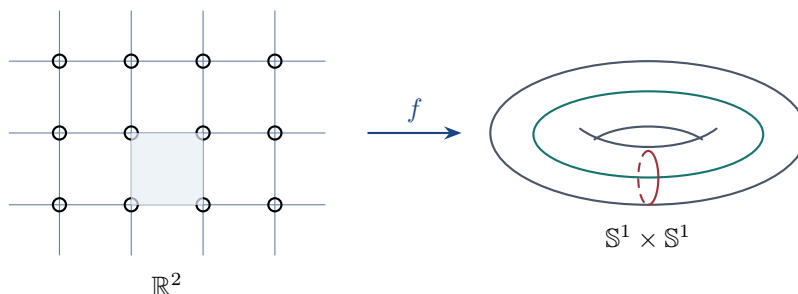


Figura 8.2: La aplicación cociente $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ identifica los puntos que difieren en un vector de $\mathbb{Z}^2$. Cualquier cuadrado unitario, como el sombreado, contiene representantes de todas las clases.

Ejemplo 8.5 (El toro como cuadrado con lados identificados). Sea $\Delta = [0, 1] \times [0, 1]$ y $\sim$ la relación de equivalencia en Δ generada por

$$(I) \quad (x, 0) \sim (x, 1) \text{ para todo } x \in [0, 1];$$

$$(II) \quad (0, y) \sim (1, y) \text{ para todo } y \in [0, 1].$$

En particular, los cuatro vértices forman una sola clase. La restricción a Δ de la función f del ejemplo anterior es continua y sobreyectiva, y sus conjuntos de nivel son las clases de $\sim$. Como Δ es compacto y el toro es de Hausdorff, $\Delta/\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 8.6 (El toro de revolución). Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie obtenida al rotar alrededor del eje z la circunferencia $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$:

$$T = \{((2 + \cos \beta) \sin \alpha, (2 + \cos \beta) \cos \alpha, \sin \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

La función $\tilde{f}: \Delta \rightarrow T$,

$$\tilde{f}(x, y) = ((2 + \cos 2\pi y) \sin 2\pi x, (2 + \cos 2\pi y) \cos 2\pi x, \sin 2\pi y),$$

es continua y sobreyectiva. Si $\tilde{f}(x, y) = (u, v, w)$, entonces $2 + \cos 2\pi y = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $\sin 2\pi y = w$ determinan $e^{2\pi i y}$, y como $2 + \cos 2\pi y > 0$, el par (u, v) determina $e^{2\pi i x}$. Luego los conjuntos de nivel de $\tilde{f}$ son las clases del ejemplo anterior, y $T \cong \Delta/\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Proposición 8.7. Si M es una variedad de dimensión m y N es una variedad de dimensión n , entonces $M \times N$ es una variedad de dimensión $m + n$.

Demostración. $M \times N$ es de Hausdorff por la [proposición 6.5](#). Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases numerables de M y N , entonces $\{B \times B'\}$ es una base numerable de $M \times N$ ([proposición 3.19](#)). Si $(p, q) \in M \times N$ y $U \ni p$, $V \ni q$ son abiertos homeomorfos a abiertos $U' \subset \mathbb{R}^m$, $V' \subset \mathbb{R}^n$, entonces $U \times V$ es una vecindad de (p, q) homeomorfa al abierto $U' \times V'$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ ([proposición 4.19](#)). ■

En particular, el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una variedad de dimensión 2.

Ejemplo 8.8 (Las esferas). La esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad de dimensión n . Es de Hausdorff y tiene base numerable por ser subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$. Escribiendo $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, la esfera está cubierta por los abiertos

$$U_j^+ = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j > 0\}, \quad U_j^- = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j < 0\}, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad (8.1)$$

y cada uno de ellos es homeomorfo a la bola abierta $B = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| < 1\}$: la proyección que omite la coordenada x_j es continua de $U_j^\pm$ en B , y su inversa $u \mapsto (u_1, \dots, u_{j-1}, \pm\sqrt{1 - \|u\|^2}, u_j, \dots, u_n)$ es continua.

8.4 Espacios proyectivos

Definición 8.9. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{RP}^n$ el conjunto de los subespacios vectoriales de dimensión 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea

$$\rho: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n, \quad \rho(x) = \mathbb{R}x,$$

que asocia a cada $x \neq 0$ la recta que genera. La aplicación ρ es sobreyectiva. El conjunto $\mathbb{RP}^n$ con la topología cociente inducida por ρ es el *espacio proyectivo real* de dimensión n . Análogamente, el *espacio proyectivo complejo* $\mathbb{CP}^n$ es el conjunto de los subespacios complejos de dimensión 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$, con la topología cociente inducida por $\rho: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$, $\rho(z) = \mathbb{C}z$.

Para estudiar $\mathbb{RP}^n$ es útil presentarlo como cociente de la esfera. Sea $f = \rho|_{\mathbb{S}^n}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, que es continua y sobreyectiva.

Proposición 8.10. *La función $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ es abierta. En consecuencia, f es una aplicación cociente y $\mathbb{RP}^n$ es homeomorfo al cociente de $\mathbb{S}^n$ que identifica cada punto x con su antípoda $-x$.*

Demostración. Sea $U \subset \mathbb{S}^n$ abierto. El conjunto $f(U)$ está formado por las rectas que intersecan U , y es abierto en $\mathbb{RP}^n$ si y sólo si

$$\tilde{U} = \rho^{-1}(f(U)) = \{x \neq 0 : x/\|x\| \in U \text{ o } -x/\|x\| \in U\} = \nu^{-1}(U) \cup \nu^{-1}(-U)$$

es abierto en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, donde $\nu(x) = x/\|x\|$. Como ν es continua y la aplicación antipodal $x \mapsto -x$ es un homeomorfismo de $\mathbb{S}^n$, el conjunto $\tilde{U}$ es abierto. Luego f es abierta y, por la [proposición 5.7](#), es una aplicación cociente. Sus conjuntos de nivel son los pares $\{x, -x\}$. ■

Proposición 8.11. *Sea $f: X \rightarrow Y$ continua, sobreyectiva y abierta. Si X tiene base numerable, entonces Y también.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X . La colección $\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es numerable y está formada por abiertos de Y . Si $V \subset Y$ es abierto e $y \in V$, tomemos x con $f(x) = y$ y $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset f^{-1}(V)$. Entonces $y \in f(B) \subset V$. ■

Teorema 8.12. *$\mathbb{RP}^n$ es una variedad compacta de dimensión n .*

Demostración. $\mathbb{RP}^n = f(\mathbb{S}^n)$ es compacto, y por la proposición anterior tiene base numerable.

$\mathbb{RP}^n$ es localmente euclidiano. Sea U uno de los abiertos $U_j^\pm$ de (8.1). Si $x \in U$, entonces $-x \notin U$; luego la restricción $g = f|_U$, que es continua, es una biyección de U sobre $f(U)$. Como f es abierta, $f(U)$ es abierto y g es abierta, de modo que g es un homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Así, $f(U)$ es un abierto de $\mathbb{RP}^n$ homeomorfo a la bola $B \subset \mathbb{R}^n$. Como los $U_j^\pm$ cubren $\mathbb{S}^n$, los $f(U_j^\pm)$ cubren $\mathbb{RP}^n$.

$\mathbb{RP}^n$ es de Hausdorff. Sean $\alpha \neq \beta$ en $\mathbb{RP}^n$, digamos $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$ con $a, b \in \mathbb{S}^n$, $b \neq a$ y $b \neq -a$. Sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{\|a - b\|, \|a + b\|\}$ y consideremos los abiertos $V = B_\varepsilon(a) \cap \mathbb{S}^n$ y $W = B_\varepsilon(b) \cap \mathbb{S}^n$. Si $w \in W \cap V$, entonces $\|a - b\| \leq \|a - w\| + \|w - b\| < 2\varepsilon$, y si $w \in W \cap (-V)$, entonces $\|a + b\| \leq \|a + w\| + \|w - b\| < 2\varepsilon$; ambos casos son imposibles. Luego W es disjunto de $V \cup (-V) = f^{-1}(f(V))$, y $f(V)$, $f(W)$ son vecindades disjuntas de α y β . ■

Ejemplo 8.13. Las variedades $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{RP}^n$ son compactas: son homeomorfas a cocientes de espacios compactos (ejemplos 8.1, 8.3, 8.5 y la [proposición 8.10](#)). También $\mathbb{CP}^n$ es compacto: identificando $\mathbb{C}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^{2n+2}$, se tiene $\mathbb{CP}^n = \rho(\mathbb{S}^{2n+1})$, pues toda recta compleja contiene vectores de norma 1.

Ejemplo 8.14 ($\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$). La función $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $g(z) = z^2$, es continua y sobreyectiva, y $g(z) = g(w)$ si y sólo si $w = \pm z$. Como $\mathbb{S}^1$ es compacto y de Hausdorff, g es una aplicación cociente que define en $\mathbb{S}^1$ la misma partición que $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$. Por el [corolario 5.5](#), $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 8.15 (El plano proyectivo como disco). Sea $\mathbb{S}^2_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \leq 0\}$ y consideremos en $\mathbb{S}^2_-$ la relación de equivalencia que identifica cada punto $(x, y, 0)$ del ecuador con su antípoda $(-x, -y, 0)$. Toda recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen corta $\mathbb{S}^2_-$, en un solo punto si no es horizontal y en dos puntos antípodas del ecuador si lo es. Así, la restricción $f|_{\mathbb{S}^2_-} : \mathbb{S}^2_- \rightarrow \mathbb{RP}^2$ es continua, sobreyectiva y sus conjuntos de nivel son las clases de la relación; por compacidad es una aplicación cociente, y $\mathbb{S}^2_-/\sim \cong \mathbb{RP}^2$. Por otro lado, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{S}^2_-$ sobre $\mathbb{D}$ que lleva el ecuador en $\partial\mathbb{D}$ y, sobre el ecuador, conmuta con la aplicación antipodal. Concluimos que $\mathbb{RP}^2$ es homeomorfo al cociente de $\mathbb{D}$ que identifica cada $w \in \partial\mathbb{D}$ con $-w$.

8.5 La cinta de Möbius y la adjunción

Definición 8.16 (Cinta de Möbius). Sea $\Delta = [0, 1] \times [-1, 1]$. La *cinta de Möbius* M es el cociente de Δ obtenido al identificar $(0, y)$ con $(1, -y)$ para cada $y \in [-1, 1]$. Su *borde* ∂M es la imagen de $[0, 1] \times \{-1, 1\}$, que es homeomorfa a una circunferencia (se recorre dando dos vueltas a lo largo de la cinta).

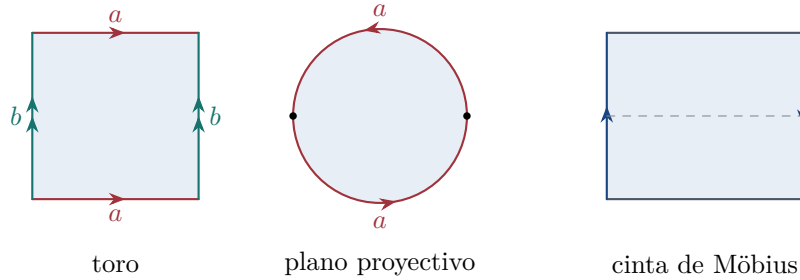


Figura 8.3: Identificaciones que definen el toro ([ejemplo 8.5](#)), el plano proyectivo ([ejemplo 8.15](#)) y la cinta de Möbius ([definición 8.16](#)). Se identifican los lados con la misma etiqueta respetando el sentido de las flechas.

El pegado de dos espacios a lo largo de una función es un procedimiento general para construir nuevos espacios topológicos.

Definición 8.17 (Adjunción). Sean X e Y espacios topológicos. En la unión disjunta $X \sqcup Y$ consideramos la topología en la que U es abierto si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en Y . Sea $A \subset X$ cerrado y $f: A \rightarrow Y$ continua. La *adjunción* de X a Y mediante f , denotada $X \cup_f Y$, es el cociente de $X \sqcup Y$ que identifica cada $a \in A$ con $f(a) \in Y$.

Proposición 8.18. El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ se obtiene pegando un disco cerrado con una cinta de Möbius a lo largo de sus bordes: $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{D} \cup_h M$ para cierto homeomorfismo $h: \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial M$.

Demostración. Sea $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ la aplicación cociente y descompongamos $\mathbb{S}^2$ en la banda $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : |z| \leq 1/2\}$ y los casquetes $C_{\pm} = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \pm z \geq 1/2\}$. La aplicación antipodal intercambia C_+ y C_- y preserva E . Luego $\mathbb{RP}^2 = f(C_+) \cup f(E)$ y $f(C_+) \cap f(E) = f(\{z = 1/2\})$.

La restricción $f|_{C_+}$ es inyectiva, y como C_+ es compacto y $\mathbb{RP}^2$ es de Hausdorff, es un homeomorfismo sobre $D' = f(C_+)$; además C_+ es homeomorfo a un disco cerrado por la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Para la banda, sea $\phi: [0, \pi] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow E$,

$$\phi(\theta, t) = (\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t).$$

Todo par de puntos antípodas de E tiene un representante en la imagen de ϕ , y $f \circ \phi(\theta, t) = f \circ \phi(\theta', t')$ con $(\theta, t) \neq (\theta', t')$ ocurre sólo si $\{\theta, \theta'\} = \{0, \pi\}$ y $t' = -t$. Por compacidad, $f \circ \phi$ es una aplicación cociente sobre $M' = f(E)$ con las identificaciones de la cinta de Möbius, de modo que $M' \cong M$, y su borde es $f(\{z = \pm 1/2\}) = f(\{z = 1/2\})$.

Finalmente, la función $\mathbb{D} \sqcup M \rightarrow \mathbb{RP}^2$ dada por estos dos homeomorfismos sobre D' y M' es continua, sobreyectiva, y sólo identifica cada punto de $\partial \mathbb{D}$ con el punto correspondiente de ∂M . Como $\mathbb{D} \sqcup M$ es compacto y $\mathbb{RP}^2$ es de Hausdorff, es una aplicación cociente, y se obtiene el homeomorfismo del enunciado. ■

Conexidad

9.1 Espacios conexos

Definición 9.1. Sea X un espacio topológico. Una *escisión* de X es una descomposición $X = A \cup B$ donde A y B son abiertos disjuntos. La escisión es *trivial* si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Decimos que X es *conexo* si no admite escisiones no triviales. Un subconjunto $Y \subset X$ es conexo si lo es como subespacio.

Si $X = A \cup B$ es una escisión, $A = X - B$ y $B = X - A$ son a la vez abiertos y cerrados. Así, X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X .

Teorema 9.2. Sea X conexo y $f: X \rightarrow Y$ continua. Entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración. Sea $f(X) = A \cup B$ una escisión. Entonces $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ es una escisión de X , luego $f^{-1}(A)$ o $f^{-1}(B)$ es vacío. Como $A, B \subset f(X)$, se sigue que A o B es vacío. ■

Corolario 9.3. Sea X conexo e Y un espacio discreto. Toda función continua $f: X \rightarrow Y$ es constante. En particular, si $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y toma valores en $\mathbb{Z}$, entonces g es constante.

Demostración. Si $y = f(x_0)$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es abierto y cerrado, pues $\{y\}$ es abierto y cerrado en Y , y no es vacío. Luego $f^{-1}(y) = X$. Para la segunda afirmación, g es continua como función de X en el subespacio $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, que es discreto. ■

Proposición 9.4. Sea $A \subset X$ conexo y $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es conexo. En otras palabras, si a un conjunto conexo se le agregan algunos de sus puntos de acumulación, se obtiene un conjunto conexo.

Demostración. Sea $B = U \cup V$ una escisión de B . Entonces $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$ es una escisión de A , luego $U \cap A$ o $V \cap A$ es vacío; digamos $U \cap A = \emptyset$. Entonces U es vacío: si existiera $p \in U$, como U es abierto en B y $p \in B \subset \overline{A}$, U contendría puntos de A (proposición 2.11 y proposición 3.17(b)). ■

Proposición 9.5. Sea $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia de subespacios conexos de X con un punto en común. Entonces $A = \bigcup_j A_j$ es conexo.

