

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

MAT231 · CICLO 2023-1

Análisis Real 1

Cálculo diferencial e integral en $\mathbb{R}^m$ y en superficies

Notas de clase

Profesor: Dr. Jesus Zapata

Notas de: Marcelo Gallardo

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

Lima, 2023

Índice

Convenciones y notación	iii
1. Aplicaciones diferenciables	1
1.1. Derivadas parciales, direccionales y matriz jacobiana	1
1.2. Curvas en espacios vectoriales de dimensión finita	2
1.3. Derivadas direccionales en espacios vectoriales	3
1.4. Aplicaciones diferenciables	4
1.5. Caracterización geométrica de las aplicaciones diferenciables	6
1.6. Propiedades de las aplicaciones diferenciables	8
2. La integral de Riemann en cajas de $\mathbb{R}^m$	11
2.1. Motivación	11
2.2. Cajas de $\mathbb{R}^m$	11
2.3. Particiones de una caja	12
2.4. Definición de la integral	13
2.5. Propiedades de la integral	14
3. Teorema de Fubini y conjuntos de medida nula	18
3.1. Integración repetida	18
3.2. Conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^m$	19
4. Integral de Riemann en conjuntos acotados	21
4.1. Definición	21
4.2. Volumen de conjuntos acotados	21
4.3. Funciones integrables en conjuntos J -medibles	22
4.4. Propiedades de la integral	22
5. Fubini en conjuntos acotados e invarianza de la medida nula	25
5.1. Teorema de Fubini para conjuntos acotados	25
5.2. Invarianza de los conjuntos de medida nula	26
6. Homeomorfismos, difeomorfismos y cambio de variable	28
6.1. Cálculo versus análisis: un ejemplo	28
6.2. Homeomorfismos	29
6.3. Difeomorfismos	30
6.4. Teorema del cambio de variable	31
7. Superficies	33
7.1. Definiciones básicas	33
7.2. Ejemplos	33
7.3. Conjuntos de nivel como superficies	37

8. Aplicaciones diferenciables entre superficies	41
8.1. Motivación y engorde de parametrizaciones	41
8.2. Aplicaciones diferenciables en superficies	42
8.3. Aplicaciones de clase C^s en superficies de clase C^r	43
8.4. Espacio tangente	45
8.5. La derivada de una aplicación definida en una superficie	46
9. Integración en superficies	48
9.1. Integración en abiertos de $\mathbb{R}^m$	48
9.2. Integral en el dominio de una parametrización	49
9.3. Conjuntos de medida nula y conjuntos J -medibles en una superficie	51
9.4. Integral sobre compactos J -medibles	51
9.5. Ejemplos	52
10. Complementos: teorema de Sard, transversalidad e índice	54
10.1. Puntos críticos y valores regulares	54
10.2. Transversalidad	56
10.3. Índice de un campo de vectores	58
Bibliografía	61

Convenciones y notación

Notas de clase del curso Análisis Real 1 (MAT231) dictado por el Dr. Jesus Zapata en el ciclo 2023-1. Los capítulos 1 a 9 corresponden a las clases (referencias: [Li1, Sp, Mu1]); el Capítulo 10 es un complemento que no formó parte de ellas (referencias: [GP, Mi1]). Se usan las siguientes convenciones.

Símbolo	Significado
$U, V \subset \mathbb{R}^m$	conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$ (dominios)
$f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$	aplicación; $f = (f_1, \dots, f_k)$ en coordenadas
E, F	espacios vectoriales de dimensión finita
$\mathcal{L}(E, F), \mathcal{M}_{k \times m}$	aplicaciones lineales de E en F ; matrices reales $k \times m$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f}{\partial v}(a)$	derivada parcial y derivada direccional de f en a
$\nabla f(a), Jf(a)$	gradiente y matriz jacobiana de f en a
df_a	derivada (diferencial) de f en el punto a
$\ \cdot\ , \ \cdot\ _\infty, \langle \cdot, \cdot \rangle$	norma (euclidiana salvo mención), norma del máximo, producto interno
$\text{span}\{v_1, \dots, v_j\}$	subespacio generado por $v_1, \dots, v_j$
$\text{int } X, \overline{X}, \partial X$	interior, clausura y frontera de X
$A = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$	caja (rectángulo cerrado) de $\mathbb{R}^m$; $\text{vol}(A)$ su volumen
$\mathcal{P}, \mathcal{Q}; \ \mathcal{P}\ $	particiones de una caja; norma de una partición
$m_B(f), M_B(f)$	ínfimo y supremo de f en la caja B
$\underline{s}(f, \mathcal{P}), \overline{s}(f, \mathcal{P})$	sumas inferior y superior
$\int_A f, \overline{\int}_A f, \int_A f$	integral inferior, superior y (si coinciden) integral
$\mathbf{1}_X$	función característica (indicatriz) de X
$\tilde{f}$	extensión de f por cero fuera de su dominio
$D(f)$	conjunto de puntos de discontinuidad de f
π_I, π_m	proyecciones canónicas sobre las coordenadas en I o sobre $\mathbb{R}^m$
$Q_\varepsilon^m = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$	cubo abierto de $\mathbb{R}^m$ centrado en 0
$\mathbb{B}^m, \mathbb{S}^m$	bola abierta unitaria de $\mathbb{R}^m$; esfera unitaria de $\mathbb{R}^{m+1}$
$M \subset \mathbb{R}^n$ (o M^m)	superficie de dimensión m y clase C^r ($r \geq 1$) en $\mathbb{R}^n$
$\varphi: U_0 \rightarrow U$	parametrización local: $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $U \subset M$ abierto de M
$W \subset \mathbb{R}^n$	abierto del espacio ambiente
p, p_0, q	puntos de una superficie
$C^s, 1 \leq s \leq r$	clase de diferenciabilidad de aplicaciones definidas en superficies de clase C^r
$T_p M$	espacio tangente a M en p
$d\mu$ ($d\mu_M$)	elemento de volumen m -dimensional de la superficie M

Además:

- m denota la dimensión del dominio (o de la superficie), n la del espacio ambiente y k la del espacio de llegada. El rango de una aplicación lineal se denota por ℓ .
- Los resultados se numeran de manera correlativa dentro de cada capítulo (Teorema 3.2, Proposición 3.3, ...).
- Las inclusiones $\subset$ no son necesariamente estrictas. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Aplicaciones diferenciables

1.1 Derivadas parciales, direccionales y matriz jacobiana

Recordemos las nociones clásicas de derivada.

- (a) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I$. La *derivada* de f en a es

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R},$$

cuando el límite existe.

- (b) Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una función vectorial (una *curva*), se define del mismo modo

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}^k.$$

- (c) Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de varias variables y $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$.

Para cada $1 \leq i \leq m$, la *derivada parcial* i -ésima de f en a es

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{h} \in \mathbb{R},$$

cuando el límite existe.

Definición 1.1 (Gradiente). Si existen todas las derivadas parciales de $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ en a , el *gradiente* de f en a es

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right) \in \mathbb{R}^m.$$

Definición 1.2 (Derivada direccional). Dado $v \in \mathbb{R}^m$, la *derivada direccional* de $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ en a según v es

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R},$$

cuando el límite existe.

Observación 1.3. Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Sea ahora $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f = (f_1, \dots, f_k): U \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $a \in U$. Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{h} \in \mathbb{R}^k, \quad 1 \leq i \leq m,$$

y, para cada $v \in \mathbb{R}^m$, la derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^k$$

se definen como antes (cuando los límites existen). A partir de las derivadas parciales se define la *matriz jacobiana* de f en a :

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{k \times m}.$$

Sus filas son los gradientes $\nabla f_i(a)$, $1 \leq i \leq k$, y sus columnas son los vectores $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathbb{R}^k$, $1 \leq j \leq m$.

1.2 Curvas en espacios vectoriales de dimensión finita

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, E un espacio vectorial de dimensión finita, $\alpha: I \rightarrow E$ y $t_0 \in I$. Definimos

$$\alpha'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \in E,$$

cuando el límite existe. Notemos que $\alpha(t) - \alpha(t_0) \in E$ pues E es un espacio vectorial; el límite se toma respecto de cualquier norma de E (todas son equivalentes).

Proposición 1.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) α es derivable en t_0 .

(ii) Existe una función $\bar{\alpha}: I \rightarrow E$, continua en t_0 , tal que

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = (t - t_0) \bar{\alpha}(t) \quad \text{para todo } t \in I.$$

En esta situación, $\bar{\alpha}(t_0) = \alpha'(t_0)$.

Proposición 1.5. *Si una curva α es derivable en t_0 , entonces es continua en t_0 .*

Proposición 1.6 (Propiedades algebraicas). *Sean $\alpha, \beta: I \rightarrow E$ curvas y $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función, todas derivables en t_0 . Sea además $\phi: J \rightarrow I$ definida en un intervalo J , derivable en $s_0 \in J$, con $\phi(s_0) = t_0$. Entonces $\alpha + \beta$, $\lambda\alpha$ y $\alpha \circ \phi$ son derivables (en t_0 , t_0 y s_0 , respectivamente) y*

$$(\alpha + \beta)'(t_0) = \alpha'(t_0) + \beta'(t_0), \quad (\lambda\alpha)'(t_0) = \lambda'(t_0)\alpha(t_0) + \lambda(t_0)\alpha'(t_0),$$

$$(\alpha \circ \phi)'(s_0) = \phi'(s_0)\alpha'(t_0).$$

Proposición 1.7 (Derivada en coordenadas). *Sea $\{b_1, \dots, b_m\}$ una base de E y escribamos $\alpha(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) b_i$. Entonces α es derivable en t si y solo si cada α_i lo es y, en ese caso,*

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^m \alpha'_i(t) b_i.$$

Ejemplo 1.8. Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$, consideremos la curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{m \times m}$ dada por

$$\alpha(t) = e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!}.$$

Entonces α es derivable y $\alpha'(t) = Ae^{tA}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = A$ y $\alpha(\Delta t) \approx I + (\Delta t)A$ cuando $\Delta t \approx 0$.

Observación 1.9 (No hay teorema del valor medio para curvas). Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow E$ continua y derivable en (a, b) . En general *no* existe $c \in (a, b)$ tal que $\alpha(b) - \alpha(a) = (b - a)\alpha'(c)$; esto solo está garantizado cuando $\dim E = 1$. Por ejemplo, si $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, entonces $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = (0, 0)$, mientras que $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0)$ para todo t .

Aunque no se dispone del teorema del valor medio cuando $\dim E \geq 2$, sí se tiene el siguiente resultado, más débil pero de gran utilidad.

Proposición 1.10 (Desigualdad del valor medio). Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno (por ejemplo $\mathbb{R}^m$ con la norma euclidiana) y sea $\alpha: [a, b] \rightarrow E$ continua y derivable en (a, b) . Si existe $K \geq 0$ tal que $\|\alpha'(t)\| \leq K$ para todo $t \in (a, b)$, entonces

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq K(b - a).$$

Prueba. Podemos suponer $\alpha(b) \neq \alpha(a)$. Sea $u = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{\|\alpha(b) - \alpha(a)\|}$ y consideremos la función real $g(t) = \langle \alpha(t), u \rangle$, que es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , con $g'(t) = \langle \alpha'(t), u \rangle$. Por el teorema del valor medio en $\mathbb{R}$ existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| = g(b) - g(a) = (b - a)\langle \alpha'(c), u \rangle \leq (b - a)\|\alpha'(c)\| \leq K(b - a),$$

donde usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz. $\square$

Observación 1.11. Si además α' es continua, la desigualdad también se obtiene de $\|\alpha(b) - \alpha(a)\| = \|\int_a^b \alpha'(t) dt\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \leq K(b - a)$. El resultado es válido para cualquier norma de E (en la prueba se reemplaza $\langle \cdot, u \rangle$ por un funcional lineal de norma 1 que alcanza la norma de $\alpha(b) - \alpha(a)$).

1.3 Derivadas direccionales en espacios vectoriales

Definición 1.12. Sean E, F espacios vectoriales de dimensión finita, $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow F$ y $a \in U$. Para cada $v \in E$ definimos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in F,$$

cuando el límite existe.

Observación 1.13. Como E y F tienen dimensión finita, todas las normas son equivalentes; por ello la existencia y el valor de $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ no dependen de las normas elegidas en E y F .

Ejemplo 1.14. Sea $f: \mathcal{M}_{m \times m} \rightarrow \mathcal{M}_{m \times m}$ dada por $f(X) = X^2$. Dadas $A, V \in \mathcal{M}_{m \times m}$,

$$\frac{\partial f}{\partial V}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(A + tV)^2 - A^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (AV + VA + tV^2) = AV + VA.$$

Proposición 1.15. Sean $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow F$, $a \in U$ y $v \in E$, y sea $\delta > 0$ tal que $a + tv \in U$ para todo $|t| < \delta$. Son equivalentes:

(i) la derivada $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe;

(ii) la curva $f_v: (-\delta, \delta) \rightarrow F$, $f_v(t) = f(a + tv)$, es derivable en $t = 0$.

En esta situación, $f'_v(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Proposición 1.16. Si $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ existe $\frac{\partial f}{\partial(cv)}(a)$ y $\frac{\partial f}{\partial(cv)}(a) = c \frac{\partial f}{\partial v}(a)$. En efecto, $f_{cv}(t) = f_v(ct)$.

Proposición 1.17. Sean $f, g: U \rightarrow F$, $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ y $v \in E$. Si $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, $\frac{\partial g}{\partial v}(a)$ y $\frac{\partial \lambda}{\partial v}(a)$ existen, entonces

- (a) $\frac{\partial(f \pm g)}{\partial v}(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) \pm \frac{\partial g}{\partial v}(a)$;
- (b) $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial v}(a) = \frac{\partial \lambda}{\partial v}(a) f(a) + \lambda(a) \frac{\partial f}{\partial v}(a)$;
- (c) si $\lambda(a) \neq 0$, $\frac{\partial(f/\lambda)}{\partial v}(a) = \frac{\lambda(a) \frac{\partial f}{\partial v}(a) - \frac{\partial \lambda}{\partial v}(a) f(a)}{\lambda(a)^2}$.

Teorema 1.18 (Fermat). Sean $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in U$ un punto de máximo o de mínimo local de f . Si para algún $v \in E$ existe $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$. Equivalentemente, $f'_v(0) = 0$.

Lema 1.19 (Lema del valor medio). Sean $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ y $a, b \in U$ tales que el segmento $[a, b]$ está contenido en U . Sea $v = b - a$. Si $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ existe para todo $x \in [a, b]$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(c).$$

Prueba. Sea $f_v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_v(t) = f(a + tv)$. Para $t_0 \in [0, 1]$ se tiene $f'_v(t_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + t_0 v)$, de modo que, por hipótesis, f_v es derivable (y, por tanto, continua) en $[0, 1]$. Por el teorema del valor medio en $\mathbb{R}$ existe $s \in (0, 1)$ con

$$f(b) - f(a) = f_v(1) - f_v(0) = f'_v(s) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + sv),$$

y basta tomar $c = a + sv$. □

Corolario 1.20. Sean $U \subset E$ abierto y conexo y $f: U \rightarrow F$. Si $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $a \in U$ y todo $v \in E$, entonces f es constante.

Idea de la prueba. Aplicando el Lema 1.19 a cada coordenada de f se obtiene que f es constante en cada bola contenida en U ; como U es conexo, f es constante.

1.4 Aplicaciones diferenciables

Hasta aquí hemos estudiado derivadas de funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ según la dirección de un vector arbitrario v (la derivada direccional $\partial f / \partial v$), junto con sus propiedades algebraicas, el lema del valor medio y su corolario. Quedan por estudiar dos aspectos: la *composición* (regla de la cadena) y la *linealidad* de $v \mapsto \partial f / \partial v$. Los siguientes ejemplos muestran que la mera existencia de derivadas direccionales no basta.

Ejemplo 1.21. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, pero si $v = (v_1, v_2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \begin{cases} 0, & \text{si } v_1 = 0 \text{ o } v_2 = 0, \\ \text{no existe,} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.22. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ y, para $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Todas las derivadas direccionales existen, pero $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ no es lineal:

$$\frac{\partial f}{\partial (2, 1)}(0, 0) = \frac{4}{5} \neq 0 = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Ejemplo 1.23. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{|x| x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Un cálculo directo muestra que $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$; en particular $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ es lineal. Sin embargo, la curva $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t, t^2)$, es derivable y

$$(f \circ g)(t) = \frac{|t|}{2},$$

que no es derivable en $t = 0$. Es decir, no vale la regla de la cadena.

¿Qué debemos entender, entonces, por aplicación diferenciable? La idea es que, cerca de a , el incremento $f(x) - f(a)$ sea aproximadamente lineal en $x - a$:

- (a) si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a)$ para $x \approx a$;
- (b) si $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$: $f(x) - f(a) \approx Jf(a)(x - a)$ para $x \approx a$;
- (c) si $f: U \subset E \rightarrow F$: $f(x) - f(a) \approx T(x - a)$ para $x \approx a$, con $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Definición 1.24. Sean E, F espacios vectoriales de dimensión finita, $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow F$ y $a \in U$. Decimos que f es *diferenciable* en a cuando:

- (i) las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existen para todo $v \in E$;
- (ii) la aplicación $df_a: E \rightarrow F$, $df_a(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$, es lineal;
- (iii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - df_a(h)}{\|h\|} = 0$.

La aplicación lineal df_a es la *derivada* (o diferencial) de f en a . Decimos que f es diferenciable si lo es en todo punto de U .

Observación 1.25. Como E y F tienen dimensión finita, la diferenciabilidad de f no depende de las normas elegidas en E y F .

Ejemplo 1.26. La aplicación $f: \mathcal{M}_{m \times m} \rightarrow \mathcal{M}_{m \times m}$, $f(X) = X^2$, es diferenciable. En efecto:

- (a) por el Ejemplo 1.14, $\frac{\partial f}{\partial V}(A) = AV + VA$ para toda $V \in \mathcal{M}_{m \times m}$;
- (b) $df_A(V) = AV + VA$ es lineal en V ;
- (c) $f(A + H) - f(A) - df_A(H) = H^2$ y, con la norma del máximo de las entradas, $\|H^2\|_\infty \leq m\|H\|_\infty^2$. Luego

$$\frac{\|H^2\|_\infty}{\|H\|_\infty} \leq m\|H\|_\infty \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0.$$

Proposición 1.27. Sean $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow F$ y $a \in U$. Son equivalentes:

(i) f es diferenciable en a ;

(ii) existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = 0$;

(iii) existen $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $\rho: U \rightarrow F$ continua en a , con $\rho(a) = 0$, tales que

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + \rho(x)\|x - a\| \quad \text{para todo } x \in U.$$

En tal caso, $T = df_a$.

Prueba. (i) $\Rightarrow$ (ii): basta tomar $T = df_a$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): definimos

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|}, & \text{si } x \neq a, \\ 0, & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Por (ii), ρ es continua en a , y la igualdad de (iii) se cumple por construcción.

(iii) $\Rightarrow$ (i): sea $v \in E$. Para $t \neq 0$ pequeño,

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = T(v) + \frac{|t|}{t} \|v\| \rho(a + tv) \xrightarrow{t \rightarrow 0} T(v),$$

pues $|t|/t$ es acotado y $\rho(a + tv) \rightarrow \rho(a) = 0$. Así, $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = T(v)$, de modo que $df_a = T$ es lineal, y

$$\frac{f(a + h) - f(a) - df_a(h)}{\|h\|} = \rho(a + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

1.4.1 Diferenciabilidad general versus diferenciabilidad clásica

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I$. Son equivalentes: (i) f es derivable en a , es decir, existe $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$; (ii) f es diferenciable en a . En esta situación $df_a(v) = f'(a)v$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Más generalmente, toda aplicación lineal tiene una de las formas siguientes, y la derivada se identifica en cada caso con un objeto clásico:

f	aplicaciones lineales T	derivada
$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$T(v) = cv, c \in \mathbb{R}$	$df_a(v) = f'(a)v$
$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$	$T(v) = cv, c \in \mathbb{R}^k$	$df_a(v) = f'(a)v$
$f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$	$T(v) = \langle c, v \rangle, c \in \mathbb{R}^m$	$df_a(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle$
$f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$	$T(v) = Cv, C \in \mathcal{M}_{k \times m}$	$df_a(v) = Jf(a)v$

1.5 Caracterización geométrica de las aplicaciones diferenciables

Proposición 1.28.

(a) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k \geq 1$) y $a \in I$. Son equivalentes: (i) f es diferenciable en a ; (ii) existe $\bar{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^k$, continua en a , tal que $f(x) - f(a) = (x - a)\bar{f}(x)$ para todo $x \in I$. En este caso, $\bar{f}(a) = f'(a)$.

- (b) Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in U$. Son equivalentes: (i) f es diferenciable en a ; (ii) existe $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, continua en a , tal que

$$f(x) - f(a) = \langle \bar{f}(x), x - a \rangle \quad \text{para todo } x \in U.$$

En este caso, $\bar{f}(a) = \nabla f(a)$.

- (c) Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $a \in U$. Son equivalentes: (i) f es diferenciable en a ; (ii) existe $\bar{f}: U \rightarrow \mathcal{M}_{k \times m}$, continua en a , tal que

$$f(x) - f(a) = \bar{f}(x)(x - a) \quad \text{para todo } x \in U.$$

En este caso, $\bar{f}(a) = Jf(a)$.

Prueba. El ítem (a) es directo definiendo $\bar{f}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ para $x \neq a$ y $\bar{f}(a) = f'(a)$.

(b) (ii) $\Rightarrow$ (i): tenemos

$$f(a + h) - f(a) - \langle \bar{f}(a), h \rangle = \langle \bar{f}(a + h) - \bar{f}(a), h \rangle,$$

y, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$\frac{|\langle \bar{f}(a + h) - \bar{f}(a), h \rangle|}{\|h\|} \leq \|\bar{f}(a + h) - \bar{f}(a)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

por la continuidad de $\bar{f}$ en a . Luego f es diferenciable en a con $df_a(v) = \langle \bar{f}(a), v \rangle$; como también $df_a(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle$, resulta $\bar{f}(a) = \nabla f(a)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): por la Proposición 1.27, existe $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}$ continua en a con $\rho(a) = 0$ y $f(x) - f(a) = \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \rho(x)\|x - a\|$. Definimos

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \nabla f(a) + \rho(x) \frac{x - a}{\|x - a\|}, & \text{si } x \neq a, \\ \nabla f(a), & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Como $\langle x - a, x - a \rangle = \|x - a\|^2$, se tiene $f(x) - f(a) = \langle \bar{f}(x), x - a \rangle$ para todo $x \in U$. Además $\bar{f}$ es continua en a , pues $\rho(x) \rightarrow 0$ y $\frac{x - a}{\|x - a\|}$ es acotado.