Demostración. Sea $A = U \cup V$ una escisión y $p \in \bigcap_j A_j$; digamos $p \in U$. Para cada j , $A_j = (U \cap A_j) \cup (V \cap A_j)$ es una escisión de A_j , y como $p \in U \cap A_j \neq \emptyset$, se tiene $V \cap A_j = \emptyset$. Luego A es disjunto de V , es decir $V = \emptyset$. ■

9.2 Los conexos de la recta

Un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un *intervalo* si tiene la siguiente propiedad:

$$a, b \in I, a < x < b \implies x \in I. \quad (9.1)$$

Teorema 9.6. *Todo intervalo de $\mathbb{R}$ es conexo.*

Demostración. Sea I un intervalo y supongamos que $I = U \cup V$ es una escisión no trivial. Tomemos $a \in U$ y $b \in V$; podemos suponer $a < b$. Por (9.1), $[a, b] \subset I$, y los conjuntos $U' = U \cap [a, b]$, $V' = V \cap [a, b]$ son abiertos disjuntos de $[a, b]$ que lo cubren. Sea $c = \sup U'$, que existe porque $a \in U'$ y $U' \subset [a, b]$. Si $c \in U'$, entonces $c < b$ (pues $b \in V'$), y como U' es abierto en $[a, b]$, existe $\varepsilon > 0$ con $[c, c + \varepsilon) \subset U'$, lo cual contradice que $c = \sup U'$. Si $c \in V'$, entonces $c > a$, y como V' es abierto en $[a, b]$, existe $\varepsilon > 0$ con $(c - \varepsilon, c] \subset V'$; como $U' \subset [a, c]$ es disjunto de $(c - \varepsilon, c]$, se tiene $U' \subset [a, c - \varepsilon]$, de nuevo contradiciendo que $c = \sup U'$. ■

Teorema 9.7. *Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Demostración. Por el teorema anterior basta probar que todo conexo $X \subset \mathbb{R}$ satisface (9.1). Si $a, b \in X$, $a < c < b$ y $c \notin X$, entonces

$$X = ((-\infty, c) \cap X) \cup ((c, +\infty) \cap X)$$

sería una escisión no trivial de X . ■

Teorema 9.8 (del valor intermedio). *Sea X conexo y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $a < b$ son valores de f , entonces todo c con $a < c < b$ es también valor de f .*

Demostración. $f(X)$ es conexo, luego es un intervalo. ■

El teorema 9.7 y su demostración valen en un espacio Y con la topología inducida por un orden total en el siguiente sentido: todo conexo $X \subset Y$ satisface (9.1), y por lo tanto el teorema del valor intermedio vale para funciones continuas $f: Z \rightarrow Y$ con Z conexo. La recíproca, en cambio, puede fallar: $\{0, 1\}$ satisface (9.1) en $\mathbb{Z}$, pero no es conexo, pues $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ es una escisión.

9.3 Productos de espacios conexos

Teorema 9.9. *El producto de un número finito de espacios conexos, con la topología producto, es conexo.*

Demostración. Por inducción, basta considerar dos espacios conexos X e Y . Para $x \in X$ e $y \in Y$, los conjuntos $\{x\} \times Y$ y $X \times \{y\}$ son homeomorfos a Y y a X respectivamente, luego son conexos: la aplicación $y \mapsto (x, y)$ es continua por la proposición 4.19 y su inversa es la restricción de la proyección π_2 ; el caso de $X \times \{y\}$ es análogo. Fijemos $b \in Y$. Para cada $x \in X$, el conjunto

$$C_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$$

es conexo por la proposición 9.5, pues los dos conexos que lo forman se cortan en (x, b) . Los conjuntos C_x , $x \in X$, tienen en común todo $X \times \{b\}$, así que, de nuevo por la proposición 9.5, $X \times Y = \bigcup_{x \in X} C_x$ es conexo. ■

9.4 Conexidad por caminos

Definición 9.10. Un *camino* en X es una función continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$; decimos que γ conecta $\gamma(0)$ con $\gamma(1)$. Un espacio X es *conexo por caminos* si para cualesquiera $a, b \in X$ existe un camino que conecta a con b .

Proposición 9.11. *Todo espacio conexo por caminos es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X = A \cup B$ es una escisión no trivial. Tomemos $a \in A$, $b \in B$ y un camino γ que conecte a con b . Entonces $[0, 1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$ es una escisión no trivial de $[0, 1]$, lo cual contradice el [teorema 9.6](#). ■

Proposición 9.12. *Si X es conexo por caminos y $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo por caminos.*

Demostración. Si γ conecta a con b en X , entonces $f \circ \gamma$ conecta $f(a)$ con $f(b)$ en $f(X)$. ■

Ejemplo 9.13. (a) Todo subconjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por caminos: $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ conecta a con b en X . En particular, las bolas y el propio $\mathbb{R}^n$ son conexos.

(b) Si $n \geq 1$, el conjunto $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ es conexo por caminos. Dados $a, b \neq 0$, como $n+1 \geq 2$ existe $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ que no está en las rectas $\mathbb{R}a$ ni $\mathbb{R}b$. Los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$ no pasan por el origen, y recorrerlos sucesivamente define un camino de a a b en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, continuo por el [lema 4.8](#).

(c) Si $n \geq 1$, la esfera $\mathbb{S}^n$ es conexa por caminos, pues es la imagen de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ por la función continua $x \mapsto x/\|x\|$.

(d) $\mathbb{R}P^n$ es conexo por caminos, pues es la imagen de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ por la proyección canónica. Lo mismo ocurre con $\mathbb{C}P^n$.

(e) Si X e Y son conexos por caminos, $X \times Y$ también lo es: si α conecta a con a' y β conecta b con b' , entonces $t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$ conecta (a, b) con (a', b') . En particular, el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es conexo por caminos.

La recíproca de la [proposición 9.11](#) es falsa.

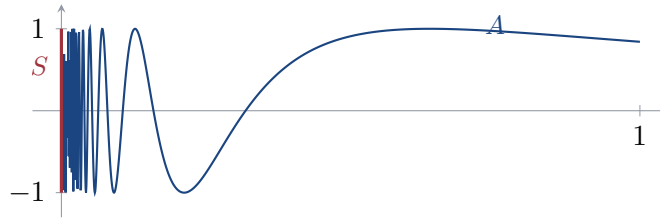


Figura 9.1: La curva seno del topólogo $\overline{A} = A \cup S$ es conexa pero no es conexa por caminos.

Ejemplo 9.14 (La curva seno del topólogo). Sea $A = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Como A es la imagen del intervalo $(0, 1]$ por una función continua, A es conexo, y por la [proposición 9.4](#) también lo es su clausura

$$\overline{A} = A \cup S, \quad S = \{0\} \times [-1, 1].$$

Sin embargo, $\overline{A}$ no es conexo por caminos. Supongamos que $\gamma = (x, y): [0, 1] \rightarrow \overline{A}$ es un camino con $\gamma(0) = (0, 0)$ y $\gamma(1) = (1, \sin 1)$. Sea $t_0 = \sup \gamma^{-1}(S)$. Como S es cerrado, $\gamma(t_0) \in S$, de modo que $x(t_0) = 0$ y $t_0 < 1$; además $\gamma(t) \in A$ para $t > t_0$, es decir, $x(t) > 0$ e $y(t) = \sin(1/x(t))$. Por continuidad, existe $\delta \in (0, 1 - t_0]$ tal que $|y(t) - y(t_0)| < 1/2$ para $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Por el teorema del valor intermedio, $x([t_0, t_0 + \delta]) \supset [0, x(t_0 + \delta)]$, y este intervalo contiene puntos de la forma $1/(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ y $1/(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, en los que $\sin(1/x)$ vale 1 y -1 . Luego y toma los valores 1 y -1 en $[t_0, t_0 + \delta]$, lo cual es imposible, pues entonces $2 = |1 - (-1)| \leq |1 - y(t_0)| + |y(t_0) + 1| < 1$.

CAPÍTULO 10

Productos arbitrarios

10.1 La topología producto

Definición 10.1. Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia arbitraria de conjuntos y $X = \prod_j X_j$. El *producto cartesiano* de los X_j es

$$\prod_{j \in J} X_j = \{f: J \rightarrow X : f(j) \in X_j \text{ para todo } j \in J\}.$$

Si $f \in \prod_j X_j$ y escribimos $x_j = f(j)$, denotamos $f = (x_j)_{j \in J}$. Cuando $X_j = X$ para todo j , escribimos X^J en lugar de $\prod_j X_j$; es el conjunto de todas las funciones de J en X . Para cada $k \in J$, la *proyección* $\pi_k: \prod_j X_j \rightarrow X_k$ es $\pi_k(f) = f(k)$.

Si cada X_j es un espacio topológico, la *topología producto* en $\prod_j X_j$ es la que tiene como base los conjuntos de la forma

$$U = \prod_{j \in J} U_j, \quad (10.1)$$

donde cada U_j es abierto en X_j y $U_j = X_j$ salvo para un conjunto finito de índices j . Estos conjuntos forman efectivamente una base: cubren el producto, y la intersección de dos de ellos, $\prod_j (U_j \cap V_j)$, es otro de la misma forma, porque $U_j \cap V_j = X_j$ salvo para finitos j . Los llamaremos *abiertos básicos* o *canónicos*.

Proposición 10.2. La topología producto es la menor topología en $\prod_j X_j$ que hace continuas a todas las proyecciones π_j .

Demostración. Si $U \subset X_k$ es abierto, $\pi_k^{-1}(U)$ es el abierto básico con $U_k = U$ y $U_j = X_j$ para $j \neq k$; luego las proyecciones son continuas. Recíprocamente, en toda topología que haga continuas a las proyecciones son abiertos los conjuntos $\pi_j^{-1}(U_j)$ y sus intersecciones finitas

$$\pi_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}(U_{j_n}) = \{f : f(j_1) \in U_{j_1}, \dots, f(j_n) \in U_{j_n}\},$$

que son precisamente los abiertos básicos (10.1). ■

Sea Y un espacio topológico y $g: Y \rightarrow \prod_j X_j$. Para cada $y \in Y$ podemos escribir $g(y) = (g_j(y))_{j \in J}$; las funciones $g_j = \pi_j \circ g: Y \rightarrow X_j$ son las *funciones coordenadas* de g , y escribimos $g = (g_j)_{j \in J}$.

Teorema 10.3. Sea $g: Y \rightarrow \prod_j X_j$. Entonces g es continua si y sólo si cada función coordenada g_j es continua.

Demostración. Si g es continua, $g_j = \pi_j \circ g$ es continua. Recíprocamente, por la [proposición 4.6](#) basta ver que la preimagen de un abierto básico $U = \prod_j U_j$ es abierta. Si $U_j = X_j$ para $j \notin \{j_1, \dots, j_n\}$, entonces

$$g^{-1}(U) = g_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \dots \cap g_{j_n}^{-1}(U_{j_n}),$$

que es abierto. ■

Ejemplo 10.4 (El espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Los elementos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones de números reales $x = (x_1, x_2, \dots)$. Una base de la topología producto está formada por los conjuntos $\prod_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, donde cada $\Omega_j \subset \mathbb{R}$ es abierto y $\Omega_j = \mathbb{R}$ salvo para finitos índices. Por el teorema anterior, una función $f = (f_1, f_2, \dots): Y \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es continua si y sólo si cada $f_j: Y \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Proposición 10.5. El producto de una familia arbitraria de espacios conexos es conexo.

Demostración. Sea $P = \prod_j X_j$ con cada X_j conexo y fijemos $a = (a_j) \in P$. Para cada subconjunto finito $F \subset J$, sea X_F el conjunto de los $x \in P$ con $x_j = a_j$ para $j \notin F$. El subespacio X_F es homeomorfo a $\prod_{j \in F} X_j$, que es conexo por el [teorema 9.9](#), y contiene a a . Por la [proposición 9.5](#), $Z = \bigcup_F X_F$ es conexo. Además Z es denso en P : todo abierto básico no vacío $\prod_j U_j$, con $U_j = X_j$ fuera de un conjunto finito F , contiene el punto de X_F cuyas coordenadas en F se eligen en los U_j . Por la [proposición 9.4](#), $P = \overline{Z}$ es conexo. ■

La compacidad también se preserva por productos arbitrarios. Omitimos la demostración, que usa el axioma de elección; puede verse en [6, §37].

Teorema 10.6 (Tychonoff). El producto de una familia arbitraria de espacios compactos, con la topología producto, es compacto.

10.2 Convergencia en la topología producto

Definición 10.7. Sea X un espacio topológico y J un conjunto. Decimos que una sucesión de funciones $f_n: J \rightarrow X$ converge puntualmente a $f: J \rightarrow X$ si $f_n(j) \rightarrow f(j)$ para todo $j \in J$.

Proposición 10.8. Sea X un espacio topológico, J un conjunto y $f_n, f \in X^J$. Entonces $f_n \rightarrow f$ en la topología producto si y sólo si (f_n) converge puntualmente a f .

Demostración. Supongamos $f_n \rightarrow f$ en X^J y fijemos $j_0 \in J$. Como π_{j_0} es continua, $f_n(j_0) = \pi_{j_0}(f_n) \rightarrow \pi_{j_0}(f) = f(j_0)$ ([proposición 4.11](#)).

Recíprocamente, supongamos que $f_n(j) \rightarrow f(j)$ para todo j . Sea $U = \prod_j U_j$ una vecindad básica de f , con $U_j = X$ para $j \notin \{j_1, \dots, j_k\}$. Como $f(j_i) \in U_{j_i}$ y $f_n(j_i) \rightarrow f(j_i)$, existe N_i tal que $f_n(j_i) \in U_{j_i}$ para $n > N_i$. Tomando $N = \max_i N_i$, para $n > N$ se tiene $f_n(j) \in U_j$ para todo j , es decir, $f_n \in U$. ■

Por esta razón la topología producto en X^J también se llama *topología de la convergencia puntual*.

10.3 Métricas limitadas y metrizabilidad de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Definición 10.9. Sea (X, d) un espacio métrico. La *métrica limitada canónica* asociada a d es

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \quad x, y \in X.$$

Proposición 10.10. $\bar{d}$ es una métrica en X que induce la misma topología que d .

Demostración. Sólo la desigualdad triangular requiere atención. Si $d(x, y) \geq 1$ o $d(y, z) \geq 1$, el miembro derecho de $\bar{d}(x, z) \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$ es al menos $1 \geq \bar{d}(x, z)$. En caso contrario, $\bar{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$. Por otro lado, las bolas de radio menor que 1 en la métrica $\bar{d}$ son las mismas que en la métrica d , y estas bolas forman una base de ambas topologías. ■

Así, dos métricas equivalentes pueden no tener los mismos conjuntos limitados: con la métrica $\bar{d}$, todo $\mathbb{R}$ es limitado. En particular, en un espacio métrico general, un conjunto cerrado y limitado no tiene por qué ser compacto.

Teorema 10.11. El espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, con la topología producto, es metrizable. Si $\bar{d}(s, t) = \min\{|s - t|, 1\}$ para $s, t \in \mathbb{R}$, una métrica que induce la topología producto es

$$D(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{\bar{d}(x_j, y_j)}{j}, \quad x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Demostración. El supremo existe porque cada término está acotado por 1. Las dos primeras propiedades de métrica son inmediatas, y para la desigualdad triangular basta observar que, para cada j ,

$$\frac{\bar{d}(x_j, z_j)}{j} \leq \frac{\bar{d}(x_j, y_j)}{j} + \frac{\bar{d}(y_j, z_j)}{j} \leq D(x, y) + D(y, z).$$

Sea $\mathcal{T}_D$ la topología inducida por D y $\mathcal{B}$ la base canónica de la topología producto.

La topología producto está contenida en $\mathcal{T}_D$. Por la [proposición 3.8](#), basta probar que dados $U \in \mathcal{B}$ y $p \in U$ existe una bola de D centrada en p contenida en U . Escribamos $U = U_1 \times \cdots \times U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$, donde $U_1, \dots, U_n \subset \mathbb{R}$ son vecindades de $p_1, \dots, p_n$. Tomemos $0 < r < 1/n$ tal que

$$B_r(p_1) \subset U_1, \quad B_{2r}(p_2) \subset U_2, \quad \dots, \quad B_{nr}(p_n) \subset U_n,$$

y sea x en la bola de radio r de D centrada en p . Entonces $\bar{d}(x_j, p_j) < jr < 1$ para $j = 1, \dots, n$, de donde $|x_j - p_j| < jr$ y $x_j \in U_j$. Por lo tanto $x \in U$.

$\mathcal{T}_D$ está contenida en la topología producto. Sea B la bola de radio r de D centrada en p y tomemos $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < r$. Consideremos

$$U = B_r(p_1) \times \cdots \times B_r(p_n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \in \mathcal{B},$$

que contiene a p . Si $x \in U$, para $j \leq n$ se tiene $\bar{d}(x_j, p_j)/j \leq |x_j - p_j| < r$, y para $j > n$ se tiene $\bar{d}(x_j, p_j)/j \leq 1/j \leq 1/(n+1)$. Luego $D(x, p) \leq \max\{\max_{j \leq n} |x_j - p_j|, 1/(n+1)\} < r$ y $x \in B$. Así, toda bola de D contiene un abierto básico que contiene a su centro. Como toda bola de D contiene una bola de D centrada en cada uno de sus puntos, la [proposición 3.8](#) muestra que $\mathcal{T}_D$ está contenida en la topología producto. ■

10.4 Bases locales y un producto no metrizable

Recordemos (definición 7.12) que una colección $\mathcal{A}$ de vecindades de $a \in X$ es una base en a si toda vecindad de a contiene algún elemento de $\mathcal{A}$. Si X es metrizable, cada $a \in X$ posee una base numerable: las bolas $B_{1/n}(a)$, $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{B}$ es una base de X y a tiene alguna base numerable $\{A_n\}$, entonces también tiene una base numerable formada por elementos de $\mathcal{B}$: para cada n elegimos $B_n \in \mathcal{B}$ con $a \in B_n \subset A_n$.