(c) (ii) $\Rightarrow$ (i): si $\bar{f}_i(x)$ denota la i -ésima fila de $\bar{f}(x)$, entonces $f_i(x) - f_i(a) = \langle \bar{f}_i(x), x - a \rangle$, de modo que, por (b), cada f_i es diferenciable en a con $\nabla f_i(a) = \bar{f}_i(a)$. Por tanto, f es diferenciable en a y $Jf(a) = \bar{f}(a)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): si f es diferenciable en a , cada $f_i = \pi_i \circ f$ lo es, con $d(f_i)_a = \pi_i \circ df_a$. Por (b) existen $\bar{f}_i: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuas en a con $f_i(x) - f_i(a) = \langle \bar{f}_i(x), x - a \rangle$. Basta definir $\bar{f}(x)$ como la matriz cuyas filas son $\bar{f}_1(x), \dots, \bar{f}_k(x)$. $\square$

Corolario 1.29. Sean E, F espacios vectoriales de dimensión finita, $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow F$ y $a \in U$. Son equivalentes:

(i) f es diferenciable en a ;

(ii) existe $\bar{f}: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, continua en a , tal que $f(x) - f(a) = \bar{f}(x)(x - a)$ para todo $x \in U$.

En esta situación, $\bar{f}(a) = df_a$.

Prueba. Basta aplicar la Proposición 1.28 (c) escribiendo f en coordenadas respecto de bases $\{b_1, \dots, b_m\}$ de E y $\{u_1, \dots, u_k\}$ de F . $\square$

1.6 Propiedades de las aplicaciones diferenciables

Proposición 1.30. *Toda aplicación lineal $A: E \rightarrow F$ es diferenciable y $dA_a = A$ para todo $a \in E$. En efecto, $A(a + h) - A(a) - A(h) = 0$.*

Observación 1.31. Si $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es lineal, $JA(a)$ coincide, para todo a , con la matriz de A respecto de las bases canónicas. Por ejemplo, si $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ es una base de E , las proyecciones coordenadas $\pi_i^{\mathcal{B}}: E \rightarrow \mathbb{R}$ son lineales y, por tanto, diferenciables.

1.6.1 Diferenciabilidad y continuidad

Proposición 1.32. *Si $f: U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable en a , entonces es continua en a .*

Prueba. Por la Proposición 1.27, $f(x) = f(a) + df_a(x - a) + \rho(x)\|x - a\|$ para todo $x \in U$, donde ρ es continua en a y $\rho(a) = 0$. Cada sumando es continuo en a (df_a es lineal en dimensión finita), luego f también. $\square$

1.6.2 Álgebra de aplicaciones diferenciables

Proposición 1.33. *Sean $f, g: U \subset E \rightarrow F$ y $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $a \in U$. Entonces $f \pm g$, λf y (si $\lambda(a) \neq 0$) f/λ son diferenciables en a y, para todo $v \in E$,*

$$\begin{aligned} d(f \pm g)_a(v) &= df_a(v) \pm dg_a(v), \\ d(\lambda f)_a(v) &= \lambda(a) df_a(v) + d\lambda_a(v) f(a), \\ d(f/\lambda)_a(v) &= \frac{\lambda(a) df_a(v) - d\lambda_a(v) f(a)}{\lambda(a)^2}. \end{aligned}$$

Prueba. Probamos la regla del producto; las demás son análogas. Por el Corolario 1.29,

$$f(x) = f(a) + \bar{f}(x)(x - a), \quad \lambda(x) = \lambda(a) + \bar{\lambda}(x)(x - a),$$

con $\bar{f}: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ y $\bar{\lambda}: U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ continuas en a , $\bar{f}(a) = df_a$ y $\bar{\lambda}(a) = d\lambda_a$. Entonces

$$\lambda(x)f(x) - \lambda(a)f(a) = \lambda(x)(f(x) - f(a)) + (\lambda(x) - \lambda(a))f(a) = \Phi(x)(x - a),$$

donde $\Phi(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ está dada por $\Phi(x)v = \lambda(x)\bar{f}(x)v + (\bar{\lambda}(x)v)f(a)$. Como Φ es continua en a , λf es diferenciable en a y $d(\lambda f)_a(v) = \Phi(a)v = \lambda(a)df_a(v) + d\lambda_a(v)f(a)$. $\square$

Ejemplo 1.34 (Derivada del determinante). La función $\det: \mathcal{M}_{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, pues en coordenadas es polinomial. Sea $\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$ la base canónica de $\mathcal{M}_{m \times m}$. Calculemos $d(\det)_I$:

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(I) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I + tE_{ij}) - 1}{t} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t) - 1}{t} = 1, & \text{si } i = j, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{t} = 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Luego, si $V = \sum_{i,j} v_{ij} E_{ij}$, por linealidad de la derivada,

$$d(\det)_I(V) = \sum_{i,j} v_{ij} \frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(I) = \sum_{i=1}^m v_{ii} = \text{tr}(V).$$

Así, $\det(I + H) \approx 1 + \text{tr}(H)$ cuando $H \approx 0$. Si ahora $A \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$ (es decir, $\det A \neq 0$),

$$\begin{aligned} d(\det)_A(V) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A + tV) - \det(A)}{t} = \det(A) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I + tA^{-1}V) - \det(I)}{t} \\ &= \det(A) d(\det)_I(A^{-1}V) = \det(A) \text{tr}(A^{-1}V). \end{aligned}$$

1.6.3 Regla de la cadena

Teorema 1.35 (Regla de la cadena). Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^k$ abiertos, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $f(U) \subset V$ y $g: V \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si f es diferenciable en x_0 y g es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

En lenguaje matricial, $J(g \circ f)(x_0) = Jg(f(x_0)) Jf(x_0)$.

Prueba. Sea $y_0 = f(x_0)$. Por el Corolario 1.29, $f(x) - f(x_0) = \bar{f}(x)(x - x_0)$ y $g(y) - g(y_0) = \bar{g}(y)(y - y_0)$, con $\bar{f}$ continua en x_0 , $\bar{g}$ continua en y_0 , $\bar{f}(x_0) = df_{x_0}$ y $\bar{g}(y_0) = dg_{y_0}$. Entonces

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \bar{g}(f(x))(f(x) - f(x_0)) = [\bar{g}(f(x)) \circ \bar{f}(x)](x - x_0).$$

Como f es continua en x_0 , la aplicación $x \mapsto \bar{g}(f(x)) \circ \bar{f}(x)$ es continua en x_0 y vale $dg_{y_0} \circ df_{x_0}$ en x_0 . El Corolario 1.29 concluye la prueba. $\square$

Observación 1.36. El Ejemplo 1.23 muestra que la hipótesis de diferenciabilidad de f no puede reemplazarse por la mera existencia (ni siquiera la linealidad) de las derivadas direccionales.

1.6.4 Aplicaciones de clase C^r

Definición 1.37. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Una aplicación $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es de *clase C^1* si sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ existen y son continuas en U ; es de *clase C^r* ($r \geq 1$) si todas sus derivadas parciales de orden $\leq r$ existen y son continuas, y de *clase C^∞* si es de clase C^r para todo r . Por convención, C^0 denota las aplicaciones continuas.

Recordemos que toda aplicación de clase C^1 es diferenciable, y que sumas, productos y composiciones de aplicaciones de clase C^r son de clase C^r . Las aplicaciones polinomiales (por ejemplo, $\det, X \mapsto X^2$ o $X \mapsto XX^T$ en $\mathcal{M}_{m \times m}$) son de clase C^∞ .

1.6.5 Inyectividad y sobreyectividad de la derivada

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable y $a \in U$. Recordemos que

$$df_a(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = Jf(a)v,$$

donde

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_k(a) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \mid \cdots \mid \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right] \in \mathcal{M}_{k \times m}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Im}(df_a) = \text{span} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right\}, \quad \text{Ker}(df_a) = \text{span} \{ \nabla f_1(a), \dots, \nabla f_k(a) \}^\perp.$$

En consecuencia:

- df_a es *inyectiva* $\iff \{ \nabla f_1(a), \dots, \nabla f_k(a) \}$ genera $\mathbb{R}^m$ $\iff$ los vectores $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)$ son linealmente independientes;
- df_a es *sobreyectiva* $\iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)$ generan $\mathbb{R}^k$ $\iff$ los gradientes $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_k(a)$ son linealmente independientes.

La integral de Riemann en cajas de $\mathbb{R}^m$

2.1 Motivación

Diremos que un rectángulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ es *entero* si al menos uno de sus lados tiene longitud entera. Probemos, con ayuda de la integral, el siguiente hecho: *si un rectángulo está dividido en un número finito de rectángulos enteros (con lados paralelos a los ejes y de interiores disjuntos), entonces él también es entero.*

Sea $f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$. Para cualquier rectángulo se tiene

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{4\pi^2} (\cos(2\pi a) - \cos(2\pi b)) (\cos(2\pi c) - \cos(2\pi d)).$$

Si $b - a \in \mathbb{Z}$ o $d - c \in \mathbb{Z}$, uno de los factores se anula; es decir, la integral de f sobre un rectángulo entero es 0. Trasladando, podemos suponer que el rectángulo grande es $[0, B] \times [0, D]$ (la traslación preserva los rectángulos enteros). Por la aditividad de la integral (que justificaremos más adelante),

$$0 = \sum_C \iint_C f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{[0,B] \times [0,D]} f(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{4\pi^2} (1 - \cos(2\pi B)) (1 - \cos(2\pi D)),$$

donde la suma recorre los rectángulos C de la división. Luego $\cos(2\pi B) = 1$ o $\cos(2\pi D) = 1$, es decir, $B \in \mathbb{Z}$ o $D \in \mathbb{Z}$.

2.2 Cajas de $\mathbb{R}^m$

Una *caja* en $\mathbb{R}^m$ es un conjunto de la forma

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m] = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \quad a_i < b_i.$$

Definición 2.1. Sea $A = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ una caja.

- (a) El *centro* de A es el punto $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \dots, \frac{a_m+b_m}{2}\right)$.
- (b) Un *vértice* de A es un punto $c = (c_1, \dots, c_m)$ con $c_i \in \{a_i, b_i\}$ para todo i . El conjunto de vértices se denota $\text{vert}(A)$; hay 2^m vértices.
- (c) Una *cara* de A es un conjunto $C = C_1 \times \cdots \times C_m$ con $C_i \in \{\{a_i\}, \{b_i\}, [a_i, b_i]\}$ para todo i . Hay 3^m caras. La *dimensión* de la cara C es el número de índices i para los cuales $C_i = [a_i, b_i]$.
- (d) El *volumen* de A es $\text{vol}(A) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$.

Observación 2.2. Cualquier propiedad geométrica del volumen de una caja debe demostrarse a partir de esta definición. Por ejemplo, es sencillo probar que si $B \subset A$ son cajas, entonces $\text{vol}(B) \leq \text{vol}(A)$; otras propiedades no son tan sencillas.

2.3 Particiones de una caja

Una *partición* de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; los intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$, son los *intervalos de la partición*.

Definición 2.3. Sea $A = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ una caja. Una *partición* de A es un conjunto de la forma

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_m,$$

donde cada $\mathcal{P}_i$ es una partición de $[a_i, b_i]$. Una *caja de $\mathcal{P}$* es una caja $B = \prod_{i=1}^m I_i$, donde I_i es un intervalo de $\mathcal{P}_i$; escribimos $B \in \mathcal{P}$.

Proposición 2.4. Sea $\mathcal{P} = \prod_i \mathcal{P}_i$ una partición de A .

- (a) Si $B_1 \neq B_2$ son cajas de $\mathcal{P}$, entonces $B_1 \cap B_2$ es vacío o es una cara común de B_1 y B_2 de dimensión menor que m .
- (b) Si cada $\mathcal{P}_i$ divide $[a_i, b_i]$ en n_i intervalos, entonces $\mathcal{P}$ divide A en $\prod_{i=1}^m n_i$ cajas y, por la propiedad distributiva,

$$\text{vol}(A) = \sum_{B \in \mathcal{P}} \text{vol}(B).$$

Definición 2.5. Sean $\mathcal{P} = \prod_i \mathcal{P}_i$ y $\mathcal{Q} = \prod_i \mathcal{Q}_i$ particiones de A . Decimos que $\mathcal{Q}$ *refina* (o es más fina que) $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, es decir, si $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{Q}_i$ para todo i . La *suma* de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ es la partición

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \prod_{i=1}^m (\mathcal{P}_i \cup \mathcal{Q}_i),$$

que refina a $\mathcal{P}$ y a $\mathcal{Q}$.

Proposición 2.6. Sea $\mathcal{Q}$ una partición que refina a $\mathcal{P}$.

- (a) Toda caja $C \in \mathcal{Q}$ está contenida en una única caja $B \in \mathcal{P}$.
- (b) Para cada caja $B = \prod_i I_i \in \mathcal{P}$, la partición $\mathcal{Q}$ induce la partición

$$\mathcal{Q}|_B = \prod_{i=1}^m (\mathcal{Q}_i \cap I_i)$$

de B , cuyas cajas son exactamente las cajas $C \in \mathcal{Q}$ contenidas en B . En particular,

$$\text{vol}(B) = \sum_{C \in \mathcal{Q}, C \subset B} \text{vol}(C).$$

Definición 2.7. La *norma* $\|\mathcal{P}\|$ de una partición $\mathcal{P} = \prod_i \mathcal{P}_i$ es la mayor de las longitudes de los intervalos de todas las particiones $\mathcal{P}_i$. Equivalentemente, $\|\mathcal{P}\| = \max_{B \in \mathcal{P}} \text{diam}_\infty(B)$, donde diam_∞ es el diámetro respecto de la norma del máximo.

Notación. Si $B = \prod_i [c_i, d_i] \subset A = \prod_i [a_i, b_i]$ es una caja, denotamos por $\mathcal{P}(B) = \text{vert}(A) + \text{vert}(B)$ la partición de A dada por $\prod_{i=1}^m \{a_i, c_i, d_i, b_i\}$. Claramente $B \in \mathcal{P}(B)$. Más generalmente, para cajas $B_1, \dots, B_n \subset A$, $\text{vert}(A) + \sum_k \text{vert}(B_k)$ denota la partición de A generada por todas las coordenadas de los vértices de $A, B_1, \dots, B_n$.

2.4 Definición de la integral

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en una caja $A \subset \mathbb{R}^m$. Dada una partición $\mathcal{P}$ de A , definimos:

- (a) para cada caja $B \in \mathcal{P}$, $m_B(f) = \inf_{x \in B} f(x)$ y $M_B(f) = \sup_{x \in B} f(x)$;
- (b) la *suma inferior* y la *suma superior*

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} m_B(f) \text{vol}(B), \quad \bar{s}(f, \mathcal{P}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} M_B(f) \text{vol}(B).$$

Observación 2.8. Para toda partición $\mathcal{P}$ de A se cumple $m_A(f) \text{vol}(A) \leq \underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{P}) \leq M_A(f) \text{vol}(A)$.

Proposición 2.9. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son particiones de A con $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, entonces

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{s}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{P}).$$

Prueba. Por la Proposición 2.6, y dado que $m_B(f) \leq m_C(f)$ si $C \subset B$,

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{C \in \mathcal{Q} \\ C \subset B}} m_B(f) \text{vol}(C) \leq \sum_{B \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{C \in \mathcal{Q} \\ C \subset B}} m_C(f) \text{vol}(C) = \underline{s}(f, \mathcal{Q}).$$

La desigualdad para las sumas superiores es análoga. □

Definición 2.10. La *integral inferior* y la *integral superior* de f en A son

$$\int_A f(x) dx = \sup_{\mathcal{P}} \underline{s}(f, \mathcal{P}), \quad \overline{\int}_A f(x) dx = \inf_{\mathcal{P}} \bar{s}(f, \mathcal{P}),$$

donde el supremo y el ínfimo se toman sobre todas las particiones de A . Decimos que f es *integrable* cuando $\int_A f(x) dx = \overline{\int}_A f(x) dx$; en ese caso, este valor común es la *integral* de f en A y se denota $\int_A f(x) dx$ (o simplemente $\int_A f$).

Ejemplo 2.11. Toda función constante $f \equiv c$ en una caja A es integrable y $\int_A c dx = c \text{vol}(A)$. En efecto, por la Proposición 2.4, para toda partición $\mathcal{P}$,

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) = \bar{s}(f, \mathcal{P}) = c \sum_{B \in \mathcal{P}} \text{vol}(B) = c \text{vol}(A).$$

Ejemplo 2.12. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ una caja, $X \subset A$ y $\mathbf{1}_X: A \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de X .

- (a) Si X tiene interior vacío, entonces $\int_A \mathbf{1}_X(x) dx = 0$: toda caja B de una partición tiene interior no vacío, luego contiene un punto que no está en X , así que $m_B(\mathbf{1}_X) = 0$ y $\underline{s}(\mathbf{1}_X, \mathcal{P}) = 0$ para toda $\mathcal{P}$.
- (b) Si X es denso en A , entonces $\overline{\int}_A \mathbf{1}_X(x) dx = \text{vol}(A)$: toda caja B de una partición contiene puntos de X , así que $M_B(\mathbf{1}_X) = 1$ y $\bar{s}(\mathbf{1}_X, \mathcal{P}) = \text{vol}(A)$.

En particular, si X tiene interior vacío y es denso en A (por ejemplo, $X = A \cap \mathbb{Q}^m$), entonces $\mathbf{1}_X$ no es integrable.

Lema 2.13. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una caja $B \subset \text{int}(A)$ tal que $\text{vol}(A) - \text{vol}(B) < \varepsilon$.

Proposición 2.14. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ una caja y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \text{int}(A)$. Entonces f es integrable y $\int_A f(x) dx = c \text{vol}(A)$.

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $B \subset \text{int}(A)$ una caja como en el Lema 2.13. Consideremos la partición $\mathcal{P}(B) = \text{vert}(A) + \text{vert}(B)$, de la cual B es una caja. Como $f = c$ en B , se tiene $M_B(f) = c$ y, usando $\sum_{C \neq B} \text{vol}(C) = \text{vol}(A) - \text{vol}(B)$,

$$\bar{s}(f, \mathcal{P}(B)) - c \text{vol}(A) = \sum_{\substack{C \in \mathcal{P}(B) \\ C \neq B}} (M_C(f) - c) \text{vol}(C) \leq (M_A(f) - c)\varepsilon.$$

Por lo tanto $\bar{\int}_A f \leq \bar{s}(f, \mathcal{P}(B)) \leq c \text{vol}(A) + (M_A(f) - c)\varepsilon$, con $M_A(f) - c \geq 0$. Análogamente,

$$c \text{vol}(A) + (m_A(f) - c)\varepsilon \leq \underline{s}(f, \mathcal{P}(B)) \leq \underline{\int}_A f,$$

con $m_A(f) - c \leq 0$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\bar{\int}_A f \leq c \text{vol}(A) \leq \underline{\int}_A f$. Dado que siempre $\underline{\int}_A f \leq \bar{\int}_A f$ (Proposición 2.18), concluimos que f es integrable y $\int_A f = c \text{vol}(A)$. $\square$

Corolario 2.15. Para toda caja A : $\int_A \mathbf{1}_{\text{int}(A)}(x) dx = \text{vol}(A)$ y $\int_A \mathbf{1}_{\partial A}(x) dx = 0$.

Proposición 2.16. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ una caja y sean $B_1, \dots, B_n$ cajas tales que $A = \bigcup_{j=1}^n B_j$ y $\text{int}(B_i \cap B_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces

$$\text{vol}(A) = \sum_{j=1}^n \text{vol}(B_j).$$

Prueba. Si las B_j son las cajas de una partición de A , el resultado es la Proposición 2.4. En general, sea $\mathcal{P} = \text{vert}(A) + \sum_{k=1}^n \text{vert}(B_k)$. Cada $\mathcal{P}(B_k)$ es refinada por $\mathcal{P}$, de modo que B_k es la unión de las cajas de $\mathcal{P}$ contenidas en ella. Como $A = \bigcup_k B_k$ y las B_k tienen interiores disjuntos, toda caja $C \in \mathcal{P}$ está contenida en exactamente una caja B_k . Por la Proposición 2.6,

$$\text{vol}(A) = \sum_{C \in \mathcal{P}} \text{vol}(C) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{C \in \mathcal{P} \\ C \subset B_k}} \text{vol}(C) = \sum_{k=1}^n \text{vol}(B_k). \quad \square$$

2.5 Propiedades de la integral

Lema 2.17. Para cualesquiera particiones $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ de A se cumple $\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{Q})$.

Prueba. Por la Proposición 2.9, $\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{s}(f, \mathcal{P} + \mathcal{Q}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{P} + \mathcal{Q}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{Q})$. $\square$

Proposición 2.18. Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces $\underline{\int}_A f(x) dx \leq \bar{\int}_A f(x) dx$.

Prueba. Fijemos una partición $\mathcal{Q}$. Por el Lema 2.17, $\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{Q})$ para toda $\mathcal{P}$; tomando supremo en $\mathcal{P}$, $\underline{\int}_A f \leq \bar{s}(f, \mathcal{Q})$. Tomando ahora ínfimo en $\mathcal{Q}$, $\underline{\int}_A f \leq \bar{\int}_A f$. $\square$

Proposición 2.19 (Criterio de integrabilidad). Una función acotada $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y solo si

$$(*) \quad \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe una partición } \mathcal{P} \text{ de } A \text{ tal que } \bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Prueba. Si vale (*), para cada $\varepsilon > 0$ tenemos $\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \int_A f \leq \bar{\int}_A f \leq \bar{s}(f, \mathcal{P})$ con $\bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$; luego $0 \leq \bar{\int}_A f - \int_A f < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y f es integrable.

Recíprocamente, sea f integrable y $\varepsilon > 0$. Por definición de supremo e ínfimo existen particiones $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ tales que

$$\int_A f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{s}(f, \mathcal{P}_1), \quad \bar{s}(f, \mathcal{P}_2) < \int_A f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, por la Proposición 2.9,

$$\int_A f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{s}(f, \mathcal{P}_1) \leq \underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{P}_2) < \int_A f + \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde $\bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$. □

Proposición 2.20 (Integrabilidad de las funciones continuas). *Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ para toda partición $\mathcal{P}$ de A con $\|\mathcal{P}\| < \delta$. En particular, toda función continua en una caja es integrable.*

Prueba. Como A es compacto, f es uniformemente continua en A : dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon / \text{vol}(A)$ si $\|x - y\|_\infty < \delta$. Sea $\mathcal{P}$ una partición con $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Cada caja $B \in \mathcal{P}$ es compacta, así que existen $x_B, y_B \in B$ con $M_B(f) = f(x_B)$ y $m_B(f) = f(y_B)$; como $\|x_B - y_B\|_\infty \leq \|\mathcal{P}\| < \delta$,

$$\bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} (f(x_B) - f(y_B)) \text{vol}(B) < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(A)} \sum_{B \in \mathcal{P}} \text{vol}(B) = \varepsilon.$$

Finalmente, existen particiones de norma arbitrariamente pequeña: basta dividir cada $[a_i, b_i]$ en N intervalos iguales con $(b_i - a_i)/N < \delta$. □

Proposición 2.21 (Aditividad geométrica). *Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\mathcal{P}$ una partición de A . Entonces*

$$\int_{\bigcup A} f(x) \, dx = \sum_{B \in \mathcal{P}} \int_{\bigcup B} f(x) \, dx, \quad \bar{\int}_A f(x) \, dx = \sum_{B \in \mathcal{P}} \bar{\int}_B f(x) \, dx.$$

En particular, f es integrable en A si y solo si $f|_B$ es integrable para toda caja $B \in \mathcal{P}$ y, en ese caso, $\int_A f(x) \, dx = \sum_{B \in \mathcal{P}} \int_B f(x) \, dx$.

Prueba. Probamos la igualdad para la integral superior; la otra es análoga.

($\geq$) Para toda partición $\mathcal{Q}$ de A , como $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{Q}$ y $(\mathcal{P} + \mathcal{Q})|_B$ es una partición de cada $B \in \mathcal{P}$,

$$\bar{s}(f, \mathcal{Q}) \geq \bar{s}(f, \mathcal{P} + \mathcal{Q}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} \bar{s}(f|_B, (\mathcal{P} + \mathcal{Q})|_B) \geq \sum_{B \in \mathcal{P}} \bar{\int}_B f.$$

Tomando ínfimo en $\mathcal{Q}$ se obtiene $\bar{\int}_A f \geq \sum_B \bar{\int}_B f$.

($\leq$) Para cada $B \in \mathcal{P}$ sea $\mathcal{Q}_B$ una partición de B . Sea $\mathcal{Q}$ la partición de A generada por $\mathcal{P}$ y por las coordenadas de todas las particiones $\mathcal{Q}_B$. Entonces $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}|_B$ refina a $\mathcal{Q}_B$ para cada B , de modo que

$$\bar{\int}_A f \leq \bar{s}(f, \mathcal{Q}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} \bar{s}(f|_B, \mathcal{Q}|_B) \leq \sum_{B \in \mathcal{P}} \bar{s}(f|_B, \mathcal{Q}_B).$$

Tomando ínfimo en cada Q_B (de manera independiente), $\bar{\int}_A f \leq \sum_B \bar{\int}_B f$.

Finalmente, restando ambas igualdades, $\bar{\int}_A f - \underline{\int}_A f = \sum_B (\bar{\int}_B f - \underline{\int}_B f)$, y cada sumando es ≥ 0 ; así, el primer miembro es nulo si y solo si lo son todos los sumandos. $\square$

Proposición 2.22 (Aditividad algebraica). Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas. Entonces

$$\underline{\int}_A f + \underline{\int}_A g \leq \underline{\int}_A (f + g), \quad \bar{\int}_A (f + g) \leq \bar{\int}_A f + \bar{\int}_A g.$$

En particular, si f y g son integrables, $f + g$ es integrable y $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.

Prueba. Para todo conjunto X y funciones acotadas se cumple $\inf_X f + \inf_X g \leq \inf_X (f + g)$; luego $m_B(f) + m_B(g) \leq m_B(f + g)$ para cada caja B y, sumando, $\underline{s}(f, \mathcal{P}) + \underline{s}(g, \mathcal{P}) \leq \underline{s}(f + g, \mathcal{P})$. Dadas dos particiones $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$,

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) + \underline{s}(g, \mathcal{Q}) \leq \underline{s}(f, \mathcal{P} + \mathcal{Q}) + \underline{s}(g, \mathcal{P} + \mathcal{Q}) \leq \underline{s}(f + g, \mathcal{P} + \mathcal{Q}) \leq \underline{\int}_A (f + g).$$

Tomando supremo en $\mathcal{P}$ y en $\mathcal{Q}$ se obtiene la primera desigualdad. La segunda es análoga, usando $\sup_X (f + g) \leq \sup_X f + \sup_X g$. Si f, g son integrables,

$$\underline{\int}_A f + \underline{\int}_A g \leq \underline{\int}_A (f + g) \leq \bar{\int}_A (f + g) \leq \bar{\int}_A f + \bar{\int}_A g. \quad \square$$

Proposición 2.23 (Funciones que coinciden en el interior). Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \text{int}(A)$. Entonces $\underline{\int}_A f = \underline{\int}_A g$ y $\bar{\int}_A f = \bar{\int}_A g$. En particular, f es integrable si y solo si g lo es y, en ese caso, $\int_A f = \int_A g$.

Prueba. Escribimos $f = g + (f - g)$. Como $f - g$ es acotada y nula en $\text{int}(A)$, por la Proposición 2.14 es integrable con integral 0. Por la aditividad algebraica, $\underline{\int}_A f \geq \underline{\int}_A g + \underline{\int}_A (f - g) = \underline{\int}_A g$. Intercambiando f y g se obtiene la otra desigualdad; el caso de la integral superior es análogo. $\square$

Proposición 2.24 (Comparación). Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas con $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$. Entonces $\underline{\int}_A f \leq \underline{\int}_A g$ y $\bar{\int}_A f \leq \bar{\int}_A g$. En particular, si ambas son integrables, $\int_A f \leq \int_A g$.

Prueba. Si $f \leq g$ en un conjunto X , entonces $\inf_X f \leq \inf_X g$ y $\sup_X f \leq \sup_X g$. Por tanto $\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{s}(g, \mathcal{P})$ y $\bar{s}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{s}(g, \mathcal{P})$ para toda partición $\mathcal{P}$. $\square$

Proposición 2.25 (Producto por un escalar). Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces:

$$(a) \quad \underline{\int}_A cf = c \underline{\int}_A f \text{ y } \bar{\int}_A cf = c \bar{\int}_A f \text{ para todo } c \geq 0;$$

$$(b) \quad \underline{\int}_A (-f) = -\bar{\int}_A f \text{ y } \bar{\int}_A (-f) = -\underline{\int}_A f.$$

En particular, si f es integrable, cf es integrable y $\int_A cf = c \int_A f$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Prueba. Si $c \geq 0$, entonces $\inf_X(cf) = c \inf_X f$ y $\sup_X(cf) = c \sup_X f$; luego $\underline{s}(cf, \mathcal{P}) = c \underline{s}(f, \mathcal{P})$ y $\bar{s}(cf, \mathcal{P}) = c \bar{s}(f, \mathcal{P})$ para toda $\mathcal{P}$. Para (b), $\inf_X(-f) = -\sup_X f$, de modo que $m_B(-f) = -M_B(f)$ y $\underline{s}(-f, \mathcal{P}) = -\bar{s}(f, \mathcal{P})$. $\square$

Proposición 2.26 (Desigualdad triangular). Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

Prueba. Para todo conjunto X y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada,

$$\sup_X |f| - \inf_X |f| = \sup_{x,y \in X} ||f(x)| - |f(y)|| \leq \sup_{x,y \in X} |f(x) - f(y)| = \sup_X f - \inf_X f.$$

Luego $\bar{s}(|f|, \mathcal{P}) - \underline{s}(|f|, \mathcal{P}) \leq \bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P})$ para toda partición $\mathcal{P}$, y $|f|$ es integrable por el criterio de integrabilidad. Finalmente, de $-|f| \leq f \leq |f|$ y de las Proposiciones 2.24 y 2.25 se obtiene $-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|$. $\square$

Ejemplo 2.27. Sea A una caja de $\mathbb{R}^m$ y $B \subset A$ otra caja. Entonces $\mathbf{1}_B: A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $\int_A \mathbf{1}_B(x) dx = \text{vol}(B)$.

En efecto, consideremos la partición $\mathcal{P}(B) = \text{vert}(A) + \text{vert}(B)$. Por la aditividad geométrica,

$$\overline{\int}_A \mathbf{1}_B = \sum_{C \in \mathcal{P}(B)} \overline{\int}_C \mathbf{1}_B = \overline{\int}_B \mathbf{1}_B + \sum_{\substack{C \in \mathcal{P}(B) \\ C \neq B}} \overline{\int}_C \mathbf{1}_B = \text{vol}(B) + 0,$$

pues $\mathbf{1}_B \equiv 1$ en B y, para $C \neq B$, $\mathbf{1}_B$ se anula en $\text{int}(C)$ (Proposición 2.14). Del mismo modo, $\underline{\int}_A \mathbf{1}_B = \text{vol}(B)$.

Teorema de Fubini y conjuntos de medida nula

3.1 Integración repetida

Sean $A_1 \subset \mathbb{R}^m$ y $A_2 \subset \mathbb{R}^n$ cajas, de modo que $A_1 \times A_2$ es una caja de $\mathbb{R}^{m+n}$, y sea $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Para cada $y \in A_2$ definimos $f_y: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$.

Observación 3.1. Si f es continua, cada f_y es continua. Sin embargo, f puede ser integrable sin que todas las f_y lo sean.

Ejemplo 3.2. Sea $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \neq 1, \\ 1, & \text{si } y = 1 \text{ y } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{si } y = 1 \text{ y } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Como $f = 0$ en $(0, 1)^2 = \text{int}([0, 1]^2)$, f es integrable (Proposición 2.14). No obstante, $f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ no es integrable, pues $\int_0^1 f_1 = -1$ y $\overline{\int}_0^1 f_1 = 1$.

Por este motivo consideramos las funciones $i_1, I_1: A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$i_1(y) = \int_{\underline{A}_1} f_y(x) dx = \int_{\underline{A}_1} f(x, y) dx, \quad I_1(y) = \overline{\int}_{A_1} f_y(x) dx = \overline{\int}_{A_1} f(x, y) dx.$$

Como f es acotada, también lo son i_1 e I_1 :

$$m_A(f) \text{vol}(A_1) \leq i_1(y) \leq I_1(y) \leq M_A(f) \text{vol}(A_1) \quad \text{para todo } y \in A_2, \quad A = A_1 \times A_2.$$

Teorema 3.3 (Fubini). Si $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es (acotada e) integrable, entonces i_1 e I_1 son integrables en A_2 y

$$\int_{A_1 \times A_2} f(x, y) dx dy = \int_{A_2} i_1(y) dy = \int_{A_2} I_1(y) dy.$$

Es decir,

$$\int_{A_1 \times A_2} f(x, y) dx dy = \int_{A_2} \left(\int_{\underline{A}_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{A_2} \left(\overline{\int}_{A_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Prueba. Toda partición de $A_1 \times A_2$ es de la forma $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, con $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ particiones de A_1 y A_2 , y sus cajas son los productos $B_1 \times B_2$ con $B_1 \in \mathcal{P}_1$, $B_2 \in \mathcal{P}_2$. Así,

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) = \sum_{B_2 \in \mathcal{P}_2} \left(\sum_{B_1 \in \mathcal{P}_1} m_{B_1 \times B_2}(f) \text{vol}(B_1) \right) \text{vol}(B_2).$$

Fijemos $B_2 \in \mathcal{P}_2$ e $y \in B_2$. Como $m_{B_1 \times B_2}(f) \leq m_{B_1}(f_y)$,

$$\sum_{B_1 \in \mathcal{P}_1} m_{B_1 \times B_2}(f) \text{vol}(B_1) \leq \sum_{B_1 \in \mathcal{P}_1} m_{B_1}(f_y) \text{vol}(B_1) = \underline{s}(f_y, \mathcal{P}_1) \leq i_1(y).$$

Como esto vale para todo $y \in B_2$, el primer miembro es $\leq m_{B_2}(i_1)$. Multiplicando por $\text{vol}(B_2)$ y sumando,

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{B_2 \in \mathcal{P}_2} m_{B_2}(i_1) \text{vol}(B_2) = \underline{s}(i_1, \mathcal{P}_2) \leq \int_{\underline{A}_2} i_1(y) dy.$$

Tomando supremo en $\mathcal{P}$, $\int_{\underline{A}_1 \times \underline{A}_2} f \leq \int_{\underline{A}_2} i_1$. Análogamente, $\bar{\int}_{\underline{A}_2} I_1 \leq \bar{\int}_{\underline{A}_1 \times \underline{A}_2} f$. Como $i_1 \leq I_1$, se obtiene la cadena

$$\int_{\underline{A}_1 \times \underline{A}_2} f \leq \int_{\underline{A}_2} i_1 \leq \bar{\int}_{\underline{A}_2} i_1 \leq \bar{\int}_{\underline{A}_2} I_1 \leq \bar{\int}_{\underline{A}_1 \times \underline{A}_2} f,$$

y también $\int_{\underline{A}_2} i_1 \leq \int_{\underline{A}_2} I_1 \leq \bar{\int}_{\underline{A}_2} I_1$. Como f es integrable, los extremos coinciden, luego todas las desigualdades son igualdades: i_1 e I_1 son integrables y sus integrales valen $\int_{\underline{A}_1 \times \underline{A}_2} f$. $\square$

Corolario 3.4. *Bajo las mismas hipótesis, intercambiando los papeles de x e y ,*

$$\int_{\underline{A}_1 \times \underline{A}_2} f(x, y) dx dy = \int_{\underline{A}_1} \left(\int_{\underline{A}_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\underline{A}_1} \left(\bar{\int}_{\underline{A}_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Corolario 3.5. *Si $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable, las funciones f_y y $f_x = f(x, \cdot)$ son continuas (luego integrables) y*

$$\int_{\underline{A}_1 \times \underline{A}_2} f(x, y) dx dy = \int_{\underline{A}_2} \left(\int_{\underline{A}_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\underline{A}_1} \left(\int_{\underline{A}_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Además, las funciones $y \mapsto \int_{\underline{A}_1} f(x, y) dx$ y $x \mapsto \int_{\underline{A}_2} f(x, y) dy$ son continuas.

3.2 Conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^m$

Definición 3.6. Decimos que $X \subset \mathbb{R}^m$ tiene *medida nula* en $\mathbb{R}^m$ cuando, para todo $\varepsilon > 0$, existe una colección numerable $\{B_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de cajas de $\mathbb{R}^m$ tal que

$$X \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{vol}(B_i) < \varepsilon.$$

Ejemplo 3.7. Todo conjunto numerable $X \subset \mathbb{R}^m$ tiene medida nula. Sea $\varepsilon > 0$.

- (a) Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ es finito, las cajas $B_i = \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(x_i, \frac{1}{2} \sqrt[n]{\varepsilon/(2n)})$ (cubos de lado $\sqrt[n]{\varepsilon/(2n)}$ centrados en x_i) cubren X y $\sum_{i=1}^n \text{vol}(B_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
- (b) Si $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ es infinito, tomamos $B_i = \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(x_i, \frac{1}{2} \sqrt[n]{\varepsilon/2^{i+1}})$, y $\sum_{i=1}^\infty \text{vol}(B_i) = \sum_{i=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Proposición 3.8.

- (a) Si X tiene medida nula y $Y \subset X$, entonces Y tiene medida nula.

(b) Si $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una colección numerable de conjuntos de medida nula, entonces $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ tiene medida nula. En particular, la unión de dos conjuntos de medida nula tiene medida nula.

(c) Todo conjunto de medida nula tiene interior vacío.

Prueba. (a) es inmediato. Para (b), fijemos $\varepsilon > 0$. Para cada j existe una colección numerable $\{B_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}$ de cajas que cubre X_j con $\sum_i \text{vol}(B_i^j) < \varepsilon/2^{j+1}$. La colección $\{B_i^j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ es numerable (se enumera, por ejemplo, recorriendo las diagonales $i+j = \text{cte}$), cubre $\bigcup_j X_j$ y, como la serie es de términos no negativos,

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} \text{vol}(B_i^j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{vol}(B_i^j) \right) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Para (c): si $\text{int } X \neq \emptyset$, X contiene una caja C con $\text{vol}(C) > 0$, y toda colección numerable de cajas que cubra C tiene volumen total $\geq \text{vol}(C)$ (por compacidad basta considerar coberturas finitas, para las que el resultado se sigue de la Proposición 2.16). Luego X no tiene medida nula. $\square$

Ejemplo 3.9. El conjunto $X = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^3$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, las cajas $B_n = [-n, n]^2 \times [0, \frac{\varepsilon}{2^{n+3}n^2}]$, $n \in \mathbb{N}$, cubren X y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2\varepsilon}{2^{n+3}n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Del mismo modo, $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^k$ para todo $k > m$.

Teorema 3.10 (Caracterización de las funciones integrables). Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ una caja y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes:

- (i) f es integrable, es decir, $\underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f$;
- (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}$ de A con $\overline{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$;
- (iii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\overline{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ para toda partición $\mathcal{P}$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$;
- (iv) el conjunto $D(f)$ de puntos de discontinuidad de f tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$.

Corolario 3.11 (Sumas de Riemann). Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ una caja y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes:

- (i) f es integrable y $\int_A f(x) dx = L$;
- (ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{B \in \mathcal{P}} f(\xi_B) \text{vol}(B) - L \right| < \varepsilon$$

para toda partición $\mathcal{P}$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y toda elección de puntos $\xi_B \in B$, $B \in \mathcal{P}$.

Integral de Riemann en conjuntos acotados

4.1 Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto acotado y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos por $\tilde{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la *extensión de f por cero*:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^m \setminus X. \end{cases}$$

Proposición 4.1. Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y A es una caja de $\mathbb{R}^m$ que contiene a X , las integrales $\int_A \tilde{f}$ y $\int_A f$ no dependen de la caja A .

Prueba. Lo probamos para la integral inferior. Sean A y B cajas que contienen a X .

Caso $B \subset A$. Consideremos la partición $\mathcal{P}(B) = \text{vert}(A) + \text{vert}(B)$ de A , de la cual B es una caja. Por la aditividad geométrica (Proposición 2.21),

$$\int_A \tilde{f} = \int_B \tilde{f} + \sum_{\substack{C \in \mathcal{P}(B) \\ C \neq B}} \int_C \tilde{f}.$$

Si $C \neq B$, entonces $\text{int}(C) \cap B = \emptyset$, luego $\tilde{f} = 0$ en $\text{int}(C)$ y $\int_C \tilde{f} = 0$ (Proposición 2.14). Así, $\int_A \tilde{f} = \int_B \tilde{f}$.

Caso general. Si $A \cap B$ tiene interior no vacío, es una caja que contiene a X , y por el caso anterior $\int_A \tilde{f} = \int_{A \cap B} \tilde{f} = \int_B \tilde{f}$. Si $\text{int}(A \cap B) = \emptyset$, entonces $X \subset A \cap B \subset \partial A \cap \partial B$, de modo que $\tilde{f}$ se anula en $\text{int}(A)$ y en $\text{int}(B)$, y ambas integrales valen 0. $\square$

Definición 4.2. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ acotado y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. La *integral inferior* y la *integral superior* de f en X son

$$\int_X f(x) \, dx = \int_A \tilde{f}(x) \, dx, \quad \overline{\int}_X f(x) \, dx = \overline{\int}_A \tilde{f}(x) \, dx,$$

donde A es cualquier caja que contiene a X . Decimos que f es *integrable* en X cuando $\int_X f = \overline{\int}_X f$; este valor común se denota $\int_X f(x) \, dx$.

Por la Proposición 2.18, siempre se tiene $\int_X f \leq \overline{\int}_X f$.

4.2 Volumen de conjuntos acotados

Definición 4.3. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ acotado. El *volumen inferior* y el *volumen superior* de X son

$$\text{vol}(X) = \int_X 1 \, dx, \quad \overline{\text{vol}}(X) = \overline{\int}_X 1 \, dx.$$

Decimos que X es *medible en el sentido de Jordan* (o *J-medible*) cuando $\underline{\text{vol}}(X) = \overline{\text{vol}}(X)$; este valor común es el *volumen* de X , denotado $\text{vol}(X)$. Notemos que $\underline{\text{vol}}(X) \leq \overline{\text{vol}}(X)$.

Ejemplo 4.4. El conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es *J-medible*, pues tiene interior vacío y es denso en $[0, 1]$ (Ejemplo 2.12): $\underline{\text{vol}} = 0$ y $\overline{\text{vol}} = 1$.

Observación 4.5. Si X es *J-medible*, toda función constante c es integrable en X y $\int_X c \, dx = c \, \text{vol}(X)$. Si X no es *J-medible*, la única función constante integrable en X es la función nula.

Lema 4.6. Si A es una caja y $\overline{X} \subset \text{int}(A)$, entonces el conjunto de discontinuidades de $\mathbf{1}_X|_A$ es ∂X .

Proposición 4.7 (Caracterización de los conjuntos *J-medibles*). Un conjunto acotado $X \subset \mathbb{R}^m$ es *J-medible* si y solo si ∂X tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$.

Prueba. Tomemos una caja A con $\overline{X} \subset \text{int}(A)$. Por definición, X es *J-medible* si y solo si $\mathbf{1}_X|_A$ es integrable, lo cual, por el Teorema 3.10 y el Lema 4.6, equivale a que ∂X tenga medida nula. $\square$

4.3 Funciones integrables en conjuntos *J-medibles*

Recordemos que $D(f)$ denota el conjunto de puntos de discontinuidad de f .

Lema 4.8. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ acotado y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$D(f) \subset D(\tilde{f}) \subset D(f) \cup \partial X.$$

Además, si A es una caja con $\overline{X} \subset \text{int}(A)$, entonces $D(\tilde{f}|_A) = D(\tilde{f})$.

Prueba. Si f es discontinua en $x \in X$, existe una sucesión $x_j \rightarrow x$ en X con $f(x_j) \not\rightarrow f(x)$; como $\tilde{f} = f$ en X , también $\tilde{f}$ es discontinua en x . Si $x \notin D(f) \cup \partial X$, o bien $x \in \text{int} X$, y entonces $\tilde{f} = f$ cerca de x , o bien $x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{X}$, y entonces $\tilde{f} = 0$ cerca de x ; en ambos casos $\tilde{f}$ es continua en x . La última afirmación se sigue de que $\tilde{f} = 0$ en un entorno de ∂A . $\square$

Proposición 4.9. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto *J-medible* y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces f es integrable si y solo si $D(f)$ tiene medida nula.

Prueba. Por el Lema 4.8, como ∂X tiene medida nula, $D(\tilde{f})$ tiene medida nula si y solo si $D(f)$ la tiene. Basta aplicar el Teorema 3.10 a $\tilde{f}|_A$. $\square$

Corolario 4.10. Toda función continua y acotada en un conjunto *J-medible* es integrable.

Lema 4.11. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ *J-medible* y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces la restricción de f a cualquier conjunto *J-medible* $Y \subset X$ es integrable, pues $D(f|_Y) \subset D(f)$.

4.4 Propiedades de la integral

Las propiedades de la integral en cajas se trasladan a conjuntos acotados, pues para $X \subset A$ se tiene $\int_X \varphi = \int_A \tilde{\varphi}$ y $\overline{\int}_X \varphi = \overline{\int}_A \tilde{\varphi}$, y además

$$\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}, \quad \widetilde{cf} = c\tilde{f}, \quad |\widetilde{f}| = |\tilde{f}|.$$

Proposición 4.12. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ acotado y $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas.