Proposición 10.12. *Si J no es numerable, el espacio $\mathbb{R}^J$ con la topología producto no es metrizable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^J$. Por lo dicho antes, basta probar que ninguna subcolección numerable de $\mathcal{B}$ es base en $0 \in \mathbb{R}^J$. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ numerable formada por vecindades de 0. Para cada $U = \prod_j U_j \in \mathcal{A}$, el conjunto $E_U = \{j \in J : U_j \neq \mathbb{R}\}$ es finito. Como $\bigcup_{U \in \mathcal{A}} E_U$ es numerable y J no lo es, existe $k \in J$ tal que $k \notin E_U$ para todo $U \in \mathcal{A}$. Sea $V = \prod_j V_j \in \mathcal{B}$ con $V_k = (-1, 1)$ y $V_j = \mathbb{R}$ para $j \neq k$. Entonces V es una vecindad de 0 que no contiene a ningún elemento de $\mathcal{A}$: si $U \subset V$ con $U \in \mathcal{A}$, tendríamos $\mathbb{R} = U_k \subset V_k = (-1, 1)$. Luego $\mathcal{A}$ no es base en 0. ■

Axiomas de separación y metrización

11.1 Espacios regulares y normales

Definición 11.1. Sea X un espacio de Hausdorff.

- (a) X es *regular* si, dados $a \in X$ y un cerrado $A \subset X$ con $a \notin A$, existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $a \in U$ y $A \subset V$.
- (b) X es *normal* si, dados cerrados disjuntos $A, B \subset X$, existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Como en un espacio de Hausdorff los puntos son cerrados ([proposición 6.5](#)), todo espacio normal es regular.

Proposición 11.2. Sea X un espacio de Hausdorff.

- (a) X es regular si y sólo si para todo abierto U y todo $x \in U$ existe una vecindad V de x con $\overline{V} \subset U$. Equivalentemente, si A es cerrado y $x \notin A$, existe una vecindad V de x con $\overline{V} \cap A = \emptyset$.
- (b) X es normal si y sólo si para todo cerrado A y todo abierto $U \supset A$ existe un abierto V con $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Demostración. (a) Supongamos X regular y sean U abierto, $x \in U$. Como $A = X - U$ es cerrado y $x \notin A$, existen abiertos disjuntos $V \ni x$ y $W \supset A$. Entonces $V \subset X - W$, que es cerrado, luego $\overline{V} \subset X - W \subset X - A = U$. Recíprocamente, dados $x \notin A$ con A cerrado, tomemos $V \ni x$ con $\overline{V} \subset X - A$; entonces V y $X - \overline{V}$ son abiertos disjuntos que separan x de A . (b) Se prueba del mismo modo, reemplazando el punto x por el cerrado A . ■

11.2 Los espacios métricos son normales

Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $A \subset X$ no vacío, definimos

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Lema 11.3. Para todos $x, y \in X$ y $A \subset X$ no vacío,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

En particular, la función $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$, es continua. Además, $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{A}$.

Demostración. Para todo $a \in A$, $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Tomando ínfimo en a obtenemos $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, y por simetría se obtiene la desigualdad. Finalmente, $d(x, A) = 0$ si y sólo si toda bola centrada en x contiene puntos de A , es decir, si y sólo si $x \in \bar{A}$ (proposición 1.9). ■

Proposición 11.4 (Lema de Urysohn, caso métrico). *Sea X un espacio métrico y sean $A, B \subset X$ cerrados disjuntos no vacíos. Entonces existe $f: X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.*

Demostración. Definamos

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

El denominador nunca se anula: si $d(x, A) = d(x, B) = 0$, el lema anterior daría $x \in \bar{A} \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$. Luego f está bien definida y es continua, toma valores en $[0, 1]$, vale 0 en A y 1 en B . ■

Corolario 11.5. *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Con f como en la proposición anterior, los abiertos $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son disjuntos y contienen a A y a B , respectivamente. Si A o B es vacío, la conclusión es trivial. ■

11.3 Regular con base numerable implica normal

Proposición 11.6. *Todo espacio regular con base numerable es normal.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X y sean A, B cerrados disjuntos. Dado $x \in A$, por la proposición 11.2 existe una vecindad V de x con $\bar{V} \cap B = \emptyset$, y tomando $U \in \mathcal{B}$ con $x \in U \subset V$ se tiene $\bar{U} \cap B = \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ es numerable, obtenemos abiertos $U_1, U_2, \dots$ que cubren A y cuyas clausuras son disjuntas de B . Del mismo modo obtenemos abiertos $V_1, V_2, \dots$ que cubren B y cuyas clausuras son disjuntas de A . Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$U'_n = U_n - (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_n), \quad V'_n = V_n - (\bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_n),$$

que son abiertos. Como cada $\bar{V}_j$ es disjunto de A , los U'_n siguen cubriendo A , de modo que $U' = \bigcup_n U'_n$ es un abierto que contiene a A ; análogamente $V' = \bigcup_n V'_n$ es un abierto que contiene a B . Resta ver que $U' \cap V' = \emptyset$. Supongamos que $x \in U'_m \cap V'_n$, digamos $m \leq n$. Entonces $x \in U_m \subset \bar{U}_m$, mientras que $x \in V'_n$ implica $x \notin \bar{U}_m$, lo cual es absurdo. El caso $m > n$ es análogo. ■

11.4 El lema de Urysohn

Teorema 11.7 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal y sean $A, B \subset X$ cerrados disjuntos. Existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$.*

Demostración. Sea D el conjunto de los racionales diádicos $k/2^n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Paso 1: una familia de abiertos indexada por D . Construiremos abiertos U_r , $r \in D$, tales que

$$r < s \implies \bar{U}_r \subset U_s, \quad (11.1)$$

con $A \subset U_0$ y $U_1 = X - B$. Ponemos $U_r = \emptyset$ para $r < 0$ y $U_r = X$ para $r > 1$. Sea $U_1 = X - B$, que es un abierto que contiene a A ; por la [proposición 11.2\(b\)](#) existe un abierto U_0 con $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$. Supongamos definidos los U_r para los diádicos $r \in [0, 1]$ de la forma $k/2^n$ con $n \leq N$, cumpliendo (11.1). Si $r = k/2^{N+1}$ con k impar y $0 < r < 1$, sus vecinos $r^- = (k-1)/2^{N+1}$ y $r^+ = (k+1)/2^{N+1}$ ya tienen definidos $U_{r^\pm}$ y $\overline{U_{r^-}} \subset U_{r^+}$; aplicando de nuevo la [proposición 11.2\(b\)](#), elegimos un abierto U_r con

$$\overline{U_{r^-}} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_{r^+}.$$

Es inmediato verificar que la familia extendida sigue cumpliendo (11.1). Por inducción, quedan definidos todos los U_r , $r \in D$.

Paso 2: la función. Para $x \in X$ definimos

$$f(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\}.$$

Como $x \in U_r$ para todo $r > 1$ y $x \notin U_r$ para $r < 0$, se tiene $f(x) \in [0, 1]$. Si $x \in A$, entonces $x \in U_0$ y $f(x) = 0$. Si $x \in B$, entonces $x \notin U_1$, y por (11.1) $x \notin U_r$ para $r \leq 1$, luego $f(x) = 1$.

Paso 3: dos propiedades. Sea $r \in D$.

- (I) Si $x \in \overline{U_r}$, entonces $f(x) \leq r$: para todo $s \in D$ con $s > r$ se tiene $x \in \overline{U_r} \subset U_s$, luego $f(x) \leq s$, y como D es denso en $\mathbb{R}$, $f(x) \leq r$.
- (II) Si $x \notin U_r$, entonces $f(x) \geq r$: si $s \in D$ y $x \in U_s$, necesariamente $s > r$, pues si $s < r$ tendríamos $x \in U_s \subset U_r$.

Paso 4: continuidad. Sea $x_0 \in X$ y (c, d) un intervalo que contiene a $f(x_0)$. Tomemos $p, q \in D$ con $c < p < f(x_0) < q < d$ y sea $U = U_q - \overline{U_p}$. Por (ii), $f(x_0) < q$ implica $x_0 \in U_q$, y por (i), $f(x_0) > p$ implica $x_0 \notin \overline{U_p}$; luego U es una vecindad de x_0 . Si $x \in U$, entonces $x \in U_q \subset \overline{U_q}$ y, por (i), $f(x) \leq q < d$; y $x \notin \overline{U_p} \supset U_p$, luego, por (ii), $f(x) \geq p > c$. Así $f(U) \subset (c, d)$ y f es continua en x_0 . ■

11.5 El teorema de metrización de Urysohn

Recordemos que un espacio es metrizable si su topología es inducida por alguna métrica ([definición 2.3](#)). Si $f: X \rightarrow Y$ es un encaje en un espacio métrico (Y, d) , entonces X es metrizable: la métrica $\tilde{d}(x, x') = d(f(x), f(x'))$ induce en X la topología que hace de $f: X \rightarrow f(X)$ un homeomorfismo, es decir, la topología de X .

Teorema 11.8 (Metrización de Urysohn). *Todo espacio regular con base numerable es metrizable.*

Demostración. Sea X regular con base numerable $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$. Por la [proposición 11.6](#), X es normal. La idea es construir un encaje de X en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, que es metrizable por el [teorema 10.11](#).

Paso 1. Mostremos que existe una colección numerable $f_1, f_2, \dots$ de funciones continuas de X en $[0, 1]$ con la siguiente propiedad:

$$\text{si } a \in U \text{ con } U \text{ abierto, existe } j \text{ tal que } f_j(a) > 0 \text{ y } f_j(x) = 0 \text{ para todo } x \notin U. \quad (11.2)$$

Para cada par (m, n) con $\overline{B_m} \subset B_n$, el lema de Urysohn aplicado a los cerrados disjuntos $X - B_n$ y $\overline{B_m}$ da una función continua $g_{mn}: X \rightarrow [0, 1]$ que vale 1 en $\overline{B_m}$ y 0 fuera de B_n . Estas funciones forman una colección numerable, que enumeramos como $f_1, f_2, \dots$. Sean ahora U abierto y $a \in U$. Existe $B_n \in \mathcal{B}$ con $a \in B_n \subset U$. Como X es regular, existe una vecindad V de a con $\overline{V} \subset B_n$, y existe $B_m \in \mathcal{B}$ con $a \in B_m \subset V$, de modo que $\overline{B_m} \subset B_n$. La función g_{mn} , que es alguna de las f_j , satisface $g_{mn}(a) = 1 > 0$ y $g_{mn} = 0$ fuera de B_n , y en particular fuera de U .

Paso 2. Sea $F = (f_1, f_2, \dots): X \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, que es continua por el [teorema 10.3](#). Probemos que F es un encaje. Es inyectiva: si $x \neq y$, el abierto $U = X - \{y\}$ contiene a x , y por [\(11.2\)](#) existe j con $f_j(x) > 0 = f_j(y)$. Veamos que F es abierta sobre su imagen $Z = F(X)$. Sea $U \subset X$ abierto y $z_0 \in F(U)$, digamos $z_0 = F(a)$ con $a \in U$. Por [\(11.2\)](#), existe j con $f_j(a) > 0$ y $f_j = 0$ fuera de U . El conjunto

$$W = Z \cap \pi_j^{-1}((0, +\infty))$$

es abierto en Z y contiene a z_0 . Si $z \in W$, entonces $z = F(x)$ con $f_j(x) = \pi_j(z) > 0$, luego $x \in U$ y $z \in F(U)$. Así $W \subset F(U)$, y $F(U)$ es abierto en Z . Por lo tanto $F: X \rightarrow Z$ es un homeomorfismo y X es metrizable. ■

CAPÍTULO 12

Espacios métricos completos

12.1 Sucesiones de Cauchy y completitud

Definición 12.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión (x_n) en X es *de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para cualesquiera $m, n > N$. El espacio X es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X .

Toda sucesión convergente es de Cauchy: si $x_n \rightarrow a$, entonces $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n)$. El ejemplo más importante de espacio métrico completo es $\mathbb{R}$, cuya completitud se deduce del axioma del supremo. A partir de aquí se prueba que $\mathbb{R}^n$ es completo: si (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, cada sucesión de coordenadas es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y la convergencia coordenada a coordenada equivale a la convergencia en $\mathbb{R}^n$.

Lema 12.2. Si una sucesión de Cauchy (x_n) posee una subsucesión convergente a a , entonces $x_n \rightarrow a$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existe N_1 con $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ para $m, n > N_1$, y existe N_2 con $d(x_{n_j}, a) < \varepsilon/2$ para $j > N_2$. Tomemos $k > N_2$ con $n_k > N_1$. Para $m > N_1$,

$$d(x_m, a) \leq d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Proposición 12.3. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) Si X es completo y $A \subset X$ es cerrado, entonces A es completo.
- (b) Si $A \subset X$ es completo, entonces A es cerrado en X . En particular, si X es completo, un subconjunto $A \subset X$ es completo si y sólo si es cerrado.
- (c) Si X es compacto, entonces X es completo.

Demostración. (a) Si (x_n) es de Cauchy en A , lo es en X , luego $x_n \rightarrow a \in X$, y $a \in A$ porque A es cerrado (proposición 2.18).

(b) Sea $x \in \overline{A}$. Por la proposición 2.18, existe una sucesión (a_n) en A con $a_n \rightarrow x$. Esta sucesión es de Cauchy, luego converge a algún punto de A , que por la unicidad del límite es x . Así $x \in A$.

(c) Si (x_n) es de Cauchy, como X es métrico y compacto, es compacto por sucesiones (teorema 7.17), y (x_n) tiene una subsucesión convergente. Por el lema anterior, (x_n) converge. ■

Ejercicio 12.4. Pruebe que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, con la métrica D del teorema 10.11, es completo.

Solución. Sea $(x^{(n)})$ una sucesión de Cauchy para D . Para cada j fijo, $\bar{d}(x_j^{(n)}, x_j^{(m)}) \leq jD(x^{(n)}, x^{(m)})$, así que $(x_j^{(n)})_n$ es de Cauchy para $\bar{d}$ y, como $\bar{d}$ coincide con $|\cdot|$ para distancias menores que 1, también es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Luego $x_j^{(n)} \rightarrow x_j$ para cada j . Por la [proposición 10.8](#), $x^{(n)} \rightarrow x = (x_j)$ en la topología producto, que es la topología de D . ■

12.2 Espacios totalmente limitados

Hemos visto que un espacio métrico puede tener subespacios cerrados y limitados que no son compactos ([ejemplo 7.19](#)); veremos en el [capítulo 13](#) que ese espacio es completo, de modo que existen espacios métricos completos y limitados que no son compactos. La noción adecuada, más fuerte que la limitación, es la siguiente.

Definición 12.5. Un espacio métrico (X, d) es *totalmente limitado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de bolas de radio ε que cubren X . Un subconjunto de X es totalmente limitado si lo es con la métrica inducida, es decir, con bolas centradas en puntos del subconjunto.

Todo espacio métrico compacto es totalmente limitado: basta extraer un subcubrimiento finito del cubrimiento $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$. Todo espacio totalmente limitado es limitado, pero la recíproca es falsa: $\mathbb{R}$ con la métrica $\bar{d}$ es limitado y no es totalmente limitado.

Teorema 12.6. *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente limitado.*

Demostración. Ya vimos que un espacio métrico compacto es completo y totalmente limitado. Recíprocamente, sea X completo y totalmente limitado. Como X es métrico, basta ver que es compacto por sucesiones, y como es completo, basta encontrar, para cada sucesión (x_n) , una subsucesión de Cauchy.

Como X puede cubrirse con finitas bolas de radio 1, existe un conjunto infinito $N_1 \subset \mathbb{N}$ y una bola B_1 de radio 1 tales que $x_n \in B_1$ para todo $n \in N_1$. Como X puede cubrirse por finitas bolas de radio $1/2$, existe un conjunto infinito $N_2 \subset N_1$ y una bola B_2 de radio $1/2$ tales que $x_n \in B_2$ para todo $n \in N_2$. Procediendo de esta manera obtenemos conjuntos infinitos $N_1 \supset N_2 \supset \dots$ y bolas B_k de radio $1/k$ tales que $x_n \in B_k$ para todo $n \in N_k$. Elijamos $n_1 < n_2 < \dots$ con $n_k \in N_k$. Probemos que (x_{n_k}) es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, sea k con $2/k < \varepsilon$. Si $i, j \geq k$, entonces $n_i \in N_i \subset N_k$ y $n_j \in N_k$, de modo que $x_{n_i}, x_{n_j} \in B_k$ y $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < 2/k < \varepsilon$. ■

Lema 12.7. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ totalmente limitado. Entonces $\bar{A}$ es totalmente limitado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es totalmente limitado, existen $a_1, \dots, a_k \in A$ con $A \subset \bigcup_i B_{\varepsilon/2}(a_i)$. Si $p \in \bar{A}$, existe $q \in A$ con $d(p, q) < \varepsilon/2$, y existe i con $q \in B_{\varepsilon/2}(a_i)$. Entonces $d(p, a_i) \leq d(p, q) + d(q, a_i) < \varepsilon$. Luego $\bar{A} \subset \bigcup_i B_\varepsilon(a_i)$, y los centros a_i están en $\bar{A}$. ■

Corolario 12.8. *Sea X un espacio métrico completo y $A \subset X$ totalmente limitado. Entonces $\bar{A}$ es compacto.*

Demostración. $\bar{A}$ es completo por ser cerrado en un espacio completo, y es totalmente limitado por el lema anterior. ■

La topología uniforme

Cuando $X = \mathbb{R}^J$, los elementos de X son funciones $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ y las sucesiones en X son sucesiones de funciones. Vimos en la [proposición 10.8](#) que la convergencia en la topología producto es la convergencia puntual. Esta noción es débil: el límite puntual de funciones continuas puede ser discontinuo (por ejemplo, x^n en $[0, 1]$), y si $f_n \rightarrow f$ puntualmente no se cumple necesariamente que $\int f_n \rightarrow \int f$. Por ejemplo, $f_n = n \mathbf{1}_{(0, 1/n)}$ converge puntualmente a 0 en $[0, 1]$, mientras que $\int_0^1 f_n = 1$ para todo n . A continuación definimos una topología en Y^X cuya noción de convergencia es la convergencia uniforme.