- (a) (Aditividad algebraica) $\int_X (f + g) \geq \int_X f + \int_X g$ y $\bar{\int}_X (f + g) \leq \bar{\int}_X f + \bar{\int}_X g$. Si f, g son integrables, $f + g$ también lo es y $\int_X (f + g) = \int_X f + \int_X g$.
- (b) (Producto por un escalar) $\int_X cf = c \int_X f$ y $\bar{\int}_X cf = c \bar{\int}_X f$ para $c \geq 0$; $\int_X (-f) = -\int_X f$ y $\bar{\int}_X (-f) = -\bar{\int}_X f$. Si f es integrable, $\int_X cf = c \int_X f$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
- (c) (Comparación) Si $f \leq g$ en X , entonces $\int_X f \leq \int_X g$ y $\bar{\int}_X f \leq \bar{\int}_X g$; si ambas son integrables, $\int_X f \leq \int_X g$. En particular, si $X \subset Y$ son acotados, $\underline{\text{vol}}(X) \leq \underline{\text{vol}}(Y)$ y $\bar{\text{vol}}(X) \leq \bar{\text{vol}}(Y)$ (pues $\mathbf{1}_X \leq \mathbf{1}_Y$).
- (d) (Desigualdad triangular) Si f es integrable, $|f|$ también lo es y $|\int_X f| \leq \int_X |f|$.

Proposición 4.13 (Aditividad geométrica del volumen). Sean $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos J -medibles. Entonces $X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2$ y $X_1 \setminus X_2$ son J -medibles y

$$\begin{aligned}\text{vol}(X_1 \cup X_2) &= \text{vol}(X_1) + \text{vol}(X_2) - \text{vol}(X_1 \cap X_2), \\ \text{vol}(X_1 \setminus X_2) &= \text{vol}(X_1) - \text{vol}(X_1 \cap X_2).\end{aligned}$$

En particular, si $X_2 \subset X_1$, entonces $\text{vol}(X_1 \setminus X_2) = \text{vol}(X_1) - \text{vol}(X_2)$.

Prueba. Se tiene

$$\partial(X_1 \cup X_2), \quad \partial(X_1 \cap X_2), \quad \partial(X_1 \setminus X_2) = \partial(X_1 \cap X_2^c) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2,$$

y $\partial X_1 \cup \partial X_2$ tiene medida nula; por la Proposición 4.7, los tres conjuntos son J -medibles. Las fórmulas se siguen de la aditividad algebraica aplicada a las identidades

$$\mathbf{1}_{X_1 \cup X_2} = \mathbf{1}_{X_1} + \mathbf{1}_{X_2} - \mathbf{1}_{X_1 \cap X_2}, \quad \mathbf{1}_{X_1 \setminus X_2} = \mathbf{1}_{X_1} - \mathbf{1}_{X_1 \cap X_2}. \quad \square$$

Lema 4.14. Un conjunto J -medible tiene volumen nulo si y solo si tiene interior vacío.

Prueba. Si $\text{int } X = \emptyset$, entonces $\underline{\text{vol}}(X) = 0$ (Ejemplo 2.12), y como X es J -medible, $\text{vol}(X) = 0$. Si $\text{int } X \neq \emptyset$, X contiene una caja C y, por comparación, $\text{vol}(X) \geq \text{vol}(C) > 0$. $\square$

Corolario 4.15. Si X_1, X_2 son J -medibles y $\text{int}(X_1 \cap X_2) = \emptyset$, entonces $\text{vol}(X_1 \cup X_2) = \text{vol}(X_1) + \text{vol}(X_2)$.

Prueba. $X_1 \cap X_2$ es J -medible con interior vacío, luego $\text{vol}(X_1 \cap X_2) = 0$ por el Lema 4.14. $\square$

Definición 4.16. Una descomposición de un conjunto X es una colección finita $X_1, \dots, X_n$ de conjuntos tales que $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ e $\text{int}(X_i \cap X_j) = \emptyset$ para $i \neq j$.

Proposición 4.17. Si $X_1, \dots, X_n$ es una descomposición de X en conjuntos J -medibles, entonces X es J -medible y $\text{vol}(X) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(X_i)$.

Lema 4.18. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ J -medible con interior vacío y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces $\int_X f(x) dx = 0$.

Prueba. Sea $K = \sup_X |f|$. Por la desigualdad triangular y la comparación, $|\int_X f| \leq \int_X |f| \leq K \text{vol}(X) = 0$. $\square$

Proposición 4.19 (Aditividad geométrica de la integral). Sean X_1, X_2 conjuntos J -medibles y $f: X_1 \cup X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces las restricciones de f a X_1 , X_2 y $X_1 \cap X_2$ son integrables y

$$\int_{X_1 \cup X_2} f = \int_{X_1} f + \int_{X_2} f - \int_{X_1 \cap X_2} f.$$

Si además $\text{int}(X_1 \cap X_2) = \emptyset$, entonces $\int_{X_1 \cup X_2} f = \int_{X_1} f + \int_{X_2} f$.

Prueba. La integrabilidad de las restricciones se sigue del Lema 4.11. La fórmula es consecuencia de la aditividad algebraica y de la identidad $\tilde{f} = \widetilde{f|_{X_1}} + \widetilde{f|_{X_2}} - \widetilde{f|_{X_1 \cap X_2}}$. La última afirmación se sigue del Lema 4.18. $\square$

Corolario 4.20. Si $X_1, \dots, X_n$ es una descomposición del conjunto J -medible X en conjuntos J -medibles y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\int_X f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{X_i} f(x) dx$.

Proposición 4.21 (Funciones que coinciden en un conjunto denso). Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ acotado y $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Si $f = g$ en un subconjunto denso de X , entonces $\int_X f = \int_X g$.

Prueba. La función $h = f - g$ es integrable y se anula en un conjunto Z denso en X . Sea $A \supset X$ una caja y $\mathcal{P}$ una partición de A . Toda caja $C \in \mathcal{P}$ contiene un punto donde $\tilde{h} = 0$: si $C \not\subset X$, cualquier punto de $C \setminus X$; si $C \subset X$, el abierto no vacío $\text{int}(C) \subset X$ contiene puntos de Z . Luego $m_C(\tilde{h}) \leq 0 \leq M_C(\tilde{h})$, de modo que $\underline{s}(\tilde{h}, \mathcal{P}) \leq 0 \leq \overline{s}(\tilde{h}, \mathcal{P})$ para toda $\mathcal{P}$, y $\int_X h = 0$. $\square$

Fubini en conjuntos acotados e invarianza de la medida nula

5.1 Teorema de Fubini para conjuntos acotados

Teorema 5.1 (Fubini). Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos acotados y $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Para $y \in Y$ sea $f_y: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$. Si f es integrable, entonces las funciones

$$i_1(y) = \int_{\underline{X}} f_y(x) dx, \quad I_1(y) = \int_X f_y(x) dx$$

son integrables en Y y

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_Y \left(\int_{\underline{X}} f(x, y) dx \right) dy = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$

Prueba. Sean $A_1 \supset X$ y $A_2 \supset Y$ cajas. La extensión por cero $\tilde{f}$ de f satisface $\tilde{f}(\cdot, y) = \tilde{f}_y$ si $y \in Y$ y $\tilde{f}(\cdot, y) = 0$ si $y \notin Y$. Por lo tanto, las funciones i_1, I_1 asociadas a $\tilde{f}|_{A_1 \times A_2}$ en el Teorema 3.3 son precisamente las extensiones por cero de i_1 e I_1 . Basta aplicar dicho teorema. $\square$

Lema 5.2. Para $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ se cumple $\partial(X \times Y) = (\partial X \times \bar{Y}) \cup (\bar{X} \times \partial Y)$.

Corolario 5.3. Si $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ son J -medibles, entonces $X \times Y$ es J -medible en $\mathbb{R}^{m+n}$ y $\text{vol}(X \times Y) = \text{vol}(X) \text{vol}(Y)$.

Prueba. Como ∂X y ∂Y tienen medida nula, el Lema 5.2 muestra que $\partial(X \times Y)$ tiene medida nula (un producto $Z \times B$ con Z de medida nula y B acotado tiene medida nula). Luego $X \times Y$ es J -medible y, por Fubini,

$$\text{vol}(X \times Y) = \int_{X \times Y} 1 dx dy = \int_Y \left(\int_X 1 dx \right) dy = \int_Y \text{vol}(X) dy = \text{vol}(X) \text{vol}(Y). \quad \square$$

Corolario 5.4. Si $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ son J -medibles, toda función continua y acotada $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx,$$

donde, para cada y , la función $x \mapsto f(x, y)$ es continua (luego integrable en X) y $y \mapsto \int_X f(x, y) dx$ es integrable en Y .

Proposición 5.5. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ una caja y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^{m+1}$.

Prueba. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\mathcal{P}$ una partición de A con $\bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$, y sea $\eta = \varepsilon / \text{vol}(A)$. Las cajas $B \times [m_B(f), M_B(f) + \eta]$, $B \in \mathcal{P}$, cubren $\text{graf}(f)$ y su volumen total es $\bar{s}(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) + \eta \text{vol}(A) < 2\varepsilon$. $\square$

Observación 5.6. El resultado no es evidente: la imagen de una aplicación continua puede ser “grande”; por ejemplo, existen curvas continuas $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\alpha([0, 1]) = [0, 1]^2$ (curvas de Peano). La integrabilidad de f es esencial en la prueba.

Ejemplo 5.7. La esfera $\mathbb{S}^2$ y todo plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tienen medida nula en $\mathbb{R}^3$. En efecto, cada hemisferio de $\mathbb{S}^2$ está contenido en el gráfico de la función continua $(x, y) \mapsto \pm \sqrt{\max\{0, 1 - x^2 - y^2\}}$ en la caja $[-1, 1]^2$; y todo plano es unión numerable de gráficos de funciones afines definidas en cajas (intercambiando coordenadas si es necesario).

5.2 Invarianza de los conjuntos de medida nula

Definición 5.8. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$. Una aplicación $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ es *lipschitziana* si existe $L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Decimos que f es *localmente lipschitziana* si todo $a \in X$ tiene un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que la restricción $f|_{X \cap U}$ es lipschitziana.

Por la equivalencia de normas en $\mathbb{R}^m$, estas nociones no dependen de las normas elegidas (aunque la constante L sí).

Lema 5.9. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ tiene medida nula si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una colección numerable de cubos $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ que cubre A con $\sum_j \text{vol}(C_j) < \varepsilon$.

Idea de la prueba. Toda caja cuyos lados tienen longitudes racionales se descompone en cubos del mismo lado; en general, basta agrandar ligeramente cada caja de modo que sus lados sean racionales.

Proposición 5.10. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitziana. Si $A \subset X$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$, entonces $f(A)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$.

Prueba. Usamos la norma del máximo en $\mathbb{R}^m$ y sea $L > 0$ la constante de Lipschitz de f respecto de ella. Un cubo C de lado ℓ tiene diámetro ℓ ; por lo tanto $f(C \cap X)$ tiene diámetro $\leq L\ell$ y está contenido en un cubo C' de lado $L\ell$, con $\text{vol}(C') = L^m \text{vol}(C)$.

Dado $\varepsilon > 0$, por el Lema 5.9 existe una colección numerable de cubos $\{C_j\}$ que cubre A con $\sum_j \text{vol}(C_j) < \varepsilon / L^m$. Entonces

$$f(A) = \bigcup_j f(A \cap C_j) \subset \bigcup_j C'_j, \quad \sum_j \text{vol}(C'_j) = L^m \sum_j \text{vol}(C_j) < \varepsilon. \quad \square$$

Corolario 5.11. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ lipschitziana. Si $k > m$, entonces $f(X)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^k$.

Prueba. Sea $\tilde{X} = X \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k-m} = \mathbb{R}^k$ y $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\tilde{f}(x, 0) = f(x)$. Con la norma del máximo, $\|(x, 0) - (y, 0)\|_\infty = \|x - y\|_\infty$, de modo que $\tilde{f}$ es lipschitziana con la misma constante. Como $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^k$ (Ejemplo 3.9), la Proposición 5.10 implica que $f(X) = \tilde{f}(\tilde{X})$ tiene medida nula. $\square$

Observación 5.12. La hipótesis de Lipschitz es esencial: la curva de Peano mencionada antes es continua, pero su imagen $[0, 1]^2$ no tiene medida nula en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 5.13. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, y $X \subset \mathbb{R}$ acotado, digamos $|x| \leq c$ para todo $x \in X$. Entonces $|f(x) - f(y)| = |x + y||x - y| \leq 2c|x - y|$ para $x, y \in X$. Así, f es lipschitziana en cada conjunto acotado y, por lo tanto, localmente lipschitziana en $\mathbb{R}$ (aunque no es lipschitziana en $\mathbb{R}$).

Proposición 5.14. Toda aplicación $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^1 definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ es localmente lipschitziana. Más precisamente, f es lipschitziana en todo cubo cerrado contenido en U .

Prueba. Una aplicación es (localmente) lipschitziana si y solo si lo es cada una de sus coordenadas, así que podemos suponer $k = 1$. Sea $B \subset U$ un cubo cerrado (una bola cerrada de la norma del máximo) y sean $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in B$. Para $0 \leq i \leq m$ sea

$$z_i = (b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

de modo que $z_0 = a$, $z_m = b$, $z_i - z_{i-1} = (b_i - a_i)e_i$ y todos los z_i (y los segmentos que los unen) están en B . Por el Lema del valor medio 1.19, existen $q_i \in [z_{i-1}, z_i]$ tales que

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^m (f(z_i) - f(z_{i-1})) = \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(q_i).$$

Como las derivadas parciales son continuas y B es compacto, $L = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{x \in B} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$ es finito, y

$$|f(b) - f(a)| \leq L \sum_{i=1}^m |b_i - a_i| = L \|b - a\|_1 \leq mL \|b - a\|_\infty.$$

Como todo punto de U tiene un cubo cerrado centrado en él y contenido en U , f es localmente lipschitziana. $\square$

Lema 5.15 (Lindelöf). Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ y $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección arbitraria de abiertos que cubre X . Entonces existe una subcolección numerable $\{U_{\lambda_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ que también cubre X .

Proposición 5.16. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente lipschitziana. Si $A \subset X$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$, entonces $f(A)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$.

Prueba. Por el Lema de Lindelöf existe una colección numerable de abiertos $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que cubre X y tal que cada restricción $f|_{X \cap U_i}$ es lipschitziana. Entonces $f(A) = \bigcup_i f(A \cap U_i)$, y cada $f(A \cap U_i)$ tiene medida nula por la Proposición 5.10. Una unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula. $\square$

Corolario 5.17. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ localmente lipschitziana. Si $k > m$, entonces $f(X)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^k$. En particular, esto vale para toda aplicación de clase C^1 definida en un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Homeomorfismos, difeomorfismos y cambio de variable

6.1 Cálculo versus análisis: un ejemplo

Ejemplo 6.1. Consideremos el tetraedro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Mostremos que (a) C es J -medible; (b) para toda función continua $f: C \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_C f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz;$$

y (c) $\text{vol}(C) = \frac{1}{6}$.

(a) $C \subset [0, 1]^3$ es acotado y

$$\partial C \subset \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{x + y + z = 1\}.$$

Los tres primeros planos tienen medida nula (Ejemplo 3.9). El plano $\{x + y + z = 1\}$ es la imagen de la aplicación afín $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix},$$

que es lipschitziana; por el Corolario 5.11, tiene medida nula en $\mathbb{R}^3$. Así, ∂C tiene medida nula y C es J -medible.

(b) Sea $\tilde{f}$ la extensión de f por cero. Por el Teorema de Fubini (con la variable z en el exterior),

$$\int_C f = \int_{[0,1]^3} \tilde{f} = \int_0^1 \left(\int_{\underline{[0,1]^2}} \tilde{f}_z(x, y) \, dx \, dy \right) dz, \quad (6.1)$$

donde $\tilde{f}_z(x, y) = \tilde{f}(x, y, z)$. Fijado $z \in [0, 1]$, sea

$$C_z = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (x, y, z) \in C\} = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}.$$

Entonces $\tilde{f}_z = f(\cdot, \cdot, z)$ en C_z y $\tilde{f}_z = 0$ en $[0, 1]^2 \setminus C_z$. Sus discontinuidades están contenidas en el segmento $\{x + y = 1 - z\}$, que tiene medida nula en $\mathbb{R}^2$; luego $\tilde{f}_z$ es integrable y en (6.1) podemos escribir $\int$ en lugar de $\int_{\underline{}}$. Como $\tilde{f}_z = 0$ en el interior de $[0, 1] \times [1 - z, 1]$,

$$\int_C f = \int_0^1 \left(\int_{[0,1] \times [0,1-z]} \tilde{f}_z(x, y) \, dx \, dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^1 \tilde{f}_{yz}(x) \, dx \right) dy \right) dz,$$

donde, para $z \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1 - z]$ fijos, $\tilde{f}_{yz}(x) = f(x, y, z)$ si $x \in [0, 1 - y - z]$ y $\tilde{f}_{yz}(x) = 0$ si $x \in (1 - y - z, 1]$. Esta función es integrable (a lo sumo es discontinua en $x = 1 - y - z$) y se anula en el interior de $[1 - y - z, 1]$, de modo que

$$\int_C f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

(c) Con $f \equiv 1$:

$$\text{vol}(C) = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - y - z) dy dz = \int_0^1 \frac{(1 - z)^2}{2} dz = \frac{1}{6}.$$

6.2 Homeomorfismos

Definición 6.2. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^k$ conjuntos cualesquiera. Un *homeomorfismo* entre X e Y es una aplicación $f: X \rightarrow Y$ biyectiva y continua cuya inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ también es continua. Decimos que X e Y son *homeomorfos* ($X \simeq Y$) si existe un homeomorfismo entre ellos.

Proposición 6.3. *Ser homeomorfos es una relación de equivalencia.*

Prueba. La identidad $\text{id}: X \rightarrow X$ es un homeomorfismo (reflexividad); si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, también lo es $f^{-1}: Y \rightarrow X$ (simetría); y si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son homeomorfismos, $g \circ f: X \rightarrow Z$ también lo es (transitividad). $\square$

Proposición 6.4. *Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo y $A \subset X$, la restricción $f|_A: A \rightarrow f(A)$ es un homeomorfismo.*

Ejemplo 6.5. Dos intervalos compactos $[a, b]$ y $[c, d]$ ($a < b, c < d$) son homeomorfos: todos son homeomorfos a $[0, 1]$ mediante

$$f: [0, 1] \rightarrow [a, b], \quad f(x) = a + (b - a)x, \quad f^{-1}(y) = \frac{y - a}{b - a}. \quad (6.2)$$

Ejemplo 6.6. Todos los intervalos abiertos son homeomorfos entre sí. Hay cuatro tipos: (a, b) , $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ y $\mathbb{R}$. Se tiene $(a, b) \simeq (0, 1)$ por (6.2); $(a, +\infty) \simeq (0, +\infty)$ mediante $x \mapsto x - a$; $(-\infty, b) \simeq (0, +\infty)$ mediante $x \mapsto b - x$; $(0, 1) \simeq (0, +\infty)$ mediante $x \mapsto \tan(\pi x/2)$; y $\mathbb{R} \simeq (0, +\infty)$ mediante $x \mapsto e^x$.

Ejemplo 6.7. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^m$. Dos bolas cerradas son homeomorfas entre sí, y dos bolas abiertas son homeomorfas entre sí y a $\mathbb{R}^m$:

(a) $\overline{B}(0, 1) \simeq \overline{B}(a, r)$ mediante $x \mapsto a + rx$; por restricción, $B(0, 1) \simeq B(a, r)$.

(b) $B(0, 1) \simeq \mathbb{R}^m$ mediante $x \mapsto \frac{x}{1 - \|x\|}$, cuya inversa es $y \mapsto \frac{y}{1 + \|y\|}$.

(c) Si $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son dos normas en $\mathbb{R}^m$, con bolas unitarias cerradas $\overline{B}$ y $\overline{B}'$, la aplicación

$$h: \overline{B} \rightarrow \overline{B}', \quad h(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|x\|'} x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es un homeomorfismo (su inversa se obtiene intercambiando los papeles de las normas), que lleva la bola abierta B sobre B' y la esfera $\{\|x\| = 1\}$ sobre $\{\|x\|' = 1\}$.

Ejemplo 6.8. El círculo $\mathbb{S}^1 = \{\|x\|_2 = 1\}$ es homeomorfo al borde del cuadrado $[-1, 1]^2$, es decir, a $\{\|y\|_\infty = 1\}$ (cuadrado de lado 2): basta tomar

$$f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \{\|y\|_\infty = 1\}, \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|_\infty}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|_2}.$$

Esta f es precisamente la restricción a $\mathbb{S}^1$ del homeomorfismo del Ejemplo 6.7 (c) (con $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_\infty$), lo que ilustra la Proposición 6.4.

Proposición 6.9 (Invariantes topológicos). Sea $h: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^k$. Entonces:

- (a) una sucesión (x_j) converge en X si y solo si $(h(x_j))$ converge en Y ;
- (b) A es abierto (resp. cerrado, denso) en X si y solo si $h(A)$ es abierto (resp. cerrado, denso) en Y ;
- (c) $A \subset X$ es compacto (resp. conexo) si y solo si $h(A)$ es compacto (resp. conexo);
- (d) (propiedad del punto fijo) si toda aplicación continua $X \rightarrow X$ tiene un punto fijo, lo mismo ocurre con toda aplicación continua $Y \rightarrow Y$: dada $g: Y \rightarrow Y$ continua, la aplicación $h^{-1} \circ g \circ h: X \rightarrow X$ tiene un punto fijo p , y entonces $h(p)$ es un punto fijo de g .

Ejemplo 6.10. Sea $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Entonces f es biyectiva y continua, pero f^{-1} no es continua. De hecho, $\mathbb{S}^1$ y $[0, 2\pi)$ no son homeomorfos, pues $\mathbb{S}^1$ es compacto y $[0, 2\pi)$ no lo es. También puede verse directamente: si $x_j \in \mathbb{S}^1$ tiende a $(1, 0)$ alternando por encima y por debajo del eje horizontal, las preimágenes $f^{-1}(x_j)$ se acercan alternadamente a 0 y a 2π , y no convergen.

6.3 Difeomorfismos

Definición 6.11. Sean $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $r \geq 1$. Un *difeomorfismo de clase C^r* entre U y V es una aplicación $f: U \rightarrow V$ biyectiva, de clase C^r , cuya inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ también es de clase C^r . Decimos que U y V son *difeomorfos* si existe un difeomorfismo entre ellos.