13.1 La métrica uniforme

Definición 13.1. Sea X un conjunto y (Y, d) un espacio métrico. Una sucesión de funciones $f_n: X \rightarrow Y$ converge uniformemente a $f: X \rightarrow Y$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y todo $n > N$.

Definición 13.2. Sea (Y, d) un espacio métrico y $\bar{d} = \min\{d, 1\}$ la métrica limitada canónica. Para $f, g \in Y^X$ definimos

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup_{x \in X} \bar{d}(f(x), g(x)).$$

El supremo existe porque $\bar{d} \leq 1$, y $\bar{\rho}$ es una métrica en Y^X : la desigualdad triangular se obtiene tomando supremo en $\bar{d}(f(x), h(x)) \leq \bar{d}(f(x), g(x)) + \bar{d}(g(x), h(x)) \leq \bar{\rho}(f, g) + \bar{\rho}(g, h)$. Se llama *métrica uniforme* asociada a d , y la topología que define en Y^X se llama *topología uniforme*.

Proposición 13.3. Sea (Y, d) un espacio métrico y $f_n, f \in Y^X$. Entonces $f_n \rightarrow f$ en la métrica $\bar{\rho}$ si y sólo si (f_n) converge uniformemente a f .

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < 1$. Para funciones f, g , la desigualdad $\bar{\rho}(f, g) < \varepsilon$ implica $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo x , pues $\bar{d}(f(x), g(x)) < \varepsilon < 1$ fuerza $\bar{d} = d$ en ese punto; recíprocamente, si $d(f(x), g(x)) < \varepsilon/2$ para todo x , entonces $\bar{\rho}(f, g) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Como en ambas definiciones de convergencia basta considerar $\varepsilon < 1$, se obtiene la equivalencia. ■

13.2 Completitud

Proposición 13.4. Sea (Y, d) un espacio métrico completo y X un conjunto. Entonces $(Y^X, \bar{\rho})$ es completo.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $(Y^X, \bar{\rho})$. Para cada $x \in X$,

$$\bar{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m),$$

de modo que $(f_n(x))$ es de Cauchy para $\bar{d}$, y por lo tanto para d . Como Y es completo, existe $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Probemos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Sea $0 < \varepsilon < 1$ y N tal que $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ para $m, n > N$. Entonces $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/2$ para todo x y todos $m, n > N$. Haciendo $m \rightarrow \infty$ se obtiene $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y todo $n > N$. ■

Sea (Y, d) un espacio métrico. Denotamos

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f \in Y^X : f(X) \text{ es limitado}\},$$

y, si X es un espacio topológico,

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f \in Y^X : f \text{ es continua}\}.$$

Lema 13.5. *Sea (Y, d) un espacio métrico y $f_n, f: X \rightarrow Y$ tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente.*

(a) *Si cada f_n es limitada, f es limitada.*

(b) *Si X es un espacio topológico y cada f_n es continua, f es continua.*

Demostración. (a) Existe N tal que $d(f_N(x), f(x)) < 1$ para todo $x \in X$. Si $\ell = \text{diam } f_N(X) < \infty$, entonces para $a, b \in X$,

$$d(f(a), f(b)) \leq d(f(a), f_N(a)) + d(f_N(a), f_N(b)) + d(f_N(b), f(b)) < 2 + \ell.$$

(b) Sean $a \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe N con $d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon/3$ para todo x . Como f_N es continua en a , existe una vecindad U de a con $d(f_N(x), f_N(a)) < \varepsilon/3$ para $x \in U$. Entonces, para $x \in U$,

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Proposición 13.6. *Sea (Y, d) un espacio métrico completo.*

(a) *$\mathcal{B}(X, Y)$ es completo con la métrica $\bar{\rho}$.*

(b) *Si X es un espacio topológico, $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con la métrica $\bar{\rho}$.*

Demostración. Como Y^X es completo, basta ver que $\mathcal{B}(X, Y)$ y $\mathcal{C}(X, Y)$ son cerrados en Y^X (proposición 12.3). Si $f \in \overline{\mathcal{B}(X, Y)}$, existe una sucesión (f_n) en $\mathcal{B}(X, Y)$ con $f_n \rightarrow f$ en $\bar{\rho}$, es decir, uniformemente, y por el lema anterior $f \in \mathcal{B}(X, Y)$. El caso de $\mathcal{C}(X, Y)$ es análogo. ■

En particular, $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ con la métrica del ejemplo 7.19 es completo (esa métrica y $\bar{\rho}$ definen las mismas sucesiones convergentes y las mismas sucesiones de Cauchy). Por el teorema 12.6, la bola cerrada de ese ejemplo, que es completa y no compacta, no es totalmente limitada.

13.3 Comparación con la topología producto

Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces $f_n \rightarrow f$ puntualmente. De hecho, la topología uniforme en Y^X es más fina que la topología producto: si $U = \{g : g(x_i) \in U_i, i = 1, \dots, k\}$ es un abierto básico de la topología producto y $f \in U$, tomando $0 < \varepsilon < 1$ con $B_\varepsilon(f(x_i)) \subset U_i$ para todo i , la bola de radio ε de $\bar{\rho}$ centrada en f está contenida en U . El ejemplo siguiente muestra que, en general, las dos topologías son distintas.

Ejemplo 13.7. Sea $X = [0, 1]^{\mathbb{R}}$ el conjunto de todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. La demostración de la [proposición 10.12](#) muestra, con cambios evidentes (reemplazando $\mathbb{R}$ por $[0, 1]$ en la definición de los conjuntos E_U y tomando $V_k = [0, \frac{1}{2})$), que X con la topología producto no es metrizable; en cambio, la topología uniforme es metrizable por definición. Otra diferencia: con la topología producto, X es compacto por el [teorema 10.6](#); con la topología uniforme no lo es. En efecto, para $t \in \mathbb{R}$ sea f_t la función indicadora de $\{t\}$. Si $s \neq t$, entonces $\bar{\rho}(f_s, f_t) = 1$, de modo que ninguna sucesión (f_{t_n}) con los t_n distintos tiene subsucesiones de Cauchy, y en particular ninguna tiene subsucesiones convergentes.

Equicontinuidad y el teorema de Arzelà-Ascoli

En todo el capítulo, $\mathcal{C}(X, Y)$ se considera con la métrica uniforme $\bar{\rho}$.

14.1 Familias equicontinuas

Definición 14.1. Sea X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico y $\mathcal{F} \subset Y^X$. Decimos que $\mathcal{F}$ es *equicontinua en* $a \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad U de a tal que

$$x \in U \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \text{para toda } f \in \mathcal{F}. \quad (14.1)$$

Decimos que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* si es equicontinua en todo $a \in X$. Decimos que $\mathcal{F}$ es *puntualmente limitada* si, para cada $a \in X$, el conjunto $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ es limitado en Y .

Si $\mathcal{F}$ es equicontinua en a , cada $f \in \mathcal{F}$ es continua en a . La diferencia entre continuidad y equicontinuidad es que en (14.1) la vecindad U no depende de f .

Ejemplo 14.2. (a) La familia $\mathcal{F} = \{f_n(x) = nx : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no es equicontinua en ningún punto: dado a y $\delta > 0$, para $n > 2/\delta$ se tiene $|f_n(a + \delta/2) - f_n(a)| = n\delta/2 > 1$.

(b) La familia $\mathcal{F} = \{f(x) = rx + b : r \in [0, 1], b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es equicontinua, pues $|f(x) - f(a)| \leq |x - a|$ para toda $f \in \mathcal{F}$. No es puntualmente limitada.

(c) Más generalmente, toda familia de funciones Lipschitz con una misma constante L es equicontinua.

Lema 14.3. Sea X compacto, (Y, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ equicontinua. Entonces $\mathcal{F}$ es totalmente limitada.

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como $\mathcal{F}$ es equicontinua, cada $a \in X$ posee una vecindad U_a tal que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon/4$ para todo $x \in U_a$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Como X es compacto, existen $a_1, \dots, a_k$ con $X = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k}$. Como Y es compacto, existen bolas $B_1, \dots, B_\ell$ de radio $\varepsilon/8$ que cubren Y . Para cada función $\alpha: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, \ell\}$ elegimos, si existe, una función $g_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $g_\alpha(a_i) \in B_{\alpha(i)}$ para $i = 1, \dots, k$. Obtenemos así una colección finita, de a lo sumo ℓ^k funciones.

Sea $f \in \mathcal{F}$. Para cada i , $f(a_i)$ pertenece a alguna bola $B_{\alpha(i)}$; esto define una función α para la cual g_α existe. Comparemos f con g_α . Dado $x \in X$, existe i con $x \in U_{a_i}$, y entonces

$$d(f(x), g_\alpha(x)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), g_\alpha(a_i)) + d(g_\alpha(a_i), g_\alpha(x)) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4},$$

pues $f(a_i)$ y $g_\alpha(a_i)$ están en la misma bola de radio $\varepsilon/8$. Tomando supremo en x , y como $\bar{d} \leq d$, se obtiene $\bar{\rho}(f, g_\alpha) \leq 3\varepsilon/4 < \varepsilon$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ está cubierta por las finitas bolas de radio ε de $\bar{\rho}$ centradas en las funciones g_α . ■

14.2 El teorema de Arzelà-Ascoli

Teorema 14.4 (Arzelà-Ascoli). *Sea X compacto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ equicontinua y puntualmente limitada. Entonces $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto. En consecuencia, toda sucesión en $\mathcal{F}$ posee una subsucesión que converge uniformemente a una función continua.*

Demostración. Por el [corolario 12.8](#), como $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ es completo ([proposición 13.6](#)), basta probar que $\mathcal{F}$ es totalmente limitada. Como $\mathcal{F}$ es equicontinua, cada $a \in X$ tiene una vecindad U_a tal que

$$\|f(x) - f(a)\| < 1 \quad \text{para todo } x \in U_a \text{ y toda } f \in \mathcal{F}.$$

Por compacidad, existen $a_1, \dots, a_k$ con $X = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k}$. Como $\mathcal{F}$ es puntualmente limitada, existe M tal que $\|f(a_i)\| \leq M$ para $i = 1, \dots, k$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Dado $x \in X$, existe i con $x \in U_{a_i}$, y entonces

$$\|f(x)\| \leq \|f(a_i)\| + 1 \leq M + 1 \quad \text{para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Así, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ con $Y = B_{M+1}[0] \subset \mathbb{R}^n$, que es compacto por el [teorema 7.18](#). Por el [lema 14.3](#), $\mathcal{F}$ es totalmente limitada en $\mathcal{C}(X, Y)$, cuya métrica es la restricción de la de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. Luego $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto. La última afirmación se sigue de que $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto por sucesiones ([teorema 7.17](#)) y de la [proposición 13.3](#). ■

Teorema 14.5 (Arzelà-Ascoli, segunda versión). *Sea X compacto, (Y, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ equicontinua. Entonces $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto.*

Demostración. Y es completo por ser compacto, luego $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo. Por el [lema 14.3](#), $\mathcal{F}$ es totalmente limitada, y se aplica el [corolario 12.8](#). ■

Aplicaciones del teorema de Arzelà-Ascoli

15.1 Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ continua. La ecuación diferencial ordinaria

$$x' = f(t, x)$$

plantea el problema de encontrar las funciones $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, tales que $(t, \varphi(t)) \in U$ y $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$; tales funciones son las *soluciones* de la ecuación. Dado $(t_0, x_0) \in U$, el *problema de valor inicial*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (15.1)$$

consiste en encontrar soluciones $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, definidas en un intervalo I que contiene a t_0 en su interior, tales que $\varphi(t_0) = x_0$.

Si φ es una solución de (15.1), integrando se obtiene

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I. \quad (15.2)$$

Esta es la *ecuación integral* asociada a (15.1). Recíprocamente, si $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y satisface (15.2), el integrando es continuo y, por el teorema fundamental del cálculo, φ es derivable y es solución de (15.1). Así, las soluciones de (15.1) son exactamente las funciones continuas que satisfacen (15.2).

Definición 15.1. Dado $\varepsilon > 0$, decimos que $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una *solución ε -aproximada* de $x' = f(t, x)$ si φ es continua, de clase C^1 por partes, y

$$|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon$$

para todo $t \in I$ en el que $\varphi'(t)$ existe.

Proposición 15.2 (Poligonales de Euler). Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $(t_0, x_0) \in U$. Sean $a, b > 0$ tales que el rectángulo $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ está contenido en U , sea $M > 0$ con $|f| \leq M$ en R y sea $\delta = \min\{a, b/M\}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe una solución ε -aproximada $\varphi: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ de $x' = f(t, x)$ con $\varphi(t_0) = x_0$, cuyo gráfico está contenido en R y que satisface $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq M|t - s|$.

Demostración. Construimos φ en $[t_0, t_0 + \delta]$; el intervalo $[t_0 - \delta, t_0]$ se trata del mismo modo. Como R es compacto, f es uniformemente continua en R (proposición 7.21), de modo que existe $\eta > 0$ tal que

$$(s, x), (s', x') \in R, |s - s'| \leq \eta, |x - x'| \leq M\eta \implies |f(s, x) - f(s', x')| < \varepsilon.$$

Sea $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = t_0 + \delta$ una partición con $\tau_i - \tau_{i-1} \leq \eta$. Definimos $\varphi(\tau_0) = x_0$ y, recursivamente, en cada $[\tau_{i-1}, \tau_i]$,

$$\varphi(t) = \varphi(\tau_{i-1}) + f(\tau_{i-1}, \varphi(\tau_{i-1}))(t - \tau_{i-1}).$$

Por inducción en i se ve que esta definición tiene sentido: φ es poligonal con pendientes de valor absoluto a lo sumo M , luego $|\varphi(t) - x_0| \leq M(t - t_0) \leq M\delta \leq b$, y así $(\tau_{i-1}, \varphi(\tau_{i-1})) \in R$. En particular el gráfico de φ está en R y φ es M -Lipschitz. Si $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, entonces $\varphi'(t) = f(\tau_{i-1}, \varphi(\tau_{i-1}))$, con $|t - \tau_{i-1}| \leq \eta$ y $|\varphi(t) - \varphi(\tau_{i-1})| \leq M\eta$; luego $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon$. ■

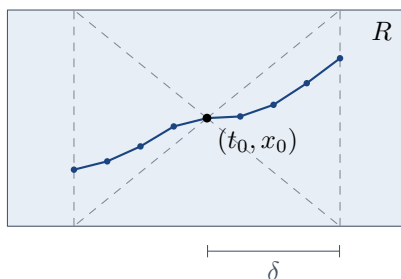


Figura 15.1: Una poligonal de Euler. Como las pendientes están acotadas por M , el gráfico queda dentro del cono de pendiente $\pm M$ y, por lo tanto, dentro de R sobre $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Teorema 15.3 (Cauchy-Peano). Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in U$, el problema de valor inicial (15.1) tiene alguna solución definida en un intervalo que contiene a t_0 en su interior.

Demostración. Sean R, M, δ como en la proposición anterior e $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una solución $\frac{1}{n}$ -aproximada $\varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi_n(t_0) = x_0$, gráfico en R y constante de Lipschitz M . Como φ_n es continua y C^1 por partes, para $t \in I$ se tiene

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi_n'(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds + \xi_n(t),$$

donde $|\xi_n(t)| \leq |t - t_0|/n \leq \delta/n$. La familia $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ es equicontinua, por ser M -Lipschitz, y puntualmente limitada, pues $|\varphi_n(t)| \leq |x_0| + b$. Por el teorema de Arzelà-Ascoli, existe una subsucesión (φ_{n_j}) que converge uniformemente a una función continua $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, cuyo gráfico está en R porque R es cerrado. Como f es uniformemente continua en R , se tiene $f(s, \varphi_{n_j}(s)) \rightarrow f(s, \varphi(s))$ uniformemente en $s \in I$. Haciendo $j \rightarrow \infty$ en

$$\varphi_{n_j}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n_j}(s)) ds + \xi_{n_j}(t)$$

obtenemos que φ satisface la ecuación integral (15.2), y por lo tanto es solución de (15.1). ■

El teorema no afirma unicidad, y en general no la hay: el problema $x' = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$ tiene las soluciones $x \equiv 0$ y $x(t) = t^3$.

15.2 Caminos de longitud mínima

Definición 15.4 (Caminos rectificables). Sea (X, d) un espacio métrico y $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ un camino continuo. Para cada partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ sea

$$S(\gamma, P) = \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)).$$

Decimos que γ es *rectificable* si el conjunto de las sumas $S(\gamma, P)$ es limitado; en tal caso su supremo $\ell(\gamma)$ se llama *longitud* de γ . Si γ no es rectificable escribimos $\ell(\gamma) = +\infty$.

Por la desigualdad triangular, agregar puntos a una partición no disminuye $S(\gamma, P)$. En particular $\ell(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$, y $\ell(\gamma) = 0$ sólo si γ es constante: si $\gamma(s) \neq \gamma(t)$, una partición que contenga a s y t da una suma positiva.

Proposición 15.5. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ rectificable y $c \in (a, b)$. Entonces $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$ son rectificables y

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

Demostración. Si P_1 y P_2 son particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces $P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$ y $S(\gamma_1, P_1) + S(\gamma_2, P_2) = S(\gamma, P_1 \cup P_2) \leq \ell(\gamma)$. Tomando supremos, γ_1, γ_2 son rectificables y $\ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) \leq \ell(\gamma)$. Recíprocamente, si P es una partición de $[a, b]$, entonces $P \cup \{c\}$ se descompone en particiones P_1 de $[a, c]$ y P_2 de $[c, b]$, y

$$S(\gamma, P) \leq S(\gamma, P \cup \{c\}) = S(\gamma_1, P_1) + S(\gamma_2, P_2) \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2). \quad \blacksquare$$

Recordemos que, para una sucesión (a_n) de números reales,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n \inf_{k \geq n} a_k \in [-\infty, +\infty];$$

es el menor de los límites (finitos o infinitos) de las subsucesiones de (a_n) .

Proposición 15.6 (Semicontinuidad de la longitud). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\gamma_n: [a, b] \rightarrow X$ un camino rectificable, y supongamos que (γ_n) converge uniformemente a un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. Entonces

$$\ell(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ell(\gamma_n).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $P = \{a = t_0 < \cdots < t_k = b\}$ una partición. Como $\gamma_n \rightarrow \gamma$ uniformemente, existe N tal que $d(\gamma_n(t), \gamma(t)) < \varepsilon/k$ para todo t y todo $n > N$. Para $n > N$,

$$d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq d(\gamma(t_{j-1}), \gamma_n(t_{j-1})) + d(\gamma_n(t_{j-1}), \gamma_n(t_j)) + d(\gamma_n(t_j), \gamma(t_j)),$$

y sumando en j ,

$$S(\gamma, P) < 2\varepsilon + S(\gamma_n, P) \leq 2\varepsilon + \ell(\gamma_n).$$

Como esto vale para todo $n > N$, se tiene $S(\gamma, P) \leq 2\varepsilon + \liminf_n \ell(\gamma_n)$. Como ε y P son arbitrarios, se concluye. $\blacksquare$

Lema 15.7. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ rectificable. Entonces la función $\varphi(t) = \ell(\gamma|_{[a, t]})$, con $\varphi(a) = 0$, es continua y creciente, y $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \ell(\gamma|_{[t_1, t_2]})$ para $t_1 < t_2$.

Demostración. La última igualdad es la [proposición 15.5](#), y de ella se sigue que φ es creciente. Probemos que φ es continua por la derecha en $t \in [a, b]$; la continuidad por la izquierda es análoga. Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad uniforme de γ existe $\eta > 0$ tal que $d(\gamma(s), \gamma(s')) < \varepsilon$ si $|s - s'| < \eta$. Sea P una partición de $[t, b]$ con $S(\gamma|_{[t, b]}, P) > \ell(\gamma|_{[t, b]}) - \varepsilon$; agregando un punto si hace falta, podemos suponer que el primer punto t_1 de P posterior a t cumple $t_1 - t < \eta$. Si $P' = P - \{t\}$ es la partición inducida en $[t_1, b]$, entonces

$$\ell(\gamma|_{[t, b]}) < S(\gamma|_{[t, b]}, P) + \varepsilon = d(\gamma(t), \gamma(t_1)) + S(\gamma|_{[t_1, b]}, P') + \varepsilon < 2\varepsilon + \ell(\gamma|_{[t_1, b]}).$$

Luego $\varphi(t_1) - \varphi(t) = \ell(\gamma|_{[t, t_1]}) = \ell(\gamma|_{[t, b]}) - \ell(\gamma|_{[t_1, b]}) < 2\varepsilon$, y como φ es creciente, $0 \leq \varphi(s) - \varphi(t) < 2\varepsilon$ para $s \in [t, t_1]$. ■

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ rectificable, $l = \ell(\gamma)$ y φ como en el lema. Por el lema y el teorema del valor intermedio, φ es una sobreyección creciente de $[a, b]$ sobre $[0, l]$. Si $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, entonces $\ell(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = 0$ y $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Por lo tanto la función

$$\tilde{\gamma}: [0, l] \rightarrow X, \quad \tilde{\gamma}(\varphi(t)) = \gamma(t),$$

está bien definida. Además, si $s_1 = \varphi(t_1) \leq s_2 = \varphi(t_2)$,

$$s_2 - s_1 = \ell(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \geq d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = d(\tilde{\gamma}(s_1), \tilde{\gamma}(s_2)),$$

de modo que $\tilde{\gamma}$ es Lipschitz de constante 1; en particular es continua.

Proposición 15.8 (Parametrización por longitud de arco). Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ rectificable con $\ell(\gamma) = l$. El camino $\tilde{\gamma}: [0, l] \rightarrow X$ definido arriba satisface $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ y $\ell(\tilde{\gamma}|_{[0, s]}) = s$ para todo $s \in [0, l]$. Se llama parametrización por longitud de arco de γ .

Demostración. Sea $s = \varphi(t)$. Si $0 = s_0 < \dots < s_k = s$ es una partición de $[0, s]$, elijamos t_i con $\varphi(t_i) = s_i$; los t_i son crecientes y $\sum_i d(\tilde{\gamma}(s_{i-1}), \tilde{\gamma}(s_i)) = \sum_i d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leq \ell(\gamma|_{[a, t]}) = s$. Recíprocamente, toda partición $\{t_i\}$ de $[a, t]$ produce los puntos $s_i = \varphi(t_i)$, crecientes y posiblemente repetidos, con la misma suma. Luego $\ell(\tilde{\gamma}|_{[0, s]}) = \ell(\gamma|_{[a, t]}) = s$. ■

Teorema 15.9. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sean $p, q \in X$ tales que existe algún camino rectificable que conecta p con q . Entonces existe un camino rectificable que conecta p con q de longitud mínima.

Demostración. Sea l el ínfimo de las longitudes de los caminos rectificables que conectan p con q , y sea (γ_n) una sucesión de tales caminos con $l_n = \ell(\gamma_n) \rightarrow l$. Si $l = 0$, entonces $p = q$ y el camino constante sirve; supongamos $l > 0$ y, por lo tanto, $l_n > 0$. Por la proposición anterior podemos suponer que $\gamma_n: [0, l_n] \rightarrow X$ está parametrizado por longitud de arco, y definimos $\alpha_n: [0, 1] \rightarrow X$, $\alpha_n(t) = \gamma_n(l_n t)$. Entonces $\ell(\alpha_n) = l_n$ y

$$d(\alpha_n(t_1), \alpha_n(t_2)) \leq l_n |t_1 - t_2| \leq L |t_1 - t_2|,$$

donde $L = \sup_n l_n < \infty$. Así, la familia $\{\alpha_n\} \subset \mathcal{C}([0, 1], X)$ es equicontinua. Por el [teorema 14.5](#) y el [teorema 7.17](#), pasando a una subsucesión podemos suponer que α_n converge uniformemente a un camino $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, que conecta p con q . Por la [proposición 15.6](#),

$$\ell(\alpha) \leq \liminf_n \ell(\alpha_n) = l.$$

Luego α es rectificable, conecta p con q y, por definición de l , $\ell(\alpha) \geq l$. Así $\ell(\alpha) = l$. ■

La topología de la convergencia compacta

16.1 Convergencia uniforme en compactos

Definición 16.1. Sea X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico y (f_n) una sucesión en Y^X . Decimos que (f_n) *converge uniformemente en compactos* a $f \in Y^X$ si, para todo compacto $K \subset X$, la sucesión de restricciones $f_n|_K$ converge uniformemente a $f|_K$.

Dados $f \in Y^X$, un compacto $K \subset X$ y $\varepsilon > 0$, sea

$$B(f, \varepsilon, K) = \left\{ g \in Y^X : \sup_{x \in K} d(g(x), f(x)) < \varepsilon \right\}.$$

Proposición 16.2. Los conjuntos $B(f, \varepsilon, K)$ forman una base de una topología en Y^X , llamada topología de la convergencia compacta.

Demostración. Estos conjuntos cubren Y^X , pues $f \in B(f, \varepsilon, K)$. Sea $g \in B(f_1, \varepsilon_1, K_1) \cap B(f_2, \varepsilon_2, K_2)$ y tomemos $\delta > 0$ con

$$\sup_{K_1} d(g, f_1) + \delta < \varepsilon_1, \quad \sup_{K_2} d(g, f_2) + \delta < \varepsilon_2.$$

El conjunto $K_1 \cup K_2$ es compacto. Veamos que $B(g, \delta, K_1 \cup K_2) \subset B(f_1, \varepsilon_1, K_1) \cap B(f_2, \varepsilon_2, K_2)$. Si $h \in B(g, \delta, K_1 \cup K_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{K_1} d(h, f_1) &\leq \sup_{K_1} d(h, g) + \sup_{K_1} d(g, f_1) \leq \sup_{K_1 \cup K_2} d(h, g) + \sup_{K_1} d(g, f_1) \\ &< \delta + \sup_{K_1} d(g, f_1) < \varepsilon_1, \end{aligned}$$

es decir $h \in B(f_1, \varepsilon_1, K_1)$. Análogamente, $h \in B(f_2, \varepsilon_2, K_2)$. ■

Proposición 16.3. Una sucesión (f_n) en Y^X converge a f en la topología de la convergencia compacta si y sólo si converge uniformemente en compactos a f .

Demostración. Supongamos que $f_n \rightarrow f$ en esta topología y sea K compacto. Dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $B(f, \varepsilon, K)$ es una vecindad de f , luego $f_n \in B(f, \varepsilon, K)$ para n grande, es decir, $\sup_K d(f_n, f) < \varepsilon$. Recíprocamente, supongamos que (f_n) converge uniformemente en compactos a f y sea W una vecindad de f . Existe un básico con $f \in B(g, \varepsilon, K) \subset W$; por el argumento de la demostración anterior, existe $\delta > 0$ con $B(f, \delta, K) \subset B(g, \varepsilon, K)$. Como $\sup_K d(f_n, f) < \delta$ para n grande, se tiene $f_n \in W$ para n grande. ■

Decimos que un compacto $K \subset X$ es un *entorno compacto* de $x \in X$ si $x \in \text{int}(K)$.

Proposición 16.4. *Sea X un espacio topológico en el que todo punto posee un entorno compacto, y sea (Y, d) un espacio métrico. Si una sucesión (f_n) en $\mathcal{C}(X, Y)$ converge en la topología de la convergencia compacta a $f \in Y^X$, entonces $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.*

Demostración. Sea $a \in X$ y K un entorno compacto de a . Como $f_n|_K \rightarrow f|_K$ uniformemente, $f|_K$ es continua (lema 13.5). En particular $f|_{\text{int}(K)}$ es continua, y como $\text{int}(K)$ es una vecindad de a , f es continua en a . ■

16.2 Espacios σ^0 -compactos y Arzelà-Ascoli

Definición 16.5. Decimos que un espacio topológico X es σ^0 -compacto si existen compactos $K_1, K_2, \dots$ en X con

$$X = \text{int}(K_1) \cup \text{int}(K_2) \cup \dots.$$

Ejemplo 16.6. Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es σ^0 -compacto: los conjuntos

$$K_j = \{x \in U : \|x\| \leq j, d(x, \mathbb{R}^n - U) \geq 1/j\}$$

son cerrados y limitados, luego compactos (si $U = \mathbb{R}^n$ se omite la segunda condición), y todo $x \in U$ está en el interior de algún K_j . Más generalmente, las variedades son σ^0 -compactas.

En un espacio σ^0 -compacto todo punto tiene un entorno compacto, de modo que vale la proposición 16.4. Para estos espacios se obtiene fácilmente la siguiente versión del teorema de Arzelà-Ascoli.

Teorema 16.7 (Arzelà-Ascoli, tercera versión). *Sea X un espacio σ^0 -compacto y sea $\{f_1, f_2, \dots\} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k)$ equicontinua y puntualmente limitada. Entonces (f_n) posee una subsucesión que converge en la topología de la convergencia compacta a una función $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k)$.*

Demostración. Sean $K_1, K_2, \dots$ compactos con

$$X = \text{int}(K_1) \cup \text{int}(K_2) \cup \dots. \quad (16.1)$$

Como $(f_n|_{K_1}) \subset \mathcal{C}(K_1, \mathbb{R}^k)$ es equicontinua y puntualmente limitada, por el teorema 14.4 existe un conjunto infinito $N_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $(f_n|_{K_1})_{n \in N_1}$ es uniformemente convergente. De nuevo, como $(f_n|_{K_2})_{n \in N_1}$ es equicontinua y puntualmente limitada, existe un conjunto infinito $N_2 \subset N_1$ tal que $(f_n|_{K_2})_{n \in N_2}$ es uniformemente convergente. Prosiguiendo de esta manera obtenemos conjuntos infinitos

$$\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots \quad (16.2)$$

tales que, para cada l , la sucesión $(f_n|_{K_l})_{n \in N_l}$ es uniformemente convergente. Escojamos $n_1 < n_2 < \dots$ con $n_i \in N_i$. Fijado l , por (16.2) los índices $n_l, n_{l+1}, \dots$ están en N_l , de modo que $(f_{n_i}|_{K_l})_i$ converge uniformemente. Como cada $x \in X$ está en algún K_l , la sucesión $(f_{n_i}(x))$ converge; denotemos su límite por $f(x)$.

Probemos que $f_{n_i} \rightarrow f$ uniformemente en compactos. Sea $K \subset X$ compacto. Por (16.1) existe m con $K \subset \text{int}(K_1) \cup \dots \cup \text{int}(K_m)$. Para cada $l \leq m$, $(f_{n_i}|_{K_l})$ converge uniformemente, necesariamente a $f|_{K_l}$; luego, dado $\varepsilon > 0$, existen $i_1, \dots, i_m$ tales que

$$i > i_l \implies \|f_{n_i}(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in K_l.$$

Si $i > \max\{i_1, \dots, i_m\}$, entonces $\|f_{n_i}(x) - f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in K_1 \cup \dots \cup K_m$, y en particular para todo $x \in K$. Por la [proposición 16.3](#), $f_{n_i} \rightarrow f$ en la topología de la convergencia compacta, y por la [proposición 16.4](#), f es continua. ■

16.3 Una aplicación: el teorema de Montel

Lema 16.8. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en U uniformemente limitada, es decir, tal que existe $M > 0$ con $|f_n(z)| \leq M$ para todo $z \in U$ y todo n . Entonces $\{f_n\}$ es equicontinua.*

Demostración. Sea $a \in U$ y $r > 0$ tal que el disco cerrado de centro a y radio $2r$ está contenido en U , y sea C la circunferencia $|\zeta - a| = 2r$. Si $z, w \in B_r(a)$, la fórmula integral de Cauchy da

$$f_n(z) - f_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f_n(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta = \frac{z - w}{2\pi i} \oint_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)} d\zeta.$$

Como $|\zeta - z| \geq r$ y $|\zeta - w| \geq r$ para $\zeta \in C$, se obtiene

$$|f_n(z) - f_n(w)| \leq \frac{|z - w|}{2\pi} \cdot 2\pi(2r) \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{2M}{r} |z - w|,$$

cota que no depende de n . Luego $\{f_n\}$ es equicontinua en a . ■

Teorema 16.9 (Montel). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en U uniformemente limitada. Entonces (f_n) posee una subsucesión que converge uniformemente en compactos a una función holomorfa $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.*

Demostración. Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, U es σ^0 -compacto ([ejemplo 16.6](#)) y, por el lema anterior, $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^2)$ es equicontinua; es puntualmente limitada por hipótesis. Por el [teorema 16.7](#), existe una subsucesión (f_{n_j}) que converge uniformemente en compactos a una función continua f . Resta ver que f es holomorfa. Sea $D \subset U$ un disco abierto con $\overline{D} \subset U$ y $T \subset D$ un triángulo. Como T es compacto y $f_{n_j} \rightarrow f$ uniformemente en T , por el teorema de Cauchy-Goursat

$$\oint_{\partial T} f(z) dz = \lim_j \oint_{\partial T} f_{n_j}(z) dz = 0.$$

Por el teorema de Morera, f es holomorfa en D , y como D es arbitrario, f es holomorfa en U . ■

CAPÍTULO 17

Homotopía y grupo fundamental

En este capítulo y los dos siguientes, $I = [0, 1]$.