Observación 6.12. No existen difeomorfismos entre abiertos no vacíos de espacios de dimensiones distintas. En efecto, sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^k$ abiertos no vacíos y $f: U \rightarrow V$ biyectiva de clase C^1 con inversa de clase C^1 . Si $m < k$, como f es localmente lipschitziana, $V = f(U)$ tendría medida nula en $\mathbb{R}^k$ (Corolario 5.17), lo cual es absurdo porque V es un abierto no vacío. Si $m > k$, se aplica el mismo argumento a f^{-1} . Luego $m = k$.

Corolario 6.13. Si $f: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo de clase C^r , entonces $df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo para todo $x \in U$, y $(df_x)^{-1} = d(f^{-1})_{f(x)}$.

Prueba. Por la regla de la cadena (Teorema 1.35), de $f^{-1} \circ f = \text{id}_U$ y $f \circ f^{-1} = \text{id}_V$ se obtiene $d(f^{-1})_{f(x)} \circ df_x = \text{id}$ y $df_x \circ d(f^{-1})_{f(x)} = \text{id}$. $\square$

Proposición 6.14. Dos intervalos abiertos cualesquiera son difeomorfos de clase C^∞ .

Prueba. Todos los homeomorfismos del Ejemplo 6.6 son de clase C^∞ y tienen inversa de clase C^∞ : $x \mapsto a + (b - a)x$, $x \mapsto x - a$, $x \mapsto b - x$, $x \mapsto \tan(\pi x/2)$ (con inversa $y \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan y$; también sirve $x \mapsto \frac{x}{1-x}$) y $x \mapsto e^x$ (con inversa $\log$). $\square$

Ejemplo 6.15. Dos bolas abiertas de $\mathbb{R}^m$ son difeomorfas entre sí y difeomorfas a $\mathbb{R}^m$. Usemos la norma euclidiana y consideremos

$$f: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|},$$

homeomorfismo con inversa $f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \|y\|}$. Para $1 \leq i \leq m$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \|x\|} e_i + \frac{x_i}{(1 - \|x\|)^2} \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } x \neq 0, \\ e_i, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

que es continua en $\mathbb{B}^m$. Así, f es de clase C^1 ; análogamente f^{-1} es de clase C^1 , de modo que f es un difeomorfismo de clase C^1 .

Observación 6.16. La aplicación f anterior no es de clase C^2 (la norma euclidiana no es diferenciable en 0). En cambio,

$$g: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \quad g^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}},$$

es un difeomorfismo de clase C^∞ , pues $\|x\|^2$ es polinomial y $1 - \|x\|^2 > 0$ en $\mathbb{B}^m$.

6.4 Teorema del cambio de variable

Teorema 6.17 (Cambio de variable). Sean $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $\varphi: U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase C^1 , $K \subset V$ un compacto J -medible y $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces:

- (a) $\varphi^{-1}(K)$ es compacto y J -medible;
- (b) $f \circ \varphi: \varphi^{-1}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable;
- (c) $\int_K f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(K)} f(\varphi(x)) |\det J\varphi(x)| dx$.

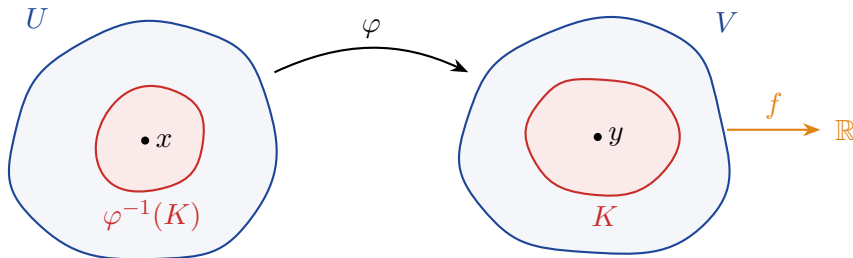


Figura 6.1: Situación del teorema del cambio de variable: $y = \varphi(x)$.

6.4.1 Comentarios sobre el teorema

Dimensión 1. Sea $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ un difeomorfismo de clase C^r ($r \geq 1$) y $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces $f \circ \varphi$ es integrable y

$$\int_{[c,d]} f(y) dy = \int_{[a,b]} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

Si φ es creciente ($\varphi' > 0$), esto es la fórmula clásica $\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$. Si φ es decreciente ($\varphi' < 0$, $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$), la fórmula clásica se escribe

$$\int_c^d f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_b^a f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

El valor absoluto compensa la orientación de la recta.

Interpretación geométrica de $|\det J\varphi|$. La derivada $d\varphi_x$ transforma el cubo infinitesimal de lados $dx_1 e_1, \dots, dx_m e_m$ en el paralelepípedo de lados $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx_1, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x) dx_m$, cuyo volumen es $|\det J\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_m$ (Figura 6.2). Por ejemplo, en coordenadas polares $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ se tiene $|\det J\varphi(r, \theta)| = r$: un rectángulo de lados dr y $d\theta$ se transforma en un sector anular de área aproximada $r dr d\theta$.

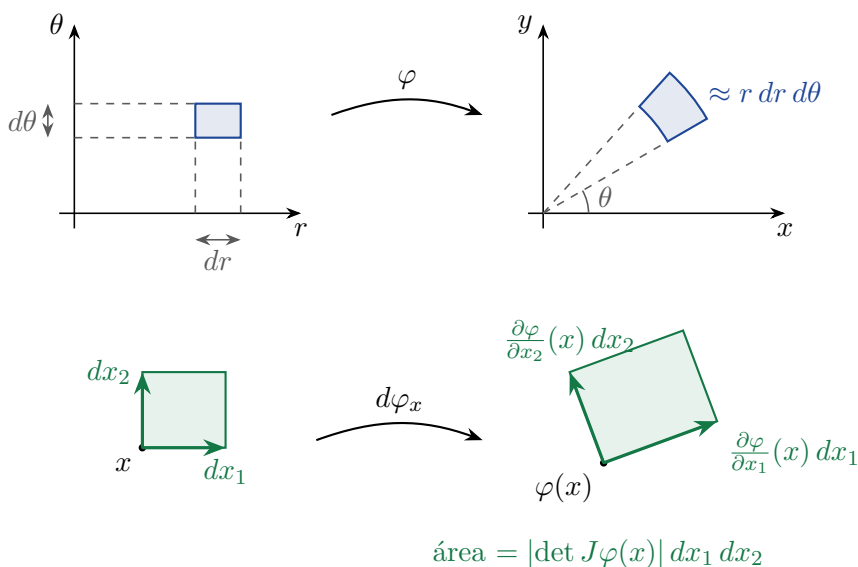


Figura 6.2: Interpretación geométrica del factor $|\det J\varphi|$: arriba, coordenadas polares; abajo, imagen de un cuadrado infinitesimal por $d\varphi_x$.

Superficies

7.1 Definiciones básicas

Definición 7.1 (Inmersión). Sea $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Una aplicación $\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r ($r \geq 1$) es una *inmersión* si su derivada $d\varphi_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $x \in U_0$; equivalentemente (Subsección 1.6.5), si los vectores $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x)$ son linealmente independientes para todo $x \in U_0$.

Definición 7.2 (Parametrización). Una *parametrización m -dimensional de clase C^r* ($r \geq 1$) de un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo $\varphi: U_0 \rightarrow U$, definido en un abierto $U_0 \subset \mathbb{R}^m$, que es una inmersión de clase C^r (vista como aplicación $\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$).

Ejemplo 7.3. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ (paraboloide) y $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow U$, $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Entonces φ es una parametrización bidimensional de clase C^∞ de U :

- (a) φ es un homeomorfismo: es continua y biyectiva, con inversa continua $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$;
- (b) φ es de clase C^∞ , pues sus coordenadas son polinomiales;
- (c) φ es una inmersión, pues

$$J\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

tiene columnas linealmente independientes (rango 2), así que $d\varphi_{(x,y)}$ es inyectiva.

Definición 7.4 (Superficie). Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una *superficie de dimensión m y clase C^r* ($r \geq 1$) si todo punto $p \in M$ pertenece a un abierto U de M que admite una parametrización m -dimensional de clase C^r , $\varphi: U_0 \rightarrow U$, con $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Escribimos M^m cuando queremos enfatizar la dimensión.

Cada tal $\varphi: U_0 \rightarrow U$ se llama *parametrización local* de M (en torno de p , si $p \in U$).

Recordemos que $U \subset M$ es abierto en M si $U = M \cap O$ para algún abierto $O \subset \mathbb{R}^n$.

7.2 Ejemplos

Ejemplo 7.5. Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ es una superficie de dimensión m y clase C^∞ en $\mathbb{R}^m$: basta tomar $\varphi = \text{id}_U$.

Ejemplo 7.6. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie de dimensión m y clase C^r , todo abierto U de M es también una superficie de dimensión m y clase C^r . En efecto, dado $p \in U$, sea $\varphi: V_0 \rightarrow V$ una parametrización local de M en torno de p . Como $U \cap V$ es abierto en M y φ es continua, $\varphi^{-1}(U \cap V)$ es abierto en V_0 , y por lo tanto en $\mathbb{R}^m$. Entonces la restricción $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap V)}: \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V$ es una parametrización local de U en torno de p .

Ejemplo 7.7. Todo subespacio vectorial $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión m es una superficie de dimensión m y clase C^∞ . Sea $\{b_1, \dots, b_m\}$ una base de E y $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow E$, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m x_i b_i$. Entonces φ es un isomorfismo lineal (luego un homeomorfismo), es de clase C^∞ y $J\varphi = [b_1 \mid \dots \mid b_m] \in \mathcal{M}_{n \times m}$ tiene columnas linealmente independientes; así, $d\varphi$ es inyectiva.

Ejemplo 7.8 (Gráficos). Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^r ($r \geq 1$). El gráfico

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k : x \in U, y = f(x)\}$$

es una superficie de dimensión m y clase C^r en $\mathbb{R}^{m+k}$. Usamos la parametrización $\varphi: U \rightarrow \text{graf}(f)$, $\varphi(x) = (x, f(x))$:

- (a) φ es un homeomorfismo, con inversa $\varphi^{-1} = \pi_m|_{\text{graf}(f)}$ (proyección sobre $\mathbb{R}^m$);
- (b) φ es de clase C^r ;
- (c) φ es una inmersión, pues $J\varphi(x) = \begin{pmatrix} I_m \\ Jf(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(m+k) \times m}$ tiene rango m .

Ejemplo 7.9 (El cono). Sea $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

- (a) $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ es una superficie de dimensión 2 y clase C^∞ , pues es el gráfico de $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, que es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- (b) $\mathcal{C}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ (es el gráfico de la función continua $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$); es una “superficie topológica”.
- (c) Sin embargo, $\mathcal{C}$ no es una superficie de clase C^r ($r \geq 1$). En efecto, si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva en $\mathcal{C}$, diferenciable en 0 y con $\alpha(0) = 0$, entonces $z(t) \geq 0 = z(0)$, de modo que $z'(0) = 0$; y como $|x(t)|, |y(t)| \leq z(t)$, también $x'(0) = y'(0) = 0$. Es decir, todos los vectores velocidad en 0 son nulos, mientras que en una superficie de dimensión 2 forman un plano (Proposición 8.7).

7.2.1 La esfera

Usaremos el siguiente lema.

Lema 7.10. *Las aplicaciones*

$$h: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}, \quad \bar{h}: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\},$$

ambas dadas por $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$, son homeomorfismos, con inversas

$$h^{-1}(u, v) = \pi - 2 \arctan\left(\frac{v}{1-u}\right), \quad \bar{h}^{-1}(u, v) = 2 \arctan\left(\frac{v}{1+u}\right).$$

Prueba. Ambas son biyectivas y continuas. Si $\theta \in (0, 2\pi)$ y $(u, v) = (\cos \theta, \sin \theta)$, entonces $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cot \frac{\theta}{2} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{v}{1 - u},$$

de donde $\theta = \pi - 2 \arctan \frac{v}{1-u}$, que es continua en $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$. Análogamente, si $\theta \in (-\pi, \pi)$, entonces $\frac{\theta}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{v}{1+u}$. $\square$

Ejemplo 7.11 (Coordenadas esféricas). La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ es una superficie de dimensión 2 y clase C^∞ . Consideremos la aplicación (latitud x , longitud y ; ver Figura 7.1)

$$\varphi(x, y) = (\cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x)$$

y el semimeridiano cerrado $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$, que contiene a los polos $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$.

Afirmación 1. $\varphi: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus G$ es una parametrización bidimensional de clase C^∞ .

(a) φ es un homeomorfismo. Es continua y biyectiva, con inversa

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\arcsin x_3, h^{-1}\left(\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}\right) \right), \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

que es continua por el Lema 7.10. Está bien definida: si $\rho = 0$, el punto es un polo, que pertenece a G ; y si $(x_1/\rho, x_2/\rho) = (1, 0)$, entonces $x_2 = 0$ y $x_1 > 0$, de nuevo un punto de G .

(b) φ es de clase C^∞ , pues sus coordenadas lo son.

(c) φ es una inmersión. Tenemos

$$J\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\cos x \varphi(x, y),$$

y como $\cos x \neq 0$ para $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, las columnas son linealmente independientes.

Afirmación 2. Si $G_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_2 = 0, x_1 \leq 0\}$, entonces $\varphi: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus G_-$ es una parametrización bidimensional de clase C^∞ (la prueba es la misma, usando $\bar{h}$ en lugar de h).

Las imágenes de estas dos parametrizaciones cubren $\mathbb{S}^2 \setminus (G \cap G_-) = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$. Para cubrir los polos basta intercambiar el papel de los ejes: la aplicación

$$\psi(x, y) = (\sin x, \cos x \cos y, \cos x \sin y), \quad (x, y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi),$$

es la composición de φ con la isometría lineal $(a, b, c) \mapsto (c, a, b)$, luego parametriza $\mathbb{S}^2 \setminus E_+$, donde $E_+ = \{x \in \mathbb{S}^2 : x_3 = 0, x_2 \geq 0\}$; y $N = \psi(0, \frac{\pi}{2})$, $S = \psi(0, \frac{3\pi}{2})$.

Ejemplo 7.12 (Esferas: parametrización por hemisferios). La esfera $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$ es una superficie de dimensión m y clase C^∞ en $\mathbb{R}^{m+1}$. Para $1 \leq i \leq m+1$ consideremos los hemisferios abiertos

$$H_{i+} = \{x \in \mathbb{S}^m : x_i > 0\}, \quad H_{i-} = \{x \in \mathbb{S}^m : x_i < 0\},$$

y las aplicaciones $\varphi_{i\pm}: \mathbb{B}^m \rightarrow H_{i\pm}$,

$$\varphi_{i\pm}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \left(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \cdots - \lambda_m^2}, \lambda_i, \dots, \lambda_m \right).$$

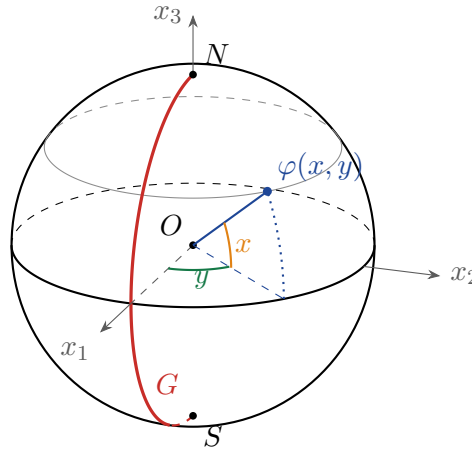


Figura 7.1: Coordenadas esféricas: latitud $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y longitud $y \in (0, 2\pi)$. La parametrización φ cubre $\mathbb{S}^2 \setminus G$.

Cada $\varphi_{i\pm}$ es una parametrización m -dimensional de clase C^∞ , pues $H_{i\pm}$ es el gráfico (respecto de las coordenadas distintas de la i -ésima) de la función $\pm\sqrt{1 - \|\lambda\|^2}$, de clase C^∞ en $\mathbb{B}^m$ (Ejemplos 7.8 y 7.13). Como todo punto de $\mathbb{S}^m$ tiene alguna coordenada no nula, $\mathbb{S}^m = \bigcup_{i=1}^{m+1} (H_{i+} \cup H_{i-})$. Para $m = 2$ se obtienen seis parametrizaciones de $\mathbb{S}^2$ por hemisferios; por ejemplo, $\varphi_{3\pm}(x, y) = (x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ en el disco unitario.

7.2.2 Más ejemplos

Ejemplo 7.13 (Gráficos respecto de coordenadas arbitrarias). Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f = (f_1, \dots, f_k): U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^r . Sea $I = \{i_1 < \dots < i_m\} \subset \{1, \dots, m+k\}$ un multi-índice de orden m y $I^c = \{i'_1 < \dots < i'_k\}$ su complemento. El gráfico de f relativo a I ,

$$\text{graf}_I(f) = \left\{ \sum_{j=1}^m x_j e_{i_j} + \sum_{l=1}^k f_l(x_1, \dots, x_m) e_{i'_l} : (x_1, \dots, x_m) \in U \right\} \subset \mathbb{R}^I \oplus \mathbb{R}^{I^c} = \mathbb{R}^{m+k},$$

es una superficie de dimensión m y clase C^r en $\mathbb{R}^{m+k}$: es la imagen de $\text{graf}(f)$ por una permutación de coordenadas (ver el Ejemplo 7.14).

Ejemplo 7.14 (Transformaciones de superficies). Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r , y $\Psi: W \rightarrow W'$ un difeomorfismo de clase C^r entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $M \subset W$. Entonces $M' = \Psi(M)$ es una superficie de dimensión m y clase C^r .

Prueba. Sea $p' \in M'$ y $p = \Psi^{-1}(p') \in M$. Sea $\varphi: U_0 \rightarrow U$ una parametrización local de M de clase C^r en torno de p y $U' = \Psi(U)$. Como $U = M \cap O$ con $O \subset \mathbb{R}^n$ abierto, se tiene $U' = M' \cap \Psi(O \cap W)$, que es abierto en M' porque Ψ es un homeomorfismo. Afirmamos que $\Psi \circ \varphi: U_0 \rightarrow U'$ es una parametrización m -dimensional de clase C^r : es un homeomorfismo (composición de homeomorfismos), es de clase C^r (composición de aplicaciones C^r) y es una inmersión, pues por la regla de la cadena (Teorema 1.35) $d(\Psi \circ \varphi)_x = d\Psi_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x$, donde $d\varphi_x$ es inyectiva y $d\Psi_{\varphi(x)}$ es un isomorfismo (Corolario 6.13). $\square$

Ejemplo 7.15 (Productos). Sean $M \subset \mathbb{R}^{n_1}$ y $N \subset \mathbb{R}^{n_2}$ superficies de clase C^r y dimensiones m_1 y m_2 . Entonces $M \times N$ es una superficie de dimensión $m_1 + m_2$ y clase C^r en $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$.

En efecto, dado $(p, q) \in M \times N$, sean $\varphi: U_0 \rightarrow U$ y $\psi: V_0 \rightarrow V$ parametrizaciones locales de M y N en torno de p y q . Entonces $U \times V$ es abierto en $M \times N$ y

$$\varphi \times \psi: U_0 \times V_0 \rightarrow U \times V, \quad (\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y)),$$

es una parametrización $(m_1 + m_2)$ -dimensional de clase C^r : es un homeomorfismo de clase C^r y $J(\varphi \times \psi) = \begin{pmatrix} J\varphi & 0 \\ 0 & J\psi \end{pmatrix}$ tiene rango $m_1 + m_2$. Por ejemplo, el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ son superficies de clase C^∞ .

7.3 Conjuntos de nivel como superficies

7.3.1 Motivación: sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos un sistema de k ecuaciones lineales con m incógnitas,

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{km}x_m = b_k, \end{cases}$$

que en el lenguaje del álgebra lineal se escribe $Ax = b$, con $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times m}$ (una aplicación lineal $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$), $x \in \mathbb{R}^m$ y $b \in \mathbb{R}^k$. ¿Cómo parametrizar el conjunto solución?

- Si $b \in \mathbb{R}^k \setminus \text{Im}(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in \text{Im}(A)$, tomamos $x_0 \in \mathbb{R}^m$ con $Ax_0 = b$; el conjunto solución es $x_0 + \text{Ker}(A)$. Si $\ell = \text{rango}(A)$, se trata de un subespacio afín de $\mathbb{R}^m$ de dimensión $m - \ell$.

Basta, pues, parametrizar $\text{Ker}(A)$. Como el rango de A es ℓ , existen ℓ direcciones canónicas $e_{j_1}, \dots, e_{j_\ell}$ cuyas imágenes por A generan $\text{Im}(A)$.

Proposición 7.16. Sea $A \in \mathcal{M}_{k \times m}$ de rango ℓ , $J = \{1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq m\}$ e $I = J^c = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m-\ell} \leq m\}$. Son equivalentes:

- (i) $\text{span}\{Ae_{j_1}, \dots, Ae_{j_\ell}\} = \text{Im}(A)$;
- (ii) $\text{Ker}(A) \oplus \mathbb{R}^J = \mathbb{R}^m$;
- (iii) la proyección canónica $\pi_I: \text{Ker}(A) \rightarrow \mathbb{R}^I$ es un isomorfismo;
- (iv) $\text{Ker}(A)$ es el gráfico de una aplicación lineal $T: \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^J$, es decir, $\text{Ker}(A) = \{u + T(u) : u \in \mathbb{R}^I\}$.

Ejemplo 7.17. Sea $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal de rango 2. Su núcleo es una recta de $\mathbb{R}^3$; si, por ejemplo, $I = \{1\}$ y $J = \{2, 3\}$, esta recta es el gráfico de una aplicación lineal $T: \mathbb{R}^{\{1\}} \rightarrow \mathbb{R}^{\{2,3\}}$.

En conclusión, $\text{Ker}(A)$ y el conjunto solución de $(*)$ se parametrizan mediante

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^{m-\ell} &\rightarrow \text{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^m, & \varphi(\lambda) &= \sum_{j=1}^{m-\ell} \lambda_j e_{i_j} + T\left(\sum_{j=1}^{m-\ell} \lambda_j e_{i_j}\right), \\ \psi: \mathbb{R}^{m-\ell} &\rightarrow \{x : Ax = b\}, & \psi(\lambda) &= x_0 + \varphi(\lambda). \end{aligned}$$

7.3.2 El caso no lineal

Consideremos ahora un sistema

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = c_1, \quad \dots, \quad f_k(x_1, \dots, x_m) = c_k, \quad (x_1, \dots, x_m) \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

que en el lenguaje del análisis se escribe $f(x) = c$, con $f = (f_1, \dots, f_k): U \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $c \in \mathbb{R}^k$. ¿Cómo parametrizar su conjunto solución?