17.1 Homotopías

Definición 17.1. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ continuas. Una *homotopía* de f a g es una función continua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Si existe, decimos que f y g son *homotópicas* y escribimos $f \simeq g$. Escribimos $H_t = H(\cdot, t)$, de modo que $(H_t)_{t \in I}$ es una familia de funciones continuas que deforma $f = H_0$ en $g = H_1$. Si $A \subset X$ y $H(a, t) = f(a)$ para todo $a \in A$ y todo $t \in I$, decimos que f y g son homotópicas *relativamente a A* .

Proposición 17.2. La relación $\simeq$ es de equivalencia en el conjunto de las funciones continuas de X en Y . Lo mismo vale para la homotopía relativa a un conjunto A .

Demostración. $f \simeq f$ mediante $H(x, t) = f(x)$. Si H es una homotopía de f a g , entonces $H(x, 1 - t)$ es una homotopía de g a f . Si H va de f a g y K va de g a h , la función

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \leq 1/2, \\ K(x, 2t - 1), & t \geq 1/2, \end{cases}$$

es continua por el [lema 4.8](#), pues $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ son cerrados y las dos fórmulas coinciden en $t = 1/2$; es una homotopía de f a h . Las tres construcciones preservan la condición de ser relativas a A . ■

Ejemplo 17.3. (a) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Si $f, g: X \rightarrow C$ son continuas, entonces $f \simeq g$ mediante

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

- (b) En $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, la inclusión del círculo unitario, $z \mapsto z$, y la inclusión del círculo de radio 2, $z \mapsto 2z$, son homotópicas como funciones de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{C}^*$ mediante $H(z, t) = (1 + t)z$. En cambio, veremos en la sección [17.4](#) que ninguna de ellas es homotópica en $\mathbb{C}^*$ a una función constante.
- (c) Análogamente, la inclusión $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ no es homotópica a una constante; la demostración de este hecho requiere herramientas que no desarrollaremos aquí.

17.2 Homotopía de caminos

Recordemos que un camino en X es una función continua $\gamma: I \rightarrow X$. Si $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$, decimos que γ es un camino de a a b . Si $a = b$, decimos que γ es un *lazo* basado en a . Denotamos por e_a el camino constante igual a a .

Definición 17.4. Dos caminos α, β de a a b son *homotópicos con extremos fijos*, y escribimos $\alpha \simeq_p \beta$, si son homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$, es decir, si existe $H: I \times I \rightarrow X$ continua con

$$H(t, 0) = \alpha(t), \quad H(t, 1) = \beta(t), \quad H(0, s) = a, \quad H(1, s) = b.$$

Por la [proposición 17.2](#), $\simeq_p$ es una relación de equivalencia. Denotamos por $[\alpha]$ la clase de α .

Definición 17.5. Si α es un camino de a a b y β es un camino de b a c , su *yuxtaposición* es el camino de a a c

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

que es continuo por el [lema 4.8](#). El *camino inverso* de α es $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$, que va de b a a .

Lema 17.6 (Reparametrización). Sea γ un camino y $\varphi: I \rightarrow I$ continua con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Entonces $\gamma \circ \varphi \simeq_p \gamma$.

Demostración. $H(t, s) = \gamma((1 - s)\varphi(t) + st)$ es una homotopía con extremos fijos de $\gamma \circ \varphi$ a γ . ■

Proposición 17.7. Sean α, α' caminos de a a b , β, β' caminos de b a c y θ un camino de c a d .

- (a) Si $\alpha \simeq_p \alpha'$ y $\beta \simeq_p \beta'$, entonces $\alpha * \beta \simeq_p \alpha' * \beta'$.
- (b) $e_a * \alpha \simeq_p \alpha \simeq_p \alpha * e_b$.
- (c) $\alpha * \bar{\alpha} \simeq_p e_a$ y $\bar{\alpha} * \alpha \simeq_p e_b$.
- (d) $(\alpha * \beta) * \theta \simeq_p \alpha * (\beta * \theta)$.

Demostración. (a) Si H va de α a α' y K va de β a β' , entonces $(t, s) \mapsto (H_s * K_s)(t)$ es una homotopía con extremos fijos de $\alpha * \beta$ a $\alpha' * \beta'$; es continua por el [lema 4.8](#).

(b) $e_a * \alpha = \alpha \circ \varphi$, con $\varphi(t) = 0$ para $t \leq 1/2$ y $\varphi(t) = 2t - 1$ para $t \geq 1/2$; se aplica el [lema 17.6](#). El otro caso es análogo.

(c) La función

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t(1 - s)), & t \leq 1/2, \\ \alpha((2 - 2t)(1 - s)), & t \geq 1/2, \end{cases}$$

es continua, vale $\alpha * \bar{\alpha}$ para $s = 0$, vale e_a para $s = 1$, y $H(0, s) = H(1, s) = a$. La segunda afirmación se obtiene aplicando la primera a $\bar{\alpha}$.

(d) El camino $\alpha * (\beta * \theta)$ recorre α , β y θ en los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$, mientras que $(\alpha * \beta) * \theta$ los recorre en $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$. Luego $(\alpha * \beta) * \theta = (\alpha * (\beta * \theta)) \circ \varphi$, donde φ es la función lineal a trozos que lleva $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ sobre $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$, respectivamente. Se aplica el lema 17.6. ■

17.3 El grupo fundamental

Teorema 17.8. Sea X un espacio topológico y $p \in X$. El conjunto $\pi_1(X, p)$ de las clases de homotopía con extremos fijos de lazos basados en p , con la operación

$$[\alpha] [\beta] = [\alpha * \beta],$$

es un grupo, con elemento neutro $[e_p]$ e inverso $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$. Se llama grupo fundamental de X en p .

Demostración. La operación está bien definida por la proposición 17.7(a), y los axiomas de grupo son las afirmaciones (b), (c) y (d) de esa proposición. ■

Proposición 17.9 (Cambio de punto base). Sea δ un camino de p a q en X . La función

$$\beta_\delta: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q), \quad \beta_\delta([\gamma]) = [\bar{\delta} * \gamma * \delta],$$

es un isomorfismo de grupos. En particular, si X es conexo por caminos, los grupos $\pi_1(X, p)$, $p \in X$, son todos isomorfos, y escribimos simplemente $\pi_1(X)$.

Demostración. Por la proposición 17.7, β_δ está bien definida y

$$\beta_\delta([\alpha]) \beta_\delta([\gamma]) = [\bar{\delta} * \alpha * \delta * \bar{\delta} * \gamma * \delta] = [\bar{\delta} * \alpha * \gamma * \delta] = \beta_\delta([\alpha][\gamma]).$$

Además $\beta_{\bar{\delta}}$ es la inversa de β_δ . ■

El isomorfismo β_δ depende en general del camino δ , de modo que la identificación entre $\pi_1(X, p)$ y $\pi_1(X, q)$ no es canónica.

Proposición 17.10 (Homomorfismo inducido). Sea $f: X \rightarrow Y$ continua y $p \in X$. La función

$$f_*: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p)), \quad f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma],$$

está bien definida y es un homomorfismo. Además $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ y $(\text{id}_X)_* = \text{id}$. En consecuencia, si f es un homeomorfismo, f_* es un isomorfismo.

Demostración. Si H es una homotopía con extremos fijos de α a β , entonces $f \circ H$ lo es de $f \circ \alpha$ a $f \circ \beta$. Además $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$. Las identidades son inmediatas, y si f es un homeomorfismo, $(f^{-1})_*$ es la inversa de f_* . ■

17.4 El grupo fundamental del círculo

Recordemos que el argumento principal $\text{Arg}: \mathbb{C} - (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$ es continuo (ejemplo 4.18) y que $w = |w|e^{i\text{Arg } w}$.

Lema 17.11 (Argumento continuo). Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ continua. Existe una función continua $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)} \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Si θ' es otra función con la misma propiedad, entonces $\theta' - \theta$ es una constante de la forma $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $m = \min|\gamma| > 0$. Por continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que $|s - t| < \delta$ implica $|\gamma(s) - \gamma(t)| < m$. Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ una partición con $t_j - t_{j-1} < \delta$. Para $t \in [t_{j-1}, t_j]$,

$$\left| \frac{\gamma(t)}{\gamma(t_{j-1})} - 1 \right| = \frac{|\gamma(t) - \gamma(t_{j-1})|}{|\gamma(t_{j-1})|} < 1,$$

de modo que $\gamma(t)/\gamma(t_{j-1})$ está en el semiplano $\{\text{Re } w > 0\}$, donde Arg es continuo. Elegimos $\theta(a)$ con $\gamma(a) = |\gamma(a)|e^{i\theta(a)}$ y definimos recursivamente

$$\theta(t) = \theta(t_{j-1}) + \text{Arg} \frac{\gamma(t)}{\gamma(t_{j-1})}, \quad t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Como $\text{Arg } 1 = 0$, las definiciones coinciden en los puntos t_j , y θ es continua por el lema 4.8. Por inducción, $\gamma(t) = \gamma(t_{j-1}) \cdot \frac{\gamma(t)}{\gamma(t_{j-1})} = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}$.

Si θ' tiene la misma propiedad, $e^{i(\theta' - \theta)} \equiv 1$, de modo que $(\theta' - \theta)/2\pi$ es una función continua con valores en $\mathbb{Z}$, y por lo tanto constante (corolario 9.3). ■

Definición 17.12 (Índice). Sea $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}^*$ un lazo y θ un argumento continuo de γ . El índice de γ es

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}.$$

Por el lema anterior, $\text{ind}(\gamma)$ no depende de la elección de θ , y es un número entero porque $e^{i\theta(1)} = e^{i\theta(0)}$. Intuitivamente, cuenta el número de vueltas que γ da alrededor del origen; si γ es de clase C^1 , coincide con $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z}$.

Lema 17.13. Sea $H: I \times I \rightarrow \mathbb{C}^*$ continua tal que $H(0, s) = H(1, s)$ para todo s , de modo que cada $\gamma_s = H(\cdot, s)$ es un lazo. Entonces $\text{ind}(\gamma_s)$ no depende de s . En particular, lazos homotópicos con extremos fijos en $\mathbb{C}^*$ tienen el mismo índice.

Demostración. Sea $m = \min|H| > 0$. Por continuidad uniforme existe $\eta > 0$ tal que $|s - s'| < \eta$ implica $|H(t, s') - H(t, s)| < m$ para todo t . Fijemos s, s' con $|s - s'| < \eta$. Como antes, $w(t) = H(t, s')/H(t, s)$ está en el semiplano $\{\text{Re } w > 0\}$ para todo t . Si θ_s es un argumento continuo de γ_s , entonces $\theta_s + \text{Arg } w$ es un argumento continuo de $\gamma_{s'}$, y como $w(0) = w(1)$,

$$2\pi \text{ind}(\gamma_{s'}) = \theta_s(1) + \text{Arg } w(1) - \theta_s(0) - \text{Arg } w(0) = 2\pi \text{ind}(\gamma_s).$$

Así, la función $s \mapsto \text{ind}(\gamma_s)$ es localmente constante; en particular es continua y con valores enteros en el conexo I , luego es constante. ■

Lema 17.14. *Si α y β son lazos en $\mathbb{C}^*$ basados en el mismo punto, entonces $\text{ind}(\alpha * \beta) = \text{ind}(\alpha) + \text{ind}(\beta)$.*

Demostración. Sea θ_α un argumento continuo de α . Como $\beta(0) = \alpha(1)$, podemos elegir un argumento continuo θ_β de β con $\theta_\beta(0) = \theta_\alpha(1)$. Entonces la función que vale $\theta_\alpha(2t)$ para $t \leq 1/2$ y $\theta_\beta(2t - 1)$ para $t \geq 1/2$ es un argumento continuo de $\alpha * \beta$, y $2\pi \text{ind}(\alpha * \beta) = \theta_\beta(1) - \theta_\alpha(0) = 2\pi \text{ind}(\alpha) + 2\pi \text{ind}(\beta)$. ■

Teorema 17.15. *La función $\text{ind}: \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $[\gamma] \mapsto \text{ind}(\gamma)$, es un isomorfismo. En particular $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. Por los dos lemas anteriores, ind está bien definido y es un homomorfismo. Es sobreyectivo: el lazo $\omega_n(t) = e^{2\pi i n t}$ tiene argumento continuo $2\pi n t$ e índice n . Es inyectivo: sea γ un lazo en $\mathbb{S}^1$ basado en 1 con $\text{ind}(\gamma) = 0$, y sea θ su argumento continuo con $\theta(0) = 0$. Entonces $\theta(1) = 0$ y

$$H(t, s) = e^{i(1-s)\theta(t)}$$

es una homotopía con extremos fijos en $\mathbb{S}^1$ de $\gamma = e^{i\theta}$ al lazo constante e_1 , pues $H(0, s) = H(1, s) = 1$. ■

Corolario 17.16. *La inclusión $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ no es homotópica a una función constante.*

Demostración. Si $G: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}^*$ fuese una homotopía de la inclusión a una constante, entonces $H(t, s) = G(e^{2\pi i t}, s)$ satisfaría las hipótesis del lema 17.13, con $H(\cdot, 0) = \omega_1$ de índice 1 y $H(\cdot, 1)$ constante, de índice 0. ■

Equivalencias homotópicas

18.1 El grupo fundamental de un producto

Proposición 18.1. Sean X, Y espacios topológicos, $p \in X, q \in Y$, y sean π_X, π_Y las proyecciones de $X \times Y$. La función

$$\pi_1(X \times Y, (p, q)) \rightarrow \pi_1(X, p) \times \pi_1(Y, q), \quad [\gamma] \mapsto ((\pi_X)_*[\gamma], (\pi_Y)_*[\gamma]),$$

es un isomorfismo.

Demostración. Es un homomorfismo por la [proposición 17.10](#). Todo lazo en $X \times Y$ es de la forma $\gamma = (\alpha, \beta)$, con $\alpha = \pi_X \circ \gamma$ y $\beta = \pi_Y \circ \gamma$ ([proposición 4.19](#)). Es sobreyectivo, pues $[(\alpha, \beta)]$ se aplica en $([\alpha], [\beta])$. Es inyectivo: si H es una homotopía con extremos fijos de α a e_p y K lo es de β a e_q , entonces (H, K) es una homotopía con extremos fijos de (α, β) a $e_{(p,q)}$. ■

Ejemplo 18.2. Por el [teorema 17.15](#), $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

18.2 Equivalencias homotópicas

Definición 18.3. Una función continua $f: X \rightarrow Y$ es una *equivalencia homotópica* si existe $g: Y \rightarrow X$ continua tal que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. En tal caso decimos que X e Y tienen el mismo *tipo de homotopía*.

Lema 18.4. Sean $h, k: X \rightarrow Y$ continuas, H una homotopía de h a k y $p \in X$. Sea $\delta(t) = H(p, t)$, que es un camino de $h(p)$ a $k(p)$. Entonces

$$k_* = \beta_\delta \circ h_*: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, k(p)).$$

Demostración. Sea γ un lazo en X basado en p y $F: I \times I \rightarrow Y$, $F(t, s) = H(\gamma(t), s)$. En el cuadrado $I \times I$ consideremos los caminos $a(t) = (t, 0)$, $b(s) = (1, s)$, $c(s) = (0, s)$ y $d(t) = (t, 1)$. Los caminos $a * b$ y $c * d$ van ambos de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ en el convexo $I \times I$, luego son homotópicos con extremos fijos mediante una homotopía lineal. Aplicando F , y observando que $F \circ a = h \circ \gamma$, $F \circ b = F \circ c = \delta$ y $F \circ d = k \circ \gamma$, obtenemos

$$(h \circ \gamma) * \delta \simeq_p \delta * (k \circ \gamma),$$

es decir, $[k \circ \gamma] = [\bar{\delta} * (h \circ \gamma) * \delta] = \beta_\delta(h_*[\gamma])$. ■

Corolario 18.5. Si $h: X \rightarrow X$ es homotópica a la identidad, entonces $h_*: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, h(p))$ es un isomorfismo.

Demostración. Aplicando el lema con $k = \text{id}_X$ y una homotopía de h a id_X , se obtiene $\text{id} = \beta_\delta \circ h_*$, de modo que $h_* = \beta_\delta^{-1}$. ■

Teorema 18.6. Si $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica y $p \in X$, entonces $f_*: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p))$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea g como en la definición y pongamos $q = f(p)$, $p' = g(q)$, $q' = f(p')$. Por el corolario 18.5, aplicado a $g \circ f \simeq \text{id}_X$ y a $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, los homomorfismos

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, p'), \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*: \pi_1(Y, q) \rightarrow \pi_1(Y, q')$$

son isomorfismos (en la segunda composición, f_* está calculado en p'). De la primera se sigue que $g_*: \pi_1(Y, q) \rightarrow \pi_1(X, p')$ es sobreyectivo, y de la segunda que es inyectivo. Luego g_* es un isomorfismo, y $f_* = (g_*)^{-1} \circ (g \circ f)_*$ también. ■

18.3 Retracciones y espacios simplemente conexos

Definición 18.7. Sea $A \subset X$. Una función continua $r: X \rightarrow A$ es una *retracción* si $r|_A = \text{id}_A$; en tal caso decimos que A es un *retracto* de X . Una retracción r es una *retracción por deformación* si existe una homotopía $H: X \times I \rightarrow X$ con $H_0 = \text{id}_X$, $H_1 = r$ y $H_t|_A = \text{id}_A$ para todo $t \in I$.

Proposición 18.8. Si $r: X \rightarrow A$ es una retracción por deformación, la inclusión $i: A \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica. En particular, $i_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ es un isomorfismo para todo $a \in A$.

Demostración. $r \circ i = \text{id}_A$ e $i \circ r = H_1 \simeq H_0 = \text{id}_X$. ■

Ejemplo 18.9. (a) $\mathbb{C}^*$ y el anillo $\{1 \leq |z| \leq 2\}$ se retraen por deformación sobre $\mathbb{S}^1$ mediante $H(z, t) = (1 - t)z + tz/|z|$. Luego $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{R}^n$, y más generalmente todo convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, se retrae por deformación sobre cualquiera de sus puntos c mediante $H(x, t) = (1 - t)x + tc$. Luego $\pi_1(C)$ es trivial.

(c) La cinta de Möbius $M = \Delta/\sim$ (definición 8.16) se retrae por deformación sobre su *alma*, la imagen a del segmento $[0, 1] \times \{0\}$, que es una circunferencia. En efecto, la homotopía $((x, y), t) \mapsto (x, (1 - t)y)$ de Δ es compatible con la identificación $(0, y) \sim (1, -y)$, e induce una homotopía en M . Esta es continua porque $\Delta \times I \rightarrow M \times I$ es una aplicación cociente: es continua y sobreyectiva, $\Delta \times I$ es compacto y $M \times I$ es de Hausdorff, pues M es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{RP}^2$ (proposición 8.18). Así, $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$, generado por la clase del alma.

Definición 18.10. Un espacio X es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es trivial. Es *contráctil* si id_X es homotópica a una función constante.

Todo espacio contráctil es simplemente conexo: si H es una homotopía de id_X a la constante c , cada $x \in X$ se conecta con c mediante $t \mapsto H(x, t)$, y la inclusión $\{c\} \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica, de modo que $\pi_1(X, c) \cong \pi_1(\{c\}, c)$ es trivial. Por el ejemplo anterior, los convexos de $\mathbb{R}^n$ son contráctiles y, por lo tanto, simplemente conexos.

18.4 Las esferas de dimensión mayor que uno

El resultado siguiente es la primera mitad del teorema de Seifert-van Kampen del próximo capítulo.

Lema 18.11. *Sea $X = A \cup B$ con A, B abiertos y $A \cap B$ conexo por caminos, y sea $p \in A \cap B$. Entonces todo lazo γ en X basado en p es homotópico con extremos fijos a una yuxtaposición $\gamma_1 * \cdots * \gamma_k$ de lazos basados en p , cada uno contenido en A o en B .*

Demostración. Los abiertos $\gamma^{-1}(A)$ y $\gamma^{-1}(B)$ cubren el compacto I . Por el [lema 7.20](#), existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tal que cada $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ está contenido en A o en B . Uniendo intervalos consecutivos cuyas imágenes están en el mismo conjunto, podemos suponer que las imágenes están alternadamente en A y en B . Entonces cada punto $p_j = \gamma(t_j)$, $0 < j < k$, está en $A \cap B$, y como este conjunto es conexo por caminos, existe un camino θ_j en $A \cap B$ de p a p_j . Sea σ_j el camino $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ reparametrizado en I . Los lazos

$$\gamma_1 = \sigma_1 * \bar{\theta}_1, \quad \gamma_2 = \theta_1 * \sigma_2 * \bar{\theta}_2, \quad \dots, \quad \gamma_k = \theta_{k-1} * \sigma_k$$

están basados en p , cada uno está contenido en A o en B , y por la [proposición 17.7](#) y el [lema 17.6](#),

$$\gamma_1 * \cdots * \gamma_k \simeq_p \sigma_1 * \cdots * \sigma_k \simeq_p \gamma. \quad \blacksquare$$

Teorema 18.12. *Para $n \geq 2$, la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa.*

Demostración. Ya sabemos que $\mathbb{S}^n$ es conexa por caminos. Sean $N = (0, \dots, 0, 1)$ y $S = -N$, y consideremos los abiertos $A = \mathbb{S}^n - \{N\}$ y $B = \mathbb{S}^n - \{S\}$. Por la proyección estereográfica, A y B son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, luego simplemente conexos. La intersección $A \cap B = \mathbb{S}^n - \{N, S\}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n - \{0\}$, que es conexo por caminos porque $n \geq 2$ ([ejemplo 9.13](#)). Sea $p \in A \cap B$ y γ un lazo basado en p . Por el lema anterior, $\gamma \simeq_p \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$ con cada γ_j contenido en A o en B . Como A y B son simplemente conexos, cada γ_j es homotópico con extremos fijos a e_p , y por lo tanto $\gamma \simeq_p e_p$. $\blacksquare$

Para $n = 1$ el argumento falla precisamente porque $\mathbb{S}^1 - \{N, S\}$ no es conexo; y en efecto $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

El teorema de Seifert-van Kampen

19.1 Grupos libres y presentaciones

Sea S un conjunto. Una *palabra* en S es una sucesión finita $s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ con $s_i \in S$ y $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$; la palabra vacía se denota 1. Una palabra es *reducida* si no contiene dos símbolos consecutivos de la forma $s^\varepsilon s^{-\varepsilon}$. Toda palabra se reduce, cancelando sucesivamente tales pares, a una única palabra reducida. El *grupo libre* $\langle S \rangle$ generado por S es el conjunto de las palabras reducidas, con la operación que consiste en yuxtaponer dos palabras y reducir el resultado. Se verifica que es un grupo, con neutro la palabra vacía e inverso $(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n})^{-1} = s_n^{-\varepsilon_n} \cdots s_1^{-\varepsilon_1}$ (véase [6, §69]). Por ejemplo, $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$, y $\langle a, b \rangle$ es el grupo libre generado por dos elementos.

Proposición 19.1 (Propiedad universal). *Sea G un grupo y $\varphi: S \rightarrow G$ una función. Existe un único homomorfismo $\hat{\varphi}: \langle S \rangle \rightarrow G$ que extiende a φ , a saber, $\hat{\varphi}(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}) = \varphi(s_1)^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(s_n)^{\varepsilon_n}$.*

Si R es un subconjunto de un grupo F , el *subgrupo normal generado por R* , que denotamos $\langle\langle R \rangle\rangle$, es el menor subgrupo normal de F que contiene a R ; está formado por los productos finitos de elementos de la forma grg^{-1} y $gr^{-1}g^{-1}$ con $g \in F$ y $r \in R$.

Definición 19.2 (Presentación). Sea S un conjunto y $R \subset \langle S \rangle$. El grupo *presentado* por los generadores S y las relaciones R es

$$\langle S \mid R \rangle = \langle S \rangle / \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Decimos que un grupo G tiene la presentación $\langle S \mid R \rangle$ si $G \cong \langle S \mid R \rangle$.

Intuitivamente, en $\langle S \mid R \rangle$ las relaciones funcionan como reglas de simplificación: dos palabras representan el mismo elemento si y sólo si se puede pasar de una a otra insertando o eliminando palabras de la forma $r^{\pm 1}$, $r \in R$, y pares $s^\varepsilon s^{-\varepsilon}$. Si $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ escribimos $\langle S \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, y a veces escribimos una relación $r = 1$ en la forma $u = v$ si $r = uv^{-1}$.

Proposición 19.3. *Sea G un grupo y $\varphi: S \rightarrow G$ una función tal que $\hat{\varphi}(r) = 1$ para todo $r \in R$. Entonces existe un único homomorfismo $\langle S \mid R \rangle \rightarrow G$ que envía la clase de cada $s \in S$ en $\varphi(s)$.*

Demostración. El núcleo de $\hat{\varphi}$ es un subgrupo normal que contiene a R , luego contiene a $\langle\langle R \rangle\rangle$, y $\hat{\varphi}$ induce el homomorfismo buscado en el cociente. La unicidad se debe a que las clases de los $s \in S$ generan $\langle S \mid R \rangle$. ■

Proposición 19.4. *Todo grupo admite una presentación.*

Demostración. Sea G un grupo. Tomando $S = G$ y $\varphi = \text{id}$, la propiedad universal da un homomorfismo $\hat{\varphi}: \langle G \rangle \rightarrow G$, que es sobreyectivo. Si $R = \ker \hat{\varphi}$, entonces $\langle \langle R \rangle \rangle = R$ y $G \cong \langle G \rangle / R = \langle G \mid R \rangle$. ■

Ejemplo 19.5. (a) $\mathbb{Z} \cong \langle a \mid \rangle$ y $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^n \rangle$.

(b) $\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. En el grupo $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ los generadores conmutan, luego G es abeliano y todo elemento es de la forma $a^m b^n$. Por la [proposición 19.3](#) existe un homomorfismo $G \rightarrow \mathbb{Z}^2$ con $a \mapsto (1, 0)$ y $b \mapsto (0, 1)$, que envía $a^m b^n$ en (m, n) ; es sobreyectivo, y es inyectivo porque $(m, n) = 0$ implica $m = n = 0$.

19.2 Productos libres y productos amalgamados

Definición 19.6 (Producto libre). Sean $G = \langle S_G \mid R_G \rangle$ y $H = \langle S_H \mid R_H \rangle$ grupos presentados con $S_G \cap S_H = \emptyset$. El *producto libre* de G y H es

$$G * H = \langle S_G \cup S_H \mid R_G \cup R_H \rangle.$$

Por la [proposición 19.3](#), hay homomorfismos canónicos $j_G: G \rightarrow G * H$ y $j_H: H \rightarrow G * H$, y $G * H$ está generado por $j_G(G) \cup j_H(H)$. Además, $G * H$ tiene la siguiente propiedad universal, que muestra que no depende de las presentaciones elegidas: dados homomorfismos $\varphi: G \rightarrow K$ y $\psi: H \rightarrow K$, existe un único homomorfismo $\Phi: G * H \rightarrow K$ con $\Phi \circ j_G = \varphi$ y $\Phi \circ j_H = \psi$. Por ejemplo, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid \rangle$ es el grupo libre generado por dos elementos.

Definición 19.7 (Producto amalgamado). Sean $\iota_G: K \rightarrow G$ e $\iota_H: K \rightarrow H$ homomorfismos de grupos. El *producto amalgamado* de G y H sobre K es

$$G *_K H = (G * H) / N, \quad N = \langle \langle \{j_G(\iota_G(k)) j_H(\iota_H(k))^{-1} : k \in K\} \rangle \rangle.$$

Lema 19.8. *Si K está generado por un conjunto C , entonces*

$$N = \langle \langle \{j_G(\iota_G(c)) j_H(\iota_H(c))^{-1} : c \in C\} \rangle \rangle.$$

En consecuencia, si $G = \langle S_G \mid R_G \rangle$ y $H = \langle S_H \mid R_H \rangle$, y para cada $c \in C$ elegimos palabras u_c en S_G y v_c en S_H que representan $\iota_G(c)$ e $\iota_H(c)$, entonces

$$G *_K H \cong \langle S_G \cup S_H \mid R_G \cup R_H \cup \{u_c v_c^{-1} : c \in C\} \rangle.$$

Demostración. Escribamos $x(k) = j_G(\iota_G(k))$, $y(k) = j_H(\iota_H(k))$ y N_C para el subgrupo normal del enunciado. Claramente $N_C \subset N$. El conjunto de los $k \in K$ tales que $x(k)y(k)^{-1} \in N_C$ contiene a C y es un subgrupo, pues

$$\begin{aligned} x(kk') y(kk')^{-1} &= x(k) [x(k') y(k')^{-1}] x(k)^{-1} \cdot [x(k) y(k)^{-1}], \\ x(k^{-1}) y(k^{-1})^{-1} &= x(k)^{-1} [x(k) y(k)^{-1}]^{-1} x(k). \end{aligned}$$

Luego es todo K , y $N \subset N_C$. La última afirmación se sigue de la definición de $G * H$ y de que el cociente de un grupo presentado por el subgrupo normal generado por nuevas relaciones se obtiene agregando esas relaciones a la presentación. ■

19.3 El enunciado

Teorema 19.9 (Seifert-van Kampen). Sea $X = A \cup B$, donde A y B son abiertos de X y A , B y $A \cap B$ son conexos por caminos. Sea $p \in A \cap B$, y sean $i_A: A \cap B \rightarrow A$, $i_B: A \cap B \rightarrow B$, $k_A: A \rightarrow X$ y $k_B: B \rightarrow X$ las inclusiones. Entonces el homomorfismo

$$\Phi: \pi_1(A, p) * \pi_1(B, p) \rightarrow \pi_1(X, p)$$

inducido por $(k_A)_*$ y $(k_B)_*$ es sobreyectivo, y su núcleo es el subgrupo normal generado por los elementos $i_{A*}(\omega) i_{B*}(\omega)^{-1}$, $\omega \in \pi_1(A \cap B, p)$. Es decir,

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(A, p) *_{\pi_1(A \cap B, p)} \pi_1(B, p).$$

En términos de presentaciones: si $\pi_1(A, p) = \langle C_A \mid R_A \rangle$, $\pi_1(B, p) = \langle C_B \mid R_B \rangle$, con $C_A \cap C_B = \emptyset$, y $\pi_1(A \cap B, p)$ está generado por C , entonces

$$\pi_1(X, p) = \langle C_A \cup C_B \mid R_A \cup R_B \cup R_* \rangle, \quad R_* = \{i_{A*}(\theta) i_{B*}(\theta)^{-1} : \theta \in C\},$$

donde $i_{A*}(\theta)$ y $i_{B*}(\theta)$ se escriben como palabras en C_A y en C_B , respectivamente.

La idea es que $\pi_1(X, p)$ no tiene más relaciones que las que provienen de cada parte, más las que se obtienen al igualar las expresiones, en A y en B , de cada generador de $\pi_1(A \cap B, p)$. La versión con presentaciones se sigue de la primera y del [lema 19.8](#). La demostración se encuentra en la sección [19.5](#).

Corolario 19.10. En las condiciones del teorema:

- (a) si $A \cap B$ es simplemente conexo, $\pi_1(X, p) \cong \pi_1(A, p) * \pi_1(B, p)$;
- (b) si B es simplemente conexo, $\pi_1(X, p) \cong \pi_1(A, p) / \langle \langle i_{A*} \pi_1(A \cap B, p) \rangle \rangle$.

19.4 Aplicaciones

Ejemplo 19.11 (La figura ocho). Sea $X = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{C}$, donde $C_1 = \{|z + 1| = 1\}$ y $C_2 = \{|z - 1| = 1\}$ son circunferencias que se cortan sólo en 0. Sean $A = X - \{2\}$ y $B = X - \{-2\}$, que son abiertos de X . El conjunto $C_2 - \{2\} = \{1 + e^{i\phi} : 0 < \phi < 2\pi\}$ es homeomorfo al intervalo $(0, 2\pi)$, y la homotopía $H(1 + e^{i\phi}, t) = 1 + e^{i((1-t)\phi + t\pi)}$ lo contrae sobre el punto $0 = 1 + e^{i\pi}$, que queda fijo. Extendiendo H por la identidad en C_1 (los dos cerrados C_1 y $C_2 - \{2\}$ de A se cortan sólo en 0, y se aplica el [lema 4.8](#)), vemos que A se retrae por deformación sobre C_1 . Del mismo modo B se retrae por deformación sobre C_2 , y $A \cap B = X - \{2, -2\}$ se retrae por deformación sobre $\{0\}$. Así $\pi_1(A, 0) \cong \mathbb{Z}$ está generado por el lazo a que recorre C_1 , $\pi_1(B, 0) \cong \mathbb{Z}$ está generado por el lazo b que recorre C_2 , y $A \cap B$ es simplemente conexo. Por el [corolario 19.10](#),

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \mid \rangle$$

es el grupo libre generado por dos elementos. El mismo argumento se aplica a cualquier espacio formado por dos circunferencias que se cortan en un único punto.

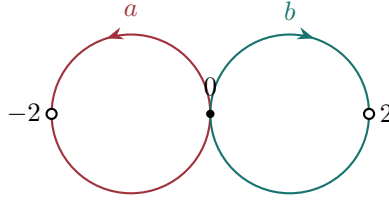


Figura 19.1: La figura ocho. Los abiertos $A = X - \{2\}$ y $B = X - \{-2\}$ se retraen por deformación sobre las circunferencias recorridas por a y por b .