- (a) Si $c \in \mathbb{R}^k \setminus f(U)$, el sistema no tiene solución.
- (b) Si $c \in f(U)$, tomamos una solución $x_0 \in U$. Si U es abierto y f es de clase C^1 , para $h \approx 0$ se tiene $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df_{x_0}(h) = c + df_{x_0}(h)$. Así, infinitesimalmente, $x_0 + h$ es solución si y solo si $df_{x_0}(h) = 0$, es decir, $h \in \text{Ker}(df_{x_0})$: cerca de x_0 , el conjunto solución debería parecerse a $x_0 + \text{Ker}(df_{x_0})$.

Notación. Dado un multi-índice $I \subset \{1, \dots, m\}$, escribimos $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^I \oplus \mathbb{R}^{I^c}$ y, para $x \in \mathbb{R}^m$, $x = x^I + x^{I^c}$ con $x^I = \pi_I(x)$ y $x^{I^c} = \pi_{I^c}(x)$. El *gráfico relativo a I* de una aplicación $\xi: V_0 \subset \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^{I^c}$ es $\{u + \xi(u) : u \in V_0\}$.

Teorema 7.18 (Conjuntos solución). Sean:

- $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^r ($r \geq 1$);
- $c \in \mathbb{R}^k$ y $x_0 \in U$ con $f(x_0) = c$;
- $\ell = \text{rango}(df_{x_0})$ e $I \subset \{1, \dots, m\}$ un multi-índice de orden $m - \ell$ respecto del cual $\text{Ker}(df_{x_0})$ es el gráfico de una aplicación lineal $T: \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^{I^c}$.

Si $\text{rango}(df_x) = \ell$ para todo x en un entorno $\tilde{U}$ de x_0 , entonces existe un abierto $V \subset \tilde{U}$ que contiene a x_0 tal que el conjunto solución $\{x \in V : f(x) = c\}$ es el gráfico relativo a I de una aplicación $\xi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^{I^c}$ de clase C^r , definida en un abierto $V_0 \subset \mathbb{R}^I$ que contiene a x_0^I . Además, $\xi(x_0^I) = x_0^{I^c}$ y $d\xi_{x_0^I} = T$.

Corolario 7.19. En las condiciones del Teorema 7.18:

- (a) la aplicación $\varphi: V_0 \rightarrow \{x \in V : f(x) = c\}$, $\varphi(u) = u + \xi(u)$, es una parametrización $(m - \ell)$ -dimensional de clase C^r del conjunto solución en V ;
- (b) si para cada solución x_0 de $f(x) = c$ el rango de df_x es igual a ℓ en un entorno de x_0 , entonces el conjunto solución $f^{-1}(c)$ es una superficie de dimensión $m - \ell$ y clase C^r en $\mathbb{R}^m$.

Casos especiales.

- (a) $\text{rango}(df_{x_0}) = m$, es decir, df_{x_0} es inyectiva. Como f es de clase C^1 , df_x sigue siendo inyectiva para x en un entorno de x_0 (un menor $m \times m$ no nulo de Jf sigue siéndolo cerca de x_0). Por el Teorema 7.18 (con $I = \emptyset$), existe un entorno de x_0 en el cual la única solución de $f(x) = c$ es x_0 .
- (b) $\text{rango}(df_{x_0}) = k$, es decir, df_{x_0} es sobreyectiva. Por continuidad, df_x sigue siendo sobreyectiva en un entorno de x_0 , y el Teorema 7.18 se aplica en torno de x_0 .

Corolario 7.20 (Valor regular). Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^r ($r \geq 1$) y $c \in \mathbb{R}^k$.

- (a) Si $\text{rango}(df_x) = m$ para todo $x \in f^{-1}(c)$, entonces $f^{-1}(c)$ es un conjunto discreto y cerrado en U .
- (b) Si $\text{rango}(df_x) = k$ para todo $x \in f^{-1}(c)$ (decimos que c es un valor regular de f), entonces $f^{-1}(c)$ es una superficie de dimensión $m - k$ y clase C^r en $\mathbb{R}^m$. En particular, si $k = 1$, basta que $\nabla f(x) \neq 0$ para todo $x \in f^{-1}(c)$ para que $f^{-1}(c)$ sea una superficie de dimensión $m - 1$ y clase C^r .

Ejemplo 7.21. $\mathbb{S}^m = f^{-1}(1)$ para $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$. Como $\nabla f(x) = 2x \neq 0$ en $\mathbb{S}^m$, el Corolario 7.20 da otra prueba de que $\mathbb{S}^m$ es una superficie de dimensión m y clase C^∞ .

Ejemplo 7.22 (El grupo ortogonal). Sea

$$\mathcal{O}_m = \{X \in \mathcal{M}_{m \times m} : XX^T = I\} = \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \ \forall u, v \in \mathbb{R}^m\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{O}_m$ es una superficie de clase C^∞ y dimensión $m^2 - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ en $\mathcal{M}_{m \times m} \cong \mathbb{R}^{m^2}$.

Prueba. Sea $S_m \cong \mathbb{R}^{m(m+1)/2}$ el espacio de las matrices simétricas y $f: \mathcal{M}_{m \times m} \rightarrow S_m$, $f(X) = XX^T$. Entonces $\mathcal{O}_m = f^{-1}(I)$ y:

- (a) f es de clase C^∞ , pues es polinomial;
- (b) para $X, V \in \mathcal{M}_{m \times m}$,

$$df_X(V) = \frac{\partial f}{\partial V}(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(X + tV)(X + tV)^T - XX^T}{t} = XV^T + VX^T;$$

- (c) si $XX^T = I$, $df_X: \mathcal{M}_{m \times m} \rightarrow S_m$ es sobreyectiva: dada $S \in S_m$, la matriz $V = \frac{1}{2}SX$ satisface $XV^T + VX^T = \frac{1}{2}XX^T S + \frac{1}{2}SXX^T = S$.

Luego I es un valor regular de f y, por el Corolario 7.20, $\mathcal{O}_m$ es una superficie de dimensión $\dim \mathcal{M}_{m \times m} - \dim S_m = \frac{m(m-1)}{2}$. $\square$

Ejemplo 7.23. Veamos concretamente el caso $m = 3$. Identificando $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ con $(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9$, la condición $XX^T = I$ equivale a

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, & x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 &= 1, & x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 &= 1, \\ x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 &= 0, & x_1x_7 + x_2x_8 + x_3x_9 &= 0, & x_4x_7 + x_5x_8 + x_6x_9 &= 0. \end{aligned}$$

Linealizando en torno de I : $df_I(H) = H + H^T = 0$, es decir,

$$h_1 = h_5 = h_9 = 0, \quad h_4 = -h_2, \quad h_7 = -h_3, \quad h_8 = -h_6.$$

Así, $\text{Ker}(df_I)$ es el gráfico relativo al multi-índice $\{2, 3, 6\}$ de la aplicación lineal $T: \mathbb{R}^{\{2,3,6\}} \rightarrow \mathbb{R}^{\{1,4,5,7,8,9\}}$, $T(h_2, h_3, h_6) = (0, -h_2, 0, -h_3, -h_6, 0)$. Por el Teorema 7.18 existen:

- (a) un abierto $V \subset \mathbb{R}^9$ que contiene a la identidad $I = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$;

- (b) un abierto $V_0 \subset \mathbb{R}^{\{2,3,6\}} \cong \mathbb{R}^3$ que contiene a $(0, 0, 0)$;
- (c) una aplicación $\xi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\{1,4,5,7,8,9\}}$ de clase C^∞ , $\xi(x_2, x_3, x_6) = (x_1, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9)$, con $\xi(0, 0, 0) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$ y

$$d\xi_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tales que $\mathcal{O}_3 \cap V = \{u + \xi(u) : u \in V_0\}$. En otras palabras, una matriz ortogonal X cercana a I queda determinada por sus entradas $(x_2, x_3, x_6) = (h_2, h_3, h_6)$, y a primer orden

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 & h_2 & h_3 \\ -h_2 & 1 & h_6 \\ -h_3 & -h_6 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3.3 El grupo de rotaciones

Definición 7.24. Decimos que una matriz ortogonal $A \in \mathcal{O}_m$ es una *rotación* si existe una curva continua $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_m$ con $\alpha(0) = I$ y $\alpha(1) = A$.

Observación 7.25. Si $A \in \mathcal{O}_m$, entonces $\det(A)^2 = \det(AA^T) = 1$, es decir, $\det A \in \{-1, 1\}$.

Proposición 7.26. Una matriz $A \in \mathcal{O}_m$ es una rotación si y solo si $\det A > 0$ (es decir, $\det A = 1$).

Prueba de ($\Rightarrow$). Si α es como en la definición, la función $t \mapsto \det \alpha(t)$ es continua en $[0, 1]$ y solo toma los valores ± 1 ; por conexidad es constante, e igual a $\det \alpha(0) = 1$. La implicación recíproca no se prueba aquí. $\square$

Corolario 7.27. El grupo de rotaciones $\mathcal{SO}_m = \{A \in \mathcal{O}_m : \det A = 1\}$ es un abierto de $\mathcal{O}_m$ (pues $\det$ es continua); por el Ejemplo 7.6, es una superficie de clase C^∞ y dimensión $\frac{m(m-1)}{2}$ en $\mathcal{M}_{m \times m}$.

Aplicaciones diferenciables entre superficies

8.1 Motivación y engorde de parametrizaciones

Recordemos la caracterización local de la diferenciabilidad clásica. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$.

- (a) f es diferenciable en $x_0 \in U$ si y solo si para algún (todo) abierto $V \subset U$ que contiene a x_0 la restricción $f|_V$ es diferenciable en x_0 .
- (b) f es diferenciable si y solo si cada punto de U tiene un entorno abierto $V \subset U$ tal que $f|_V$ es diferenciable.

Para definir la diferenciabilidad de una aplicación definida en una superficie M usaremos parametrizaciones locales. La herramienta técnica clave es la siguiente: toda parametrización local puede “engordarse” a un difeomorfismo entre abiertos del espacio ambiente.

Proposición 8.1 (Engorde de una parametrización). *Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r , $p_0 \in M$ y $\varphi: U_0 \rightarrow U$ una parametrización local de clase C^r de M con $\varphi(0) = p_0$. Entonces existen un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a p_0 , un $\varepsilon > 0$ y un difeomorfismo $\Phi: Q_\varepsilon^n \rightarrow W$ de clase C^r , donde $Q_\varepsilon^n = Q_\varepsilon^m \times Q_\varepsilon^{n-m}$, tales que:*

- (a) $Q_\varepsilon^m \subset U_0$;
- (b) $\Phi(x, 0) = \varphi(x)$ para todo $x \in Q_\varepsilon^m$;
- (c) $\Phi(Q_\varepsilon^m \times \{0\}) = W \cap M$.

Idea de la prueba. Sean $w_1, \dots, w_{n-m} \in \mathbb{R}^n$ vectores que completan una base junto con las columnas de $J\varphi(0)$, y $G(x, y) = \varphi(x) + \sum_j y_j w_j$ para $(x, y) \in U_0 \times \mathbb{R}^{n-m}$. Como $dG_{(0,0)}$ es un isomorfismo, por el teorema de la función inversa G es un difeomorfismo de clase C^r de un cubo Q_δ^n sobre un abierto. Como φ es un homeomorfismo sobre el abierto U de M , $\varphi(Q_\delta^m) = M \cap O$ para cierto abierto $O \subset \mathbb{R}^n$; tomando $\varepsilon < \delta$ con $G(Q_\varepsilon^n) \subset O$, la inyectividad de G en Q_δ^n da (c) con $W = G(Q_\varepsilon^n)$ y $\Phi = G|_{Q_\varepsilon^n}$.

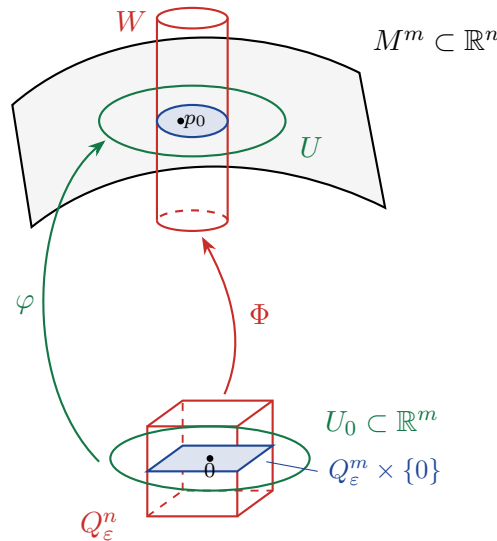


Figura 8.1: El difeomorfismo Φ “engorda” la parametrización φ : $\Phi(x, 0) = \varphi(x)$ y $\Phi(Q_\varepsilon^m \times \{0\}) = W \cap M$ (en azul).

8.2 Aplicaciones diferenciables en superficies

Proposición 8.2. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^r , $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $p_0 \in M$. Son equivalentes:

- (i) para alguna parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de clase C^r en torno de p_0 , la representación local $f \circ \varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable (en el sentido clásico) en $x_0 = \varphi^{-1}(p_0)$;
- (ii) para toda parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de clase C^r en torno de p_0 , la representación local $f \circ \varphi$ es diferenciable en $x_0 = \varphi^{-1}(p_0)$;
- (iii) existen un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a p_0 y una aplicación $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable en p_0 tal que $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$.

Prueba. (iii) $\Rightarrow$ (ii): dada una parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ en torno de p_0 , se tiene $f \circ \varphi = F \circ \varphi$ en el abierto $\varphi^{-1}(U \cap W) \subset \mathbb{R}^m$. Como φ es diferenciable en x_0 y F es diferenciable en $\varphi(x_0) = p_0$, la regla de la cadena implica que $f \circ \varphi$ es diferenciable en x_0 .

(ii) $\Rightarrow$ (i): es inmediato.

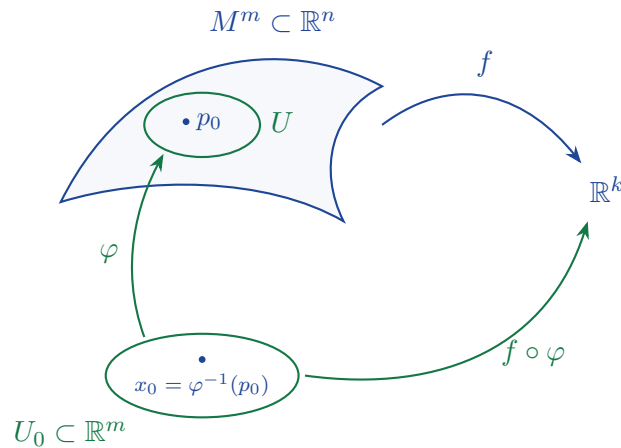
(i) $\Rightarrow$ (iii): trasladando, podemos suponer $x_0 = 0$. Engordamos φ mediante $\Phi: Q_\varepsilon^n \rightarrow W$ (Proposición 8.1) y definimos $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ por

$$F = (f \circ \varphi) \circ \pi_m \circ \Phi^{-1},$$

donde $\pi_m(x, y) = x$. Como Φ^{-1} es diferenciable en p_0 , π_m es lineal y $f \circ \varphi$ es diferenciable en 0, F es diferenciable en p_0 . Además, si $q \in W \cap M$, entonces $\Phi^{-1}(q) = (x, 0)$ con $\varphi(x) = q$, y $F(q) = f(\varphi(x)) = f(q)$. $\square$

Definición 8.3. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^r y $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$.

- (a) f es diferenciable en $p_0 \in M$ si se cumple alguna (y, por tanto, todas) de las condiciones de la Proposición 8.2.


 Figura 8.2: Representación local $f \circ \varphi$ de una aplicación $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$.

(b) f es *diferenciable* si es diferenciable en todo punto de M .

8.3 Aplicaciones de clase C^s en superficies de clase C^r

Proposición 8.4. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r , $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $1 \leq s \leq r$. Son equivalentes:

- (i) en torno de cada punto $p \in M$ existe una parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de clase C^r tal que $f \circ \varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ es de clase C^s ;
- (ii) para toda parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de clase C^r de M , la representación local $f \circ \varphi$ es de clase C^s ;
- (iii) en torno de cada punto $p \in M$ existen un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^s tales que $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$.

En este caso decimos que f es de clase C^s , y escribimos $f \in C^s(M, \mathbb{R}^k)$.

Prueba. (iii) $\Rightarrow$ (ii): sea $\varphi: U_0 \rightarrow U$ una parametrización local y $x \in U_0$. Por (iii) existen un abierto $W \ni p = \varphi(x)$ y $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^s con $F = f$ en $W \cap M$. Entonces, en el abierto $\varphi^{-1}(W \cap U)$ de U_0 que contiene a x ,

$$(f \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(W \cap U)} = (F \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(W \cap U)},$$

que es de clase C^s (composición de aplicaciones de clase C^s , pues $s \leq r$). Como x es arbitrario, $f \circ \varphi$ es de clase C^s por la caracterización local de la clase C^s .

(ii) $\Rightarrow$ (i): es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (iii): dado $p \in M$, sea $\varphi: U_0 \rightarrow U$ una parametrización local en torno de p con $f \circ \varphi$ de clase C^s . Engordamos φ mediante Φ en un cubo en torno de $x = \varphi^{-1}(p)$ y definimos $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ por

$$F = \underbrace{(f \circ \varphi)}_{C^s} \circ \underbrace{\pi_m}_{C^\infty} \circ \underbrace{\Phi^{-1}}_{C^r},$$

que es de clase C^s (pues $s \leq r$) y coincide con f en $W \cap M$. □

Corolario 8.5 (Cambio de coordenadas). Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^r y sean $\varphi: U_0 \rightarrow U$ y $\psi: V_0 \rightarrow V$ parametrizaciones locales de clase C^r con $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces la aplicación de cambio de coordenadas

$$\varphi^{-1} \circ \psi: \psi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \varphi^{-1}(U \cap V)$$

es un difeomorfismo de clase C^r .

Prueba. El abierto U de M es una superficie de clase C^r (Ejemplo 7.6) y la aplicación $\varphi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisface la condición (i) de la Proposición 8.4 con $s = r$, pues φ cubre U y $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_{U_0}$ es de clase C^∞ . Por (ii), aplicada a la parametrización local $\psi|_{\psi^{-1}(U \cap V)}$ de U , la aplicación $\varphi^{-1} \circ \psi$ es de clase C^r . Intercambiando los papeles de φ y ψ , su inversa $\psi^{-1} \circ \varphi$ también es de clase C^r . $\square$

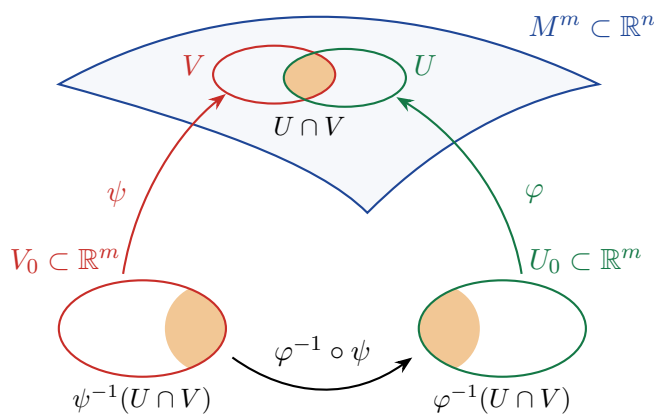


Figura 8.3: Cambio de coordenadas entre dos parametrizaciones locales.

8.3.1 Propiedades de las aplicaciones de clase C^s

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r y $1 \leq s \leq r$. La definición de diferenciabilidad en superficies extiende la clásica (si M es un abierto de $\mathbb{R}^m$, basta tomar $\varphi = \text{id}$). Además:

- (a) $C^s(M, \mathbb{R})$ es un anillo y $C^s(M, \mathbb{R}^k)$ es un módulo sobre $C^s(M, \mathbb{R})$.
- (b) Si existe $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^s , con $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto que contiene a M y $F|_M = f$, entonces f es de clase C^s .
- (c) $f = (f_1, \dots, f_k) \in C^s(M, \mathbb{R}^k)$ si y solo si $f_1, \dots, f_k \in C^s(M, \mathbb{R})$, pues $(f \circ \varphi)_i = f_i \circ \varphi$.
- (d) (*Caracterización local*) Si $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cobertura de M por abiertos de M , entonces $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es de clase C^s si y solo si cada restricción $f|_{U_\lambda}$ es de clase C^s .

Prueba. Si cada $f|_{U_\lambda}$ es de clase C^s , dado $p \in M$ tomamos λ con $p \in U_\lambda$ y una parametrización local φ de U_λ en torno de p con $f \circ \varphi$ de clase C^s ; como φ es también una parametrización local de M , vale (i). Recíprocamente, si f es de clase C^s y $\varphi: U_0 \rightarrow U$ es una parametrización local de M en torno de $p \in U_\lambda$, su restricción a $\varphi^{-1}(U \cap U_\lambda)$ es una parametrización local de U_λ en torno de p , y $f \circ \varphi$ es de clase C^s allí. $\square$

- (e) (*Composición*) Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ superficies de clase C^r , $f: M \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clase C^s con $f(M) \subset N$ y $g: N \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^s . Entonces $g \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es de clase C^s . En efecto, dado $p \in M$, sean $G: W' \rightarrow \mathbb{R}^k$ una extensión de clase C^s de g en torno de $f(p)$ y $F: W \rightarrow \mathbb{R}^q$ una extensión de clase C^s de f en torno de p con $F(W) \subset W'$ (reduciendo W por continuidad); entonces $G \circ F$ es de clase C^s y coincide con $g \circ f$ en $W \cap M$.
- (f) Si $\varphi: U_0 \rightarrow U$ es una parametrización local de clase C^r de M , entonces $\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ son de clase C^r . La primera afirmación es la definición; la segunda se sigue de (i) en la Proposición 8.4, pues $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_{U_0}$.
- (g) Si $N \subset M$ son superficies de clase C^r en $\mathbb{R}^n$ y $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es de clase C^s , entonces $f|_N$ es de clase C^s : basta usar (iii) de la Proposición 8.4.

Corolario 8.6. Si $N \subset M$ son superficies de clase C^r , la inclusión $N \hookrightarrow M$ es de clase C^r (es la restricción de la identidad de $\mathbb{R}^n$).

8.4 Espacio tangente

Proposición 8.7. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r , $p \in M$ y $\varphi: U_0 \rightarrow U$ una parametrización local de clase C^r con $\varphi(x_0) = p$. Entonces

$$\{\alpha'(0) : \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ diferenciable en } 0, \alpha(0) = p\} = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^m).$$

En particular, este conjunto es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m , y la imagen $d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^m)$ no depende de la parametrización φ .

Prueba. ($\supset$) Dado $u \in \mathbb{R}^m$, la curva $\alpha(t) = \varphi(x_0 + tu)$, definida para $|t|$ pequeño, está en M , satisface $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = d\varphi_{x_0}(u)$.