Ejemplo 19.12 (El toro perforado y el toro). Sea $T = \Delta / \sim$ el toro del ejemplo 8.5, con $\Delta = [0, 1]^2$ y $\rho: \Delta \rightarrow T$ la proyección, y sea $c = \rho(m)$ con $m = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La imagen $W = \rho(\partial\Delta)$ es la unión de dos circunferencias $a = \rho([0, 1] \times \{0\})$ y $b = \rho(\{0\} \times [0, 1])$ que se cortan en un único punto $v = \rho(0, 0)$; por el ejemplo anterior, $\pi_1(W, v)$ es libre, generado por los lazos a y b .

$T - \{c\}$ se retrae por deformación sobre W . La proyección radial desde el centro $r(x) = m + \frac{x-m}{2\|x-m\|_\infty}$ lleva $\Delta - \{m\}$ sobre $\partial\Delta$, y $H(x, t) = (1-t)x + tr(x)$ es una homotopía en $\Delta - \{m\}$ que fija $\partial\Delta$; por lo tanto es compatible con $\sim$ e induce una homotopía $\tilde{H}$ en $T - \{c\}$. Para ver que $\tilde{H}$ es continua, sea $\Delta_\varepsilon = \{x \in \Delta : \|x - m\|_\infty \geq \varepsilon\}$, que es compacto e invariante por H . La aplicación $\Delta_\varepsilon \times I \rightarrow \rho(\Delta_\varepsilon) \times I$ es continua y sobreyectiva, de un compacto en un espacio de Hausdorff, luego es una aplicación cociente, y $\tilde{H}$ es continua en $\rho(\Delta_\varepsilon) \times I$. Como los interiores de los $\rho(\Delta_\varepsilon)$ cubren $T - \{c\}$, $\tilde{H}$ es continua. Por lo tanto $\pi_1(T - \{c\}) \cong \langle a, b \mid \rangle$ es libre de rango dos.

El toro. Sea B la imagen del disco abierto $\{\|x - m\| < \frac{1}{4}\}$, que es un abierto de T homeomorfo a un disco y, por lo tanto, simplemente conexo, y sea $A = T - \{c\}$. La intersección $A \cap B$ es un disco perforado, que se retrae por deformación sobre una circunferencia σ alrededor de c , de modo que $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$ está generado por σ . La retracción del párrafo anterior lleva σ sobre el lazo que recorre $\partial\Delta$, que en W es $aba^{-1}b^{-1}$. Por el lema 18.4, en $\pi_1(A, p)$, con $p \in A \cap B$, la clase de σ es conjugada de $aba^{-1}b^{-1}$ (con a y b transportados a p por un camino fijo), y los conjugados generan el mismo subgrupo normal. Por el corolario 19.10(b),

$$\pi_1(T) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2,$$

de acuerdo con el ejemplo 18.2.

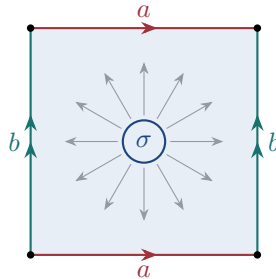


Figura 19.2: El toro perforado se retrae por deformación, radialmente desde el centro, sobre la imagen W del borde del cuadrado. La circunferencia σ alrededor del agujero se deforma en el lazo $aba^{-1}b^{-1}$.

Ejemplo 19.13 (El plano proyectivo). Sea $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ la aplicación cociente. Consideremos los abiertos de $\mathbb{RP}^2$

$$D = f(\{z > \frac{1}{4}\}), \quad M' = f(\{|z| < \frac{1}{2}\}).$$

Como en la demostración de la [proposición 8.18](#), f es inyectiva en $\{z > \frac{1}{4}\}$, de modo que D es homeomorfo a un disco abierto y es simplemente conexo; M' es una cinta de Möbius abierta, que se retrae por deformación sobre su alma $a = f(\{z = 0\})$ (la continuidad de la retracción se verifica como en el [ejemplo 19.12](#), usando las bandas compactas $\{|z| \leq c\}$ con $c < \frac{1}{2}$), y así $\pi_1(M') \cong \mathbb{Z}$ está generado por a ; y $D \cap M' = f(\{\frac{1}{4} < z < \frac{1}{2}\})$ es un anillo abierto, cuyo grupo fundamental está generado por la imagen σ de una circunferencia $z = c$, $\frac{1}{4} < c < \frac{1}{2}$. Con la parametrización $\phi(\theta, t)$ de la [proposición 8.18](#), σ recorre primero los puntos $f(\phi(\theta, c))$, $0 \leq \theta \leq \pi$, y luego, como $f(\phi(\theta, c)) = f(\phi(\theta - \pi, -c))$ para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, los puntos $f(\phi(\theta', -c))$, $0 \leq \theta' \leq \pi$. La homotopía $((\theta, t), s) \mapsto (\theta, (1-s)t)$ (usando la misma fórmula de ϕ para $\theta \in [0, 2\pi]$) lleva cada una de estas dos mitades sobre una vuelta completa del alma; por el [lema 18.4](#), y como $\pi_1(M')$ es abeliano, σ corresponde a a^2 en $\pi_1(M')$. Como σ es trivial en D , el [corolario 19.10\(b\)](#) da

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \langle a \mid a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En particular, $\mathbb{RP}^2$ no es simplemente conexo, y no es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

Ejemplo 19.14 (El bitoro). La superficie S de género dos se obtiene pegando dos toros perforados a lo largo de sus bordes. Así, $S = A \cup B$, donde A y B son abiertos que se retraen por deformación sobre toros perforados y $A \cap B$ es un anillo abierto, cuyo grupo fundamental está generado por una circunferencia σ que rodea la región de pegado. Por el [ejemplo 19.12](#), $\pi_1(A) = \langle a, b \mid \rangle$ y $\pi_1(B) = \langle c, d \mid \rangle$ son libres, y salvo conjugación σ corresponde a $aba^{-1}b^{-1}$ en A y a $(cdc^{-1}d^{-1})^{-1}$ en B , pues las dos mitades inducen orientaciones opuestas en σ . Reemplazando a, b por gag^{-1}, gbg^{-1} y c, d por hch^{-1}, hdh^{-1} para elementos g, h adecuados, que siguen siendo bases libres de $\pi_1(A)$ y de $\pi_1(B)$, podemos suponer que σ corresponde exactamente a $aba^{-1}b^{-1}$ y a $(cdc^{-1}d^{-1})^{-1}$. Por el [teorema 19.9](#),

$$\pi_1(S) \cong \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle.$$

19.5 Demostración del teorema de Seifert-van Kampen

Sean $G_A = \pi_1(A, p)$, $G_B = \pi_1(B, p)$ y $\Phi: G_A * G_B \rightarrow \pi_1(X, p)$ como en el enunciado. Sea N el subgrupo normal de $G_A * G_B$ generado por los elementos $j_A(i_{A*}\omega)j_B(i_{B*}\omega)^{-1}$, $\omega \in \pi_1(A \cap B, p)$, y $Q = (G_A * G_B)/N$.

N está contenido en el núcleo de Φ . Como $k_A \circ i_A = k_B \circ i_B$ es la inclusión de $A \cap B$ en X , se tiene $\Phi(j_A(i_{A*}\omega)) = (k_A)_*i_{A*}\omega = (k_B)_*i_{B*}\omega = \Phi(j_B(i_{B*}\omega))$. Luego Φ induce un homomorfismo $\bar{\Phi}: Q \rightarrow \pi_1(X, p)$, y el teorema equivale a que $\bar{\Phi}$ sea un isomorfismo.

$\bar{\Phi}$ es sobreyectivo. Por el [lema 18.11](#), todo lazo γ basado en p satisface $\gamma \simeq_p \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$, con cada γ_j un lazo basado en p contenido en A o en B . Así, $[\gamma]$ es el producto de las imágenes por Φ de las clases $[\gamma_j] \in G_A$ o G_B .

Notación. Si $U \in \{A, B\}$ y α es un lazo basado en p contenido en U , denotamos por $\langle \alpha \rangle_U \in Q$ la imagen en Q de la clase de α en $\pi_1(U, p)$. Se tiene:

- (I) si $\alpha \simeq_p \alpha'$ en U , entonces $\langle \alpha \rangle_U = \langle \alpha' \rangle_U$;

$$(II) \quad \langle \alpha * \beta \rangle_U = \langle \alpha \rangle_U \langle \beta \rangle_U;$$

(III) si α está contenido en $A \cap B$, entonces $\langle \alpha \rangle_A = \langle \alpha \rangle_B$, por la definición de N ;

$$(IV) \quad \bar{\Phi}(\langle \alpha \rangle_U) = [\alpha] \in \pi_1(X, p).$$

Lema 19.15. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ y $\beta_1, \dots, \beta_l$ lazos basados en p , con cada α_i contenido en $U_i \in \{A, B\}$ y cada β_j contenido en $V_j \in \{A, B\}$. Si $\alpha_1 * \dots * \alpha_k \simeq_p \beta_1 * \dots * \beta_l$ en X , entonces

$$\langle \alpha_1 \rangle_{U_1} \dots \langle \alpha_k \rangle_{U_k} = \langle \beta_1 \rangle_{V_1} \dots \langle \beta_l \rangle_{V_l} \quad \text{en } Q.$$

Aquí $\alpha_1 * \dots * \alpha_k$ denota el lazo que recorre α_i en el intervalo $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$; por el lema 17.6, es homotópico con extremos fijos a cualquier otra forma de agrupar la yuxtaposición.

El lema implica que $\bar{\Phi}$ es inyectivo. Como $G_A * G_B$ está generado por las imágenes de G_A y G_B , todo $x \in Q$ es de la forma $x = \langle \alpha_1 \rangle_{U_1} \dots \langle \alpha_k \rangle_{U_k}$. Si $\bar{\Phi}(x) = 1$, entonces $\alpha_1 * \dots * \alpha_k \simeq_p e_p$ en X , y el lema, aplicado con $l = 1$ y $\beta_1 = e_p$, da $x = \langle e_p \rangle_A = 1$.

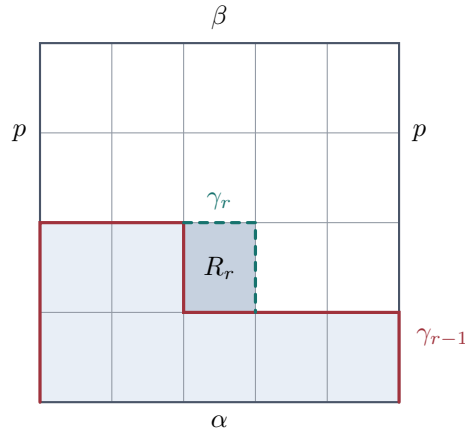


Figura 19.3: La cuadrícula de la demostración del lema 19.15. La poligonal γ_{r-1} separa los rectángulos sombreados en celeste ($R_1, \dots, R_{r-1}$) de los demás; γ_r se obtiene de ella reemplazando los lados izquierdo e inferior de R_r por los lados superior y derecho.

Demostración del lema 19.15. Sea $F: I \times I \rightarrow X$ una homotopía con extremos fijos de $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_k$ (en $s = 0$) a $\beta = \beta_1 * \dots * \beta_l$ (en $s = 1$); así $F(0, s) = F(1, s) = p$. Por el lema 7.20, aplicado al cubrimiento $\{F^{-1}(A), F^{-1}(B)\}$ del compacto $I \times I$, existen particiones

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1, \quad 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1,$$

tales que cada rectángulo $R = [x_{a-1}, x_a] \times [y_{b-1}, y_b]$ es aplicado por F en A o en B ; podemos suponer que los puntos i/k y j/l están entre los x_a . A cada rectángulo R le asignamos una etiqueta $U(R) \in \{A, B\}$ con $F(R) \subset U(R)$.

Caminos auxiliares. Para cada vértice v de la cuadrícula, sea $L(v)$ la intersección de las etiquetas de los rectángulos que contienen a v , y si $v = (x_a, 0)$ con $\frac{i-1}{k} < x_a < \frac{i}{k}$, intersequemos además con U_i ; análogamente en el lado superior con los V_j . En todos los casos $L(v)$ es A , B o $A \cap B$, es conexo por caminos, contiene a p y contiene a $F(v)$. Si

$F(v) = p$ porque v está en los lados verticales del cuadrado o es uno de los puntos $(i/k, 0)$, $(j/l, 1)$, tomamos $g_v = e_p$; en los demás casos elegimos un camino g_v de p a $F(v)$ contenido en $L(v)$.

Aristas. Para cada arista e de la cuadrícula, recorrida de un vértice v a un vértice w , sea F_e el camino F restringido a e y parametrizado linealmente, y sea $\lambda_e = g_v * F_e * \bar{g}_w$, que es un lazo basado en p . Si R es un rectángulo que contiene a e , entonces λ_e está contenido en $U(R)$. Definimos $\langle e \rangle = \langle \lambda_e \rangle_{U(R)}$; esto no depende de R , pues si e está en dos rectángulos con etiquetas distintas, λ_e está en $A \cap B$ y se aplica (iii). Si e está en un lado vertical del cuadrado, λ_e es constante y $\langle e \rangle = 1$.

Las poligonales γ_r . Numeremos los rectángulos $R_1, \dots, R_{mn}$ por filas, de abajo hacia arriba y, en cada fila, de izquierda a derecha. Para $0 \leq r \leq mn$, sea γ_r la poligonal formada por aristas de la cuadrícula que separa $R_1, \dots, R_r$ de los demás rectángulos, recorrida de izquierda a derecha y bajando cuando es necesario, completada con aristas de los lados verticales del cuadrado para que empiece en $(0, 0)$ y termine en $(1, 0)$. Si $e_1, \dots, e_q$ son sus aristas en orden, definimos $V(\gamma_r) = \langle e_1 \rangle \cdots \langle e_q \rangle \in Q$. Así, γ_0 es el lado inferior del cuadrado y γ_{mn} recorre el lado izquierdo, el lado superior y el lado derecho.

$V(\gamma_{r-1}) = V(\gamma_r)$. Sea $R = R_r$ y $U = U(R)$. Las poligonales γ_{r-1} y γ_r sólo difieren en que un arco del borde de R , formado por lados de R y que va de un vértice v a un vértice w de R , se reemplaza por el arco complementario de ∂R , que también va de v a w . (Si R no está en la primera columna, γ_{r-1} recorre el lado izquierdo de R hacia abajo y luego su lado inferior, y γ_r recorre el lado superior y luego el lado derecho hacia abajo.) Sean $e_1, \dots, e_s$ y $e'_1, \dots, e'_{s'}$ las aristas de ambos arcos. Usando U como etiqueta para todas ellas y cancelando los factores $\bar{g} * g$ en los vértices intermedios mediante homotopías en U , se obtiene

$$\lambda_{e_1} * \cdots * \lambda_{e_s} \simeq_p g_v * F_1 * \bar{g}_w, \quad \lambda_{e'_1} * \cdots * \lambda_{e'_{s'}} \simeq_p g_v * F_2 * \bar{g}_w$$

en U , donde F_1 y F_2 son las imágenes por F de los dos arcos. Estos arcos son caminos con los mismos extremos en el convexo R , luego homotópicos con extremos fijos en R , y por lo tanto $F_1 \simeq_p F_2$ en $F(R) \subset U$. Por (i) y (ii), $\langle e_1 \rangle \cdots \langle e_s \rangle = \langle e'_1 \rangle \cdots \langle e'_{s'} \rangle$, y como las demás aristas son comunes a γ_{r-1} y γ_r , se sigue la igualdad.

$V(\gamma_0) = \langle \alpha_1 \rangle_{U_1} \cdots \langle \alpha_k \rangle_{U_k}$. Sean $e_1, \dots, e_s$ las aristas del lado inferior contenidas en $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}] \times \{0\}$. Por la elección de los g_v , cada λ_{e_t} está contenido en U_i , y por (iii) podemos calcular $\langle e_t \rangle = \langle \lambda_{e_t} \rangle_{U_i}$. Cancelando los factores $\bar{g} * g$ intermedios dentro de U_i , y como los g_v de los extremos son constantes, $\lambda_{e_1} * \cdots * \lambda_{e_s}$ es homotópico con extremos fijos en U_i a una reparametrización de α_i . Por (i) y (ii), $\langle e_1 \rangle \cdots \langle e_s \rangle = \langle \alpha_i \rangle_{U_i}$. Del mismo modo, $V(\gamma_{mn}) = \langle \beta_1 \rangle_{V_1} \cdots \langle \beta_l \rangle_{V_l}$, pues las aristas de los lados verticales contribuyen con el factor 1.

Combinando los tres pasos, $\langle \alpha_1 \rangle_{U_1} \cdots \langle \alpha_k \rangle_{U_k} = V(\gamma_0) = V(\gamma_{mn}) = \langle \beta_1 \rangle_{V_1} \cdots \langle \beta_l \rangle_{V_l}$. ■

Bibliografia

- [1] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*, 2.^a ed. Springer, 1978.
- [2] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.
- [3] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- [5] E. L. Lima. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [6] J. R. Munkres. *Topology*, 2.^a ed. Prentice Hall, 2000.
- [7] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [8] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.