($\subset$) Sea α una curva como en el enunciado. Por continuidad, $\alpha(t) \in U$ para $|t|$ pequeño. La aplicación $\varphi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^r (propiedad (f) de la sección anterior), así que cerca de p coincide con una aplicación de clase C^r definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$ (Proposición 8.4 (iii)); por la regla de la cadena, $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$ es diferenciable en 0, con $\beta(0) = x_0$. Como $\alpha = \varphi \circ \beta$, la regla de la cadena da $\alpha'(0) = d\varphi_{x_0}(\beta'(0)) \in d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^m)$.

Finalmente, $\dim d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^m) = m$ porque $d\varphi_{x_0}$ es inyectiva. $\square$

Definición 8.8 (Espacio tangente). El espacio tangente a M en p es el subespacio vectorial de dimensión m

$$T_p M = \{\alpha'(0) : \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ diferenciable en } 0, \alpha(0) = p\} = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^m),$$

donde $\varphi: U_0 \rightarrow U$ es cualquier parametrización local de clase C^r de M con $\varphi(x_0) = p$. Una base de $T_p M$ es $\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x_0)\}$.

Proposición 8.9. Sean $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^r y $c \in \mathbb{R}^k$ un valor regular de f , de modo que $M = f^{-1}(c)$ es una superficie de dimensión $n - k$ (Corolario 7.20). Entonces

$$T_p M = \text{Ker}(df_p) \quad \text{para todo } p \in M.$$

Prueba. Ambos son subespacios de dimensión $n - k$: $T_p M$ porque $\dim M = n - k$, y $\text{Ker}(df_p)$ porque df_p es sobreyectiva. Basta, pues, probar $T_p M \subset \text{Ker}(df_p)$. Sea $v = \alpha'(0) \in T_p M$ con α

una curva en M , $\alpha(0) = p$. Como $f(\alpha(t)) = c$ para todo t cerca de 0, derivando en $t = 0$ y usando la regla de la cadena,

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = df_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = df_p(v). \quad \square$$

Ejemplo 8.10. Por el Ejemplo 7.22, $\mathcal{O}_m = f^{-1}(I)$ con $f(X) = XX^T$ e I valor regular. Luego

$$T_I \mathcal{O}_m = \text{Ker}(df_I) = \{A \in \mathcal{M}_{m \times m} : A + A^T = 0\},$$

el espacio de las matrices antisimétricas, que en efecto tiene dimensión $\frac{m(m-1)}{2}$.

Observación 8.11 (El espacio ambiente no importa). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial y $M \subset E$. Un subconjunto $U \subset M$ es abierto en M considerado como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ si y solo si lo es considerado como subconjunto de E (toda norma de $\mathbb{R}^n$ restringida a E es una norma de E). En consecuencia, M es una superficie de dimensión m y clase C^r en $\mathbb{R}^n$ si y solo si lo es en $E \cong \mathbb{R}^{\dim E}$ (identificando E con $\mathbb{R}^{\dim E}$ mediante una base): las parametrizaciones son las mismas, ser homeomorfismo es una propiedad intrínseca, y ni la clase C^r ni la inyectividad de la derivada dependen del espacio ambiente (el ambiente solo interviene al controlar el error mediante una norma, y basta restringirla).

Ejemplo 8.12. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial de dimensión k . Si $L: \mathbb{R}^k \rightarrow E$ es la isometría lineal asociada a una base ortonormal de E , entonces $L(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{S}^{n-1} \cap E$. Por la observación anterior, $\mathbb{S}^{n-1} \cap E$ es una superficie de dimensión $k-1$ y clase C^∞ , y L, L^{-1} se restringen a aplicaciones de clase C^∞ , inversas entre sí, entre $\mathbb{S}^{k-1}$ y $\mathbb{S}^{n-1} \cap E$.

8.5 La derivada de una aplicación definida en una superficie

Definición 8.13. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^r , $p_0 \in M$ y $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable en p_0 . Para $v \in T_{p_0}M$ definimos $df_{p_0}(v) \in \mathbb{R}^k$ mediante cualquiera de las siguientes fórmulas:

- (i) $df_{p_0}(v) = (f \circ \alpha)'(0)$, donde $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es diferenciable en 0, $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = v$;
- (ii) $df_{p_0}(v) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(x_0)$, donde $\varphi: U_0 \rightarrow U$ es una parametrización local de clase C^r en torno de p_0 , $x_0 = \varphi^{-1}(p_0)$ y $u \in \mathbb{R}^m$ es el único vector con $d\varphi_{x_0}(u) = v$;
- (iii) $df_{p_0}(v) = \frac{\partial F}{\partial v}(p_0)$, donde $F: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable en p_0 , $W \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto que contiene a p_0 y $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$.

Observación 8.14. Explícitamente,

$$(f \circ \alpha)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t)) - f(p_0)}{t}, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(p_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p_0 + tv) - F(p_0)}{t}.$$

En general $p_0 + tv \notin M$; por eso en (iii) se necesita la extensión F .

Proposición 8.15. Las tres fórmulas de la Definición 8.13 no dependen de las elecciones realizadas (α, φ o F) y son equivalentes.

Prueba. (i) $\Leftrightarrow$ (iii): como α es continua en 0, $\alpha(t) \in W \cap M$ para $|t|$ pequeño, y allí $f \circ \alpha = F \circ \alpha$. Luego

$$(f \circ \alpha)'(0) = (F \circ \alpha)'(0) = dF_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = dF_{p_0}(v) = \frac{\partial F}{\partial v}(p_0).$$

El primer miembro no depende de F y el último no depende de α ; por lo tanto ninguno depende de las elecciones.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): en un entorno de x_0 se tiene $f \circ \varphi = F \circ \varphi$, así que

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(x_0) = d(F \circ \varphi)_{x_0}(u) = dF_{p_0}(d\varphi_{x_0}(u)) = dF_{p_0}(v) = \frac{\partial F}{\partial v}(p_0). \quad \square$$

Proposición 8.16. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^r y $p_0 \in M$.

- (a) La definición extiende la derivada clásica de aplicaciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^m$ (tomar $F = f$ en (iii)).
- (b) Si $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable en p_0 , la aplicación $df_{p_0}: T_{p_0}M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es lineal: $df_{p_0} = dF_{p_0}|_{T_{p_0}M}$.
- (c) (Aritmética) Si $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en p_0 , entonces, para todo $v \in T_{p_0}M$,

$$\begin{aligned} d(f \pm g)_{p_0}(v) &= df_{p_0}(v) \pm dg_{p_0}(v), \\ d(\lambda f)_{p_0}(v) &= \lambda(p_0) df_{p_0}(v) + d\lambda_{p_0}(v) f(p_0), \\ d(f/\lambda)_{p_0}(v) &= \frac{\lambda(p_0) df_{p_0}(v) - d\lambda_{p_0}(v) f(p_0)}{\lambda(p_0)^2} \quad (\lambda(p_0) \neq 0). \end{aligned}$$

Basta usar (iii) y la Proposición 1.33.

- (d) Sean $N \subset \mathbb{R}^q$ otra superficie de clase C^r y $f: M \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferenciable en p_0 con $f(M) \subset N$. Entonces $df_{p_0}(T_{p_0}M) \subset T_{f(p_0)}N$: si $v = \alpha'(0)$, la curva $f \circ \alpha$ está en N , es diferenciable en 0 y pasa por $f(p_0)$, de modo que $df_{p_0}(v) = (f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p_0)}N$. Así, consideramos $df_{p_0}: T_{p_0}M \rightarrow T_{f(p_0)}N$.
- (e) (Regla de la cadena) Sean M, N, P superficies de clase C^r , $f: M \rightarrow N$ diferenciable en p_0 y $g: N \rightarrow P$ diferenciable en $f(p_0)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en p_0 y

$$d(g \circ f)_{p_0} = dg_{f(p_0)} \circ df_{p_0}: T_{p_0}M \rightarrow T_{g(f(p_0))}P.$$

- (f) (Derivación en coordenadas) $f = (f_1, \dots, f_k): M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable en p_0 si y solo si cada f_j lo es y, en ese caso,

$$df_{p_0}(v) = ((df_1)_{p_0}(v), \dots, (df_k)_{p_0}(v)), \quad v \in T_{p_0}M.$$

Prueba de (e). Si F y G son extensiones de f y g diferenciables en p_0 y en $f(p_0)$ (con $F(W)$ contenido en el dominio de G), entonces $G \circ F$ es una extensión de $g \circ f$ diferenciable en p_0 . Sea $v \in T_{p_0}M$ y $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = v$. Como $f \circ \alpha$ es una curva en N con $(f \circ \alpha)(0) = f(p_0)$ y $(f \circ \alpha)'(0) = df_{p_0}(v)$, la fórmula (i) aplicada a g da

$$dg_{f(p_0)}(df_{p_0}(v)) = (g \circ (f \circ \alpha))'(0) = ((g \circ f) \circ \alpha)'(0) = d(g \circ f)_{p_0}(v). \quad \square$$

Integración en superficies

Que una superficie sea diferenciable significa que puede ser *infinitesimalizada*: sus infinitésimos viven en el espacio tangente. El elemento de volumen $d\mu$ de una superficie mide el volumen m -dimensional del paralelepípedo infinitesimal generado por los vectores tangentes $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx_m$.

9.1 Integración en abiertos de $\mathbb{R}^m$

Empezamos con las superficies más sencillas: los abiertos de $\mathbb{R}^m$ (no necesariamente acotados).

Definición 9.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Una función acotada $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tiene *soporte compacto* si existe un compacto $K \subset U$ tal que $f = 0$ fuera de K .

Proposición 9.2. Sean $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$ acotados y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada con $f = 0$ fuera de Y . Entonces $\int_X f = \int_Y f$ y $\overline{\int}_X f = \overline{\int}_Y f$. En particular, f es integrable en X si y solo si $f|_Y$ es integrable en Y y, en ese caso, $\int_X f = \int_Y f$.

Prueba. Las extensiones por cero de f y de $f|_Y$ a $\mathbb{R}^m$ coinciden. □

Definición 9.3. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto, digamos $f = 0$ fuera del compacto $K \subset U$. Definimos

$$\int_U f(x) dx = \int_K f(x) dx, \quad \overline{\int}_U f(x) dx = \overline{\int}_K f(x) dx.$$

Por la Proposición 9.2, estas cantidades no dependen del compacto K (ambas coinciden con las integrales de la extensión por cero de f en cualquier caja que contenga a K). Decimos que f es *integrable* si $\int_U f = \overline{\int}_U f$; este valor común se denota $\int_U f(x) dx$.

Proposición 9.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto.

- (a) Si U es acotado, la definición anterior coincide con la integral usual en U (Proposición 9.2).
- (b) Sumas y múltiplos escalares de funciones con soporte compacto tienen soporte compacto (basta tomar la unión de los compactos), y valen la aditividad algebraica y el producto por un escalar.
- (c) Valen la comparación de integrales y la desigualdad triangular.
- (d) Toda función continua con soporte compacto $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Prueba de (d). Sea $K \subset U$ compacto con $f = 0$ fuera de K . Por compacidad, K puede cubrirse con un número finito de cajas cerradas contenidas en U ; su unión L es un compacto J -medible con $K \subset L \subset U$. Entonces $\int_U f = \int_L f$ y $\overline{\int}_U f = \overline{\int}_L f$, y como $f|_L$ es continua en el conjunto J -medible L , es integrable. □

Teorema 9.5 (Fubini en abiertos). Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ continua con soporte compacto $K \subset U \times V$.

- (a) Para cada $y \in V$, la función $f_y: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$, es continua con soporte compacto contenido en $\pi_m(K \cap (\mathbb{R}^m \times \{y\}))$ (Figura 9.1, izquierda).
- (b) La función $i_1: V \rightarrow \mathbb{R}$, $i_1(y) = \int_U f_y(x) dx$, es continua con soporte compacto contenido en $\pi_n(K)$ (Figura 9.1, derecha).
- (c) Se tiene

$$\int_{U \times V} f(x, y) dx dy = \int_V \left(\int_U f(x, y) dx \right) dy = \int_U \left(\int_V f(x, y) dy \right) dx.$$

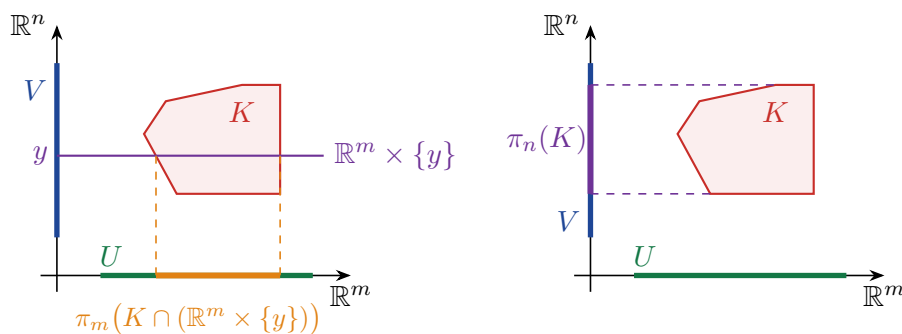


Figura 9.1: Soportes en el teorema de Fubini: a la izquierda, el soporte de f_y ; a la derecha, el de i_1 .

Teorema 9.6 (Cambio de variable en abiertos). Sean $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $\varphi: U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase C^r ($r \geq 1$) y $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ continua con soporte compacto K . Entonces $f \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ es continua con soporte compacto $\varphi^{-1}(K)$ y

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det J\varphi(x)| dx.$$

Es decir, $\int_K f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(K)} f(\varphi(x)) |\det J\varphi(x)| dx$.

Observación 9.7. El conjunto $C_c(U, \mathbb{R}^k)$ de las aplicaciones continuas con soporte compacto es un módulo sobre el anillo $C(U, \mathbb{R})$ de las funciones continuas: el producto de una función continua por una aplicación continua con soporte compacto tiene soporte compacto.

9.2 Integral en el dominio de una parametrización

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r ($r \geq 1$) y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ continua con soporte compacto $K \subset M$. Queremos definir

$$\int_M f d\mu,$$

donde $d\mu$ representa el elemento de volumen m -dimensional de M .

Definición 9.8. Supongamos que K está contenido en la imagen de una parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de clase C^r de M . Definimos

$$\int_M f \, d\mu = \int_{U_0} f(\varphi(x)) \, \text{vol}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}(x)\right) dx = \int_{U_0} f(\varphi(x)) \sqrt{\det(J\varphi(x)^T J\varphi(x))} \, dx,$$

donde $\text{vol}(v_1, \dots, v_m)$ es el volumen m -dimensional del paralelepípedo generado por $v_1, \dots, v_m$, que es igual a la raíz cuadrada del determinante de la *matriz de Gram* $(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$. Notemos que $J\varphi(x)^T J\varphi(x) = (\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) \rangle)_{i, j}$.

El integrando es continuo y tiene soporte compacto $\varphi^{-1}(K) \subset U_0$ (pues φ^{-1} es continua), así que es integrable por la Proposición 9.4 (d).

Observación 9.9. Si $m = 1$ (curvas), $\sqrt{\det(J\varphi^T J\varphi)} = \|\varphi'(t)\|$. Si $m = 2$ y $n = 3$, por la identidad de Lagrange $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$,

$$\sqrt{\det(J\varphi^T J\varphi)} = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right\|.$$

Si $m = n$, $\sqrt{\det(J\varphi^T J\varphi)} = |\det J\varphi|$ y se recupera el teorema del cambio de variable.

Proposición 9.10. La definición anterior no depende de la parametrización local cuya imagen contiene a K .

Prueba. Sean $\varphi: U_0 \rightarrow U$ y $\psi: V_0 \rightarrow V$ parametrizaciones locales con $K \subset U \cap V$. Los integrandos correspondientes se anulan fuera de $\varphi^{-1}(K) \subset \varphi^{-1}(U \cap V)$ y de $\psi^{-1}(K) \subset \psi^{-1}(U \cap V)$, respectivamente, así que basta comparar

$$\begin{aligned} I_\varphi &= \int_{\varphi^{-1}(U \cap V)} f(\varphi(x)) \sqrt{\det(J\varphi(x)^T J\varphi(x))} \, dx \quad y \\ I_\psi &= \int_{\psi^{-1}(U \cap V)} f(\psi(y)) \sqrt{\det(J\psi(y)^T J\psi(y))} \, dy. \end{aligned}$$

Por el Corolario 8.5, $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$ es un difeomorfismo de clase C^r . Por el teorema del cambio de variable, con $y = \theta(x)$,

$$I_\psi = \int_{\varphi^{-1}(U \cap V)} f(\psi(\theta(x))) \sqrt{\det(J\psi(\theta(x))^T J\psi(\theta(x)))} |\det J\theta(x)| \, dx.$$

Ahora bien, $\psi \circ \theta = \varphi$ en $\varphi^{-1}(U \cap V)$; en particular $f(\psi(\theta(x))) = f(\varphi(x))$ y, por la regla de la cadena, $J\psi(\theta(x)) J\theta(x) = J\varphi(x)$. Luego

$$J\varphi(x)^T J\varphi(x) = J\theta(x)^T (J\psi(\theta(x))^T J\psi(\theta(x))) J\theta(x),$$

y tomando determinantes y raíces cuadradas,

$$\sqrt{\det(J\varphi(x)^T J\varphi(x))} = |\det J\theta(x)| \sqrt{\det(J\psi(\theta(x))^T J\psi(\theta(x)))}.$$

Así, $I_\psi = I_\varphi$. □

9.3 Conjuntos de medida nula y conjuntos J -medibles en una superficie

Proposición 9.11. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r y $X \subset M$. Son equivalentes:

- (i) todo $p \in X$ admite una parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de clase C^r en torno de p tal que $\varphi^{-1}(U \cap X)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$;
- (ii) para toda parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de clase C^r de M , el conjunto $\varphi^{-1}(U \cap X)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$.

Prueba. (ii) $\Rightarrow$ (i) es inmediato. Para (i) $\Rightarrow$ (ii), sea $\psi: V_0 \rightarrow V$ una parametrización local. Para cada $p \in X \cap V$, sea $\varphi: U_0 \rightarrow U$ como en (i). Como $\psi^{-1} \circ \varphi$ es de clase C^1 (Corolario 8.5), es localmente lipschitziana y, por la Proposición 5.16,

$$\psi^{-1}(U \cap V \cap X) = (\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(U \cap V \cap X))$$

tiene medida nula. Por el Lema de Lindelöf, una cantidad numerable de estos abiertos $\psi^{-1}(U \cap V)$ cubre $\psi^{-1}(V \cap X)$, que por lo tanto tiene medida nula. $\square$

Definición 9.12. Sea M una superficie de clase C^r ($r \geq 1$).

- (a) $X \subset M$ tiene *medida nula en M* si cumple las condiciones equivalentes de la proposición anterior.
- (b) $X \subset M$ es *J -medible* si su frontera ∂X relativa a M tiene medida nula en M .

Ejemplo 9.13. Sea $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (un cilindro). Para todo $c \in \mathbb{R}$, el círculo $\mathbb{S}^1 \times \{c\}$ tiene medida nula en M : en las parametrizaciones $(\theta, t) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, t)$, su preimagen es un segmento horizontal $\{t = c\}$, de medida nula en $\mathbb{R}^2$.

Notación. Si $K \subset M$ es compacto y J -medible y $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, distinguimos $\int_K f d\mu_M$, la integral respecto del volumen m -dimensional de M , de $\int_K f dx$, la integral en $\mathbb{R}^n$ (que es nula si $m < n$, pues K tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$). Cuando no hay ambigüedad escribimos simplemente $d\mu$.

9.4 Integral sobre compactos J -medibles

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^r , $K \subset M$ compacto y J -medible, y $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Caso 1: K está contenido en la imagen de una parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$. Como φ es un homeomorfismo, $\varphi^{-1}(K)$ es compacto y su frontera es $\varphi^{-1}(\partial K)$, que tiene medida nula; así, $\varphi^{-1}(K)$ es J -medible en $\mathbb{R}^m$ y definimos

$$\int_K f d\mu = \int_{\varphi^{-1}(K)} f(\varphi(x)) \sqrt{\det(J\varphi(x)^T J\varphi(x))} dx.$$

Como antes (usando ahora el Teorema 6.17), esta definición no depende de φ .

Caso 2: caso general.

Proposición 9.14. *Todo compacto J -medible K de una superficie M de clase C^r admite una descomposición*

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_q, \quad \text{int}(K_i \cap K_j) = \emptyset \quad (i \neq j),$$

donde el interior es relativo a M y cada K_i es compacto, J -medible y está contenido en la imagen de alguna parametrización local de M .

Definición 9.15. En la situación anterior definimos

$$\int_K f \, d\mu = \sum_{i=1}^q \int_{K_i} f \, d\mu, \quad (9.1)$$

donde cada sumando se calcula como en el Caso 1.

Proposición 9.16. *La suma (9.1) no depende de la descomposición de K .*

Prueba. Sean $K = \bigcup_{i=1}^q K_i = \bigcup_{j=1}^{q'} L_j$ dos descomposiciones como en la proposición anterior. Para cada i , los conjuntos $K_i \cap L_j$, $1 \leq j \leq q'$, forman una descomposición de K_i en compactos J -medibles contenidos en la imagen de una misma parametrización; llevándola a $\mathbb{R}^m$ mediante dicha parametrización y usando el Corolario 4.20,

$$\int_{K_i} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{q'} \int_{K_i \cap L_j} f \, d\mu.$$

Análogamente, $\int_{L_j} f \, d\mu = \sum_{i=1}^q \int_{K_i \cap L_j} f \, d\mu$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^q \int_{K_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{q'} \int_{K_i \cap L_j} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{q'} \int_{L_j} f \, d\mu. \quad \square$$

Definición 9.17. El *volumen* (m -dimensional) de un compacto J -medible K de una superficie M^m de clase C^r es

$$\text{vol}(K) = \int_K 1 \, d\mu.$$

Para $m = 1$ se habla de *longitud* y para $m = 2$ de *área*.

9.5 Ejemplos

Ejemplo 9.18 (Longitud del círculo). $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie compacta de dimensión 1 y clase C^∞ , y su longitud es $\ell(\mathbb{S}^1) = \int_{\mathbb{S}^1} 1 \, d\mu$. Consideremos la descomposición $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}_+^1 \cup \mathbb{S}_-^1$, con $\mathbb{S}_+^1 = \{y \geq 0\}$ y $\mathbb{S}_-^1 = \{y \leq 0\}$, cuya intersección $\{(\pm 1, 0)\}$ tiene interior vacío en $\mathbb{S}^1$. Sea $h(t) = (\cos t, \sin t)$. La restricción $h: (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, -1)\}$ es una parametrización cuya imagen contiene a $\mathbb{S}_+^1$, con $h^{-1}(\mathbb{S}_+^1) = [0, \pi]$; y $h: (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, 1)\}$ es una parametrización cuya imagen contiene a $\mathbb{S}_-^1$, con $h^{-1}(\mathbb{S}_-^1) = [\pi, 2\pi]$. Como $\|h'(t)\| = 1$ (Observación 9.9),

$$\ell(\mathbb{S}^1) = \int_{\mathbb{S}_+^1} 1 \, d\mu + \int_{\mathbb{S}_-^1} 1 \, d\mu = \int_0^\pi \|h'(t)\| \, dt + \int_\pi^{2\pi} \|h'(t)\| \, dt = 2\pi.$$

Ejemplo 9.19 (Área de la esfera). Descomponemos $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_+^2 \cup \mathbb{S}_-^2$, con $\mathbb{S}_\pm^2 = \{\pm x_3 \geq 0\}$; la intersección (el ecuador) tiene interior vacío en $\mathbb{S}^2$. La reflexión $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, -x_3)$ es una isometría que intercambia ambos hemisferios y no altera las matrices de Gram, de modo que

$$\text{Área}(\mathbb{S}^2) = \text{Área}(\mathbb{S}_+^2) + \text{Área}(\mathbb{S}_-^2) = 2 \text{Área}(\mathbb{S}_-^2).$$

Usamos la *proyección estereográfica* desde el polo norte N , $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$,

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2} (2x_1, 2x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad \varphi^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{1 - y_3} (y_1, y_2).$$

Como la tercera coordenada de $\varphi(x)$ es ≤ 0 si y solo si $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, se tiene $\varphi^{-1}(\mathbb{S}_-^2) = \overline{B}(0, 1)$. Escribiendo $s = 1 + x_1^2 + x_2^2$, un cálculo directo da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{2}{s^2} (1 - x_1^2 + x_2^2, -2x_1x_2, 2x_1), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{2}{s^2} (-2x_1x_2, 1 + x_1^2 - x_2^2, 2x_2),$$

de donde

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|^2 = \frac{4}{s^4} (1 + x_1^2 + x_2^2)^2 = \frac{4}{s^2}, \quad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle = 0.$$

Así, la matriz de Gram es $\frac{4}{s^2} I_2$ y $\sqrt{\det(J\varphi^T J\varphi)} = \frac{4}{s^2}$ (equivalentemente, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{4}{s^2} \varphi$). Por lo tanto,

$$\text{Área}(\mathbb{S}_-^2) = \int_{\overline{B}(0,1)} \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{4r}{(1 + r^2)^2} dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{2}{1 + r^2} \right]_0^1 = 2\pi,$$

y $\text{Área}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.

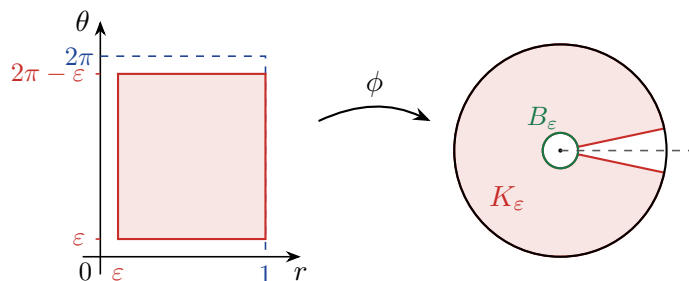


Figura 9.2: El compacto $K_\varepsilon = \phi([\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$ agota la bola $\overline{B}(0, 1)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Justifiquemos el paso a coordenadas polares. La aplicación

$$\phi: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}, \quad \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

es un difeomorfismo de clase C^∞ con $|\det J\phi(r, \theta)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = r$. Sin embargo, $\overline{B}(0, 1)$ no está contenido en la imagen de ϕ . Para $0 < \varepsilon < 1$ consideramos el compacto J -medible $K_\varepsilon = \phi([\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$ (Figura 9.2). Si g es continua en $\overline{B}(0, 1)$ (aquí $g(x) = 4/(1 + \|x\|^2)^2$), el teorema del cambio de variable puede aplicarse en K_ε : $\int_{K_\varepsilon} g = \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \int_\varepsilon^1 g(\phi(r, \theta)) r dr d\theta$. Además, $\overline{B}(0, 1) \setminus K_\varepsilon$ está contenido en la unión de $\overline{B}(0, \varepsilon)$ y de un sector de ángulo 2ε , cuyo volumen tiende a 0; como g es acotada, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\varepsilon} g = \int_{\overline{B}(0,1)} g$.

Complementos: teorema de Sard, transversalidad e índice

Este capítulo no proviene de las notas de clase: es un complemento que sigue principalmente a Guillemin–Pollack [GP] (capítulos 1–3) y a Milnor [Mil]. Los resultados se formulan en el lenguaje de las superficies de los capítulos anteriores; se dan pruebas completas cuando son accesibles con las herramientas desarrolladas y, en los demás casos, ideas de prueba y referencias precisas.

A lo largo del capítulo, $M \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie de dimensión m y $N \subset \mathbb{R}^q$ una superficie de dimensión k . Para simplificar, supondremos que las superficies y las aplicaciones son de clase C^∞ (salvo mención explícita). Una aplicación $f: M \rightarrow N$ es de clase C^∞ si lo es como aplicación $M \rightarrow \mathbb{R}^q$ (Proposición 8.4).

10.1 Puntos críticos y valores regulares

Definición 10.1. Sea $f: M \rightarrow N$ de clase C^1 . Un punto $p \in M$ es *regular* si $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobreyectiva, y *crítico* en caso contrario. Un punto $c \in N$ es un *valor crítico* si $f^{-1}(c)$ contiene algún punto crítico, y un *valor regular* en caso contrario. En particular, todo $c \in N \setminus f(M)$ es un valor regular.

Observación 10.2. Si $M = U$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^k$, esta noción coincide con la del Corolario 7.20. Si $m < k$, ningún df_p puede ser sobreyectivo: todos los puntos son críticos y el conjunto de valores críticos es $f(M)$, que tiene medida nula por el Corolario 5.17 (aplicado a las representaciones locales). Este es el caso “trivial” del teorema de Sard.

Proposición 10.3 (Preimagen de un valor regular). Sean M y N superficies de clase C^r , $f: M \rightarrow N$ de clase C^s ($1 \leq s \leq r$) y $c \in f(M)$ un valor regular de f . Entonces $f^{-1}(c)$ es una superficie de dimensión $m - k$ y clase C^s en $\mathbb{R}^n$, y

$$T_p(f^{-1}(c)) = \text{Ker}(df_p) \quad \text{para todo } p \in f^{-1}(c).$$

Prueba. Sea $p \in f^{-1}(c)$. Tomemos una parametrización local $\psi: V_0 \rightarrow V$ de N con $\psi(y_0) = c$ y una parametrización local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ de M con $\varphi(0) = p$ y $f(U) \subset V$ (reduciendo U_0 , por continuidad de f). La representación local $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ es de clase C^s y, por la regla de la cadena, $dg_x = d(\psi^{-1})_{f(\varphi(x))} \circ df_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x$, donde el primer y el último factor son isomorfismos sobre su imagen. Luego y_0 es un valor regular de g y, por el Corolario 7.20, $S = g^{-1}(y_0)$ es una superficie de dimensión $m - k$ y clase C^s en $\mathbb{R}^m$, con $f^{-1}(c) \cap U = \varphi(S)$.

Engordemos φ mediante $\Phi: Q_\varepsilon^n \rightarrow W$ (Proposición 8.1). Como $W \cap M = \Phi(Q_\varepsilon^m \times \{0\})$ y $\Phi(x, 0) = \varphi(x)$,

$$f^{-1}(c) \cap W = \Phi((S \cap Q_\varepsilon^m) \times \{0\}).$$

El conjunto $(S \cap Q_\varepsilon^m) \times \{0\}$ es una superficie de dimensión $m - k$ y clase C^s en $\mathbb{R}^n$, y Φ es un difeomorfismo de clase C^r ; por el Ejemplo 7.14, $f^{-1}(c) \cap W$ es una superficie. Como ser superficie es una propiedad local, $f^{-1}(c)$ es una superficie de dimensión $m - k$ y clase C^s .

Finalmente, si α es una curva en $f^{-1}(c)$ con $\alpha(0) = p$, entonces $f \circ \alpha \equiv c$ y $df_p(\alpha'(0)) = 0$; así $T_p(f^{-1}(c)) \subset \text{Ker}(df_p)$, y ambos subespacios tienen dimensión $m - k$. $\square$

Ejemplo 10.4. Sea $h: \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura, $h(x) = x_{m+1}$. Como $T_p \mathbb{S}^m = p^\perp$ y $dh_p(v) = v_{m+1}$, el punto p es crítico si y solo si $p^\perp \subset e_{m+1}^\perp$, es decir, $p = \pm e_{m+1}$. Los valores críticos son ± 1 . Para $|c| < 1$, la fibra $h^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{S}^m : x_{m+1} = c\}$ es una esfera de dimensión $m - 1$ y radio $\sqrt{1 - c^2}$, de acuerdo con la Proposición 10.3; para $|c| > 1$ la fibra es vacía.

10.1.1 El teorema de Sard

Teorema 10.5 (Sard, caso de igual dimensión). Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 , y sea $C = \{x \in U : \det Jg(x) = 0\}$ el conjunto de puntos críticos. Entonces $g(C)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^m$.

Prueba. (Ver [Sp, Teorema 3-14].) Como U es unión numerable de cubos cerrados contenidos en U y una unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula, basta probar que $g(C \cap A)$ tiene medida nula para cada cubo cerrado $A \subset U$, de lado ℓ . Usamos la norma euclidiana y sea $L = \max_{x \in A} \|dg_x\|$ (norma de operador), que es finito por continuidad y compacidad.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de $x \mapsto dg_x$ en A , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|dg_z - dg_x\| \leq \varepsilon$ si $x, z \in A$ y $\|z - x\| \leq \delta$, donde $\delta = \sqrt{m} \ell / N$. Para tales $x, y \in A$, aplicando la desigualdad del valor medio (Proposición 1.10) a $t \mapsto g(x + t(y - x)) - t dg_x(y - x)$, obtenemos

$$\|g(y) - g(x) - dg_x(y - x)\| \leq \varepsilon \|y - x\| \leq \varepsilon \delta.$$

Dividamos A en N^m cubos A_j de lado ℓ/N (y diámetro δ). Si A_j contiene un punto $x \in C$, la imagen de dg_x está contenida en un hiperplano H que pasa por el origen. Para $y \in A_j$ se tiene $g(y) - g(x) = dg_x(y - x) + e$, con $dg_x(y - x) \in H$, $\|dg_x(y - x)\| \leq L\delta$ y $\|e\| \leq \varepsilon\delta$. Así, $g(A_j)$ está contenido en el “cilindro” formado por los puntos de $g(x) + \mathbb{R}^m$ cuya proyección ortogonal sobre H tiene norma $\leq (L + \varepsilon)\delta$ y cuya distancia a H es $\leq \varepsilon\delta$. Tras una rotación (que preserva volúmenes, por el teorema del cambio de variable), este cilindro está contenido en la caja $[-(L + \varepsilon)\delta, (L + \varepsilon)\delta]^{m-1} \times [-\varepsilon\delta, \varepsilon\delta]$, de volumen $2^m (L + \varepsilon)^{m-1} \varepsilon \delta^m$. Sumando sobre a lo sumo N^m cubos,

$$g(C \cap A) \subset \text{unión finita de cajas rotadas de volumen total} \leq 2^m (L + \varepsilon)^{m-1} \varepsilon (\sqrt{m} \ell)^m,$$

que tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como cada caja rotada es un compacto J -medible, puede cubrirse por cajas de volumen total arbitrariamente cercano al suyo; luego $g(C \cap A)$ tiene medida nula. $\square$

Teorema 10.6 (Sard). Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $g: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^s , con $s \geq \max\{1, m - k + 1\}$. Entonces el conjunto de valores críticos de g tiene medida nula en $\mathbb{R}^k$. En particular, si $f: M \rightarrow N$ es una aplicación de clase C^∞ entre superficies, el conjunto de valores críticos de f tiene medida nula en N .

Idea de la prueba. Los casos $m < k$ y $m = k$ son la Observación y el Teorema 10.5 anteriores. El caso $m > k$ es más delicado: se estratifica el conjunto crítico según el orden de anulación de las derivadas y se usa inducción en m junto con el teorema de Fubini; ver [Mi1, §§2–3], [GP, cap. 1] y el artículo original [Sa]. Para superficies, se cubre M con una cantidad numerable de parametrizaciones (Lema de Lindelöf) y se aplica el caso euclidiano a las representaciones locales.

Corolario 10.7. Si $f: M \rightarrow N$ es de clase C^∞ , sus valores regulares son densos en N (un conjunto de medida nula tiene interior vacío). En consecuencia, para casi todo $c \in N$, la fibra $f^{-1}(c)$ es vacía o es una superficie de dimensión $m - k$.

10.2 Transversalidad

Definición 10.8. Sea $f: M \rightarrow N$ de clase C^∞ y $Z \subset N$ una superficie de clase C^∞ contenida en N (una *subsuperficie*). Decimos que f es *transversal* a Z , y escribimos $f \pitchfork Z$, si

$$df_p(T_p M) + T_{f(p)} Z = T_{f(p)} N \quad \text{para todo } p \in f^{-1}(Z).$$

Dos subsuperficies $X, Z \subset N$ son *transversales* ($X \pitchfork Z$) si la inclusión $X \hookrightarrow N$ es transversal a Z , es decir, si $T_p X + T_p Z = T_p N$ para todo $p \in X \cap Z$.

Observación 10.9.

- (a) Si $Z = \{c\}$ es un punto, entonces $T_c Z = \{0\}$, y $f \pitchfork \{c\}$ si y solo si c es un valor regular de f . La transversalidad generaliza, pues, la noción de valor regular.
- (b) Si $f^{-1}(Z) = \emptyset$ (o $X \cap Z = \emptyset$), la transversalidad se cumple trivialmente.
- (c) Si $\dim M + \dim Z < \dim N$, entonces $df_p(T_p M) + T_{f(p)} Z$ nunca es todo $T_{f(p)} N$; luego $f \pitchfork Z$ si y solo si $f(M) \cap Z = \emptyset$.

Ejemplo 10.10. En $\mathbb{R}^2$, sea X el eje horizontal y $Z_a = \{y = x^2 + a\}$ (Figura 10.1). Si $a < 0$, X y Z_a se cortan en dos puntos $(\pm\sqrt{-a}, 0)$ con rectas tangentes distintas, así que $X \pitchfork Z_a$. Si $a = 0$, se cortan en el origen, donde $T_0 X = T_0 Z_0$ es el eje horizontal y $T_0 X + T_0 Z_0 \neq \mathbb{R}^2$: no son transversales. Si $a > 0$, son disjuntas y, por lo tanto, transversales. En $\mathbb{R}^3$, dos planos distintos que pasan por el origen son transversales, mientras que los ejes x e y no lo son (aunque se cortan en un solo punto, $T_0 X + T_0 Y$ tiene dimensión 2).

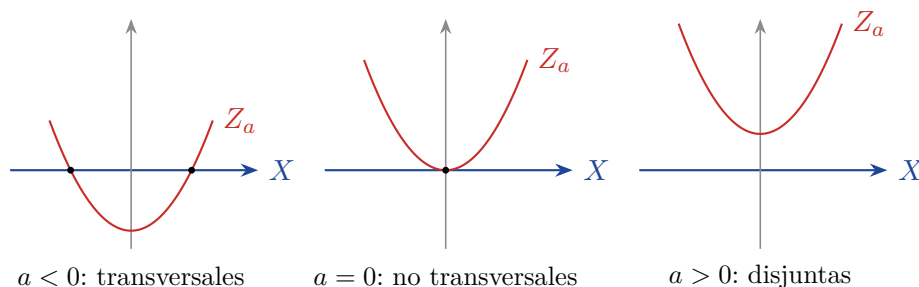


Figura 10.1: La recta X y las parábolas $Z_a = \{y = x^2 + a\}$.

Teorema 10.11 (Preimagen de una subsuperficie). Sea $f: M \rightarrow N$ de clase C^∞ y $Z \subset N$ una subsuperficie de dimensión l . Si $f \pitchfork Z$ y $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(Z)$ es una superficie de dimensión $m - (k - l)$, es decir, de la misma codimensión en M que Z en N , y

$$T_p(f^{-1}(Z)) = (df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z).$$

Idea de la prueba. Cerca de cada $z \in Z$, la subsuperficie Z se describe por ecuaciones: existen un abierto V de N que contiene a z y $g: V \rightarrow \mathbb{R}^{k-l}$ de clase C^∞ con $Z \cap V = g^{-1}(0)$, dg sobreyectiva y $\text{Ker}(dg_z) = T_z Z$ (se obtiene engordando una parametrización de Z , como en la Proposición 8.1). Entonces, cerca de $p \in f^{-1}(z)$, $f^{-1}(Z) = (g \circ f)^{-1}(0)$, y como $dg_z: T_z N \rightarrow \mathbb{R}^{k-l}$ es sobreyectiva con núcleo $T_z Z$,

$$d(g \circ f)_p = dg_z \circ df_p \text{ es sobreyectiva} \iff df_p(T_p M) + T_z Z = T_z N.$$

Luego 0 es un valor regular de $g \circ f$ y basta aplicar la Proposición 10.3. Ver [GP, cap. 1].

Corolario 10.12. Si $X, Z \subset N$ son subsuperficies transversales con $X \cap Z \neq \emptyset$, entonces $X \cap Z$ es una superficie de dimensión $\dim X + \dim Z - \dim N$, y $T_p(X \cap Z) = T_p X \cap T_p Z$.

Ejemplo 10.13. Sea $\Pi_c = \{x_3 = c\} \subset \mathbb{R}^3$. Como $T_p \mathbb{S}^2 = p^\perp$ y $T_p \Pi_c = e_3^\perp$, se tiene $T_p \mathbb{S}^2 + T_p \Pi_c = \mathbb{R}^3$ salvo si $p = \pm e_3$. Así, para $|c| < 1$ la esfera y el plano son transversales y, por el Corolario 10.12, $\mathbb{S}^2 \cap \Pi_c$ es una curva (un círculo). Para $c = 1$, $\mathbb{S}^2 \cap \Pi_1 = \{e_3\}$ tiene dimensión $0 \neq 2 + 2 - 3$: la intersección no es transversal.

Teorema 10.14 (Teorema de transversalidad). Sean M , S y N superficies de clase C^∞ , $Z \subset N$ una subsuperficie y $F: M \times S \rightarrow N$ de clase C^∞ con $F \pitchfork Z$. Para cada $s \in S$ sea $f_s = F(\cdot, s): M \rightarrow N$. Entonces $f_s \pitchfork Z$ para todo $s \in S$ fuera de un conjunto de medida nula en S .

Prueba. Recordemos que $M \times S$ es una superficie y que $T_{(x,s)}(M \times S) = T_x M \times T_s S$. Por el Teorema 10.11, $W = F^{-1}(Z)$ es una superficie en $M \times S$. Sea $\pi: W \rightarrow S$ la restricción de la proyección $(x, s) \mapsto s$. Por el teorema de Sard, casi todo $s \in S$ es un valor regular de π ; basta probar que si s es un valor regular de π , entonces $f_s \pitchfork Z$.

Sea $x \in M$ con $z = f_s(x) \in Z$, es decir, $(x, s) \in W$, y sea $a \in T_z N$. Como $F \pitchfork Z$, existe $(w, e) \in T_x M \times T_s S$ tal que $dF_{(x,s)}(w, e) - a \in T_z Z$. Como $d\pi_{(x,s)}: T_{(x,s)} W \rightarrow T_s S$ es sobreyectiva y $d\pi_{(x,s)}(u, e') = e'$, existe $u \in T_x M$ con $(u, e) \in T_{(x,s)} W$. Como $F(W) \subset Z$, se tiene $dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z Z$. Por lo tanto,

$$d(f_s)_x(w - u) - a = dF_{(x,s)}(w - u, 0) - a = [dF_{(x,s)}(w, e) - a] - dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z Z,$$

es decir, $a \in d(f_s)_x(T_x M) + T_z Z$. Como a es arbitrario, $f_s \pitchfork Z$ en x . $\square$

Corolario 10.15 (La transversalidad es genérica). Sean $X, Z \subset \mathbb{R}^n$ superficies de clase C^∞ . Para casi todo $s \in \mathbb{R}^n$, la trasladada $X + s$ es transversal a Z .

Prueba. Sea $F: X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x, s) = x + s$. Como $dF_{(x,s)}(0, e) = e$, la derivada de F es sobreyectiva, así que $F \pitchfork Z$. Además $f_s(x) = x + s$ y $d(f_s)_x(T_x X) = T_x X = T_{x+s}(X + s)$, de modo que $f_s \pitchfork Z$ si y solo si $(X + s) \pitchfork Z$. Basta aplicar el Teorema 10.14. $\square$

Por ejemplo, dos curvas en $\mathbb{R}^2$ en posición genérica se cortan transversalmente en puntos aislados ($1 + 1 - 2 = 0$), y dos curvas en $\mathbb{R}^3$ en posición genérica son disjuntas ($1 + 1 - 3 < 0$).

10.3 Índice de un campo de vectores

10.3.1 Grado de una aplicación entre esferas

Sea $m \geq 2$. Para $x \in \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ se tiene $T_x \mathbb{S}^{m-1} = x^\perp$. Diremos que una base $(v_1, \dots, v_{m-1})$ de $x^\perp$ es *positiva* si $\det[x \mid v_1 \mid \dots \mid v_{m-1}] > 0$.

Definición 10.16. Sea $f: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ de clase C^∞ y x un punto regular de f . El *signo* de f en x es

$$\text{sg}_x(f) = \text{signo} \det[f(x) \mid df_x(v_1) \mid \dots \mid df_x(v_{m-1})] \in \{-1, 1\},$$

donde $(v_1, \dots, v_{m-1})$ es cualquier base positiva de $x^\perp$. Si y es un valor regular de f , el *grado* de f es

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sg}_x(f).$$

La definición tiene sentido: si se cambia la base positiva por otra, ambos determinantes quedan multiplicados por el mismo número positivo; el determinante no se anula porque df_x es un isomorfismo sobre $f(x)^\perp$; y $f^{-1}(y)$ es finito, pues es una superficie de dimensión 0 (un conjunto discreto) contenida en el compacto $\mathbb{S}^{m-1}$. Los valores regulares existen por el teorema de Sard.

Teorema 10.17 (Brouwer). *El grado $\deg(f)$ no depende del valor regular y elegido, y dos aplicaciones $f_0, f_1: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ homotópicas (mediante una homotopía de clase C^∞) tienen el mismo grado. Ver [Mi1, §5] y [GP, cap. 3].*

Ejemplo 10.18.

- (a) La identidad tiene grado 1, y una aplicación constante tiene grado 0 (todo punto distinto de la constante es un valor regular con preimagen vacía).
- (b) La aplicación antipodal $a(x) = -x$ tiene grado $(-1)^m$: si (v_i) es una base positiva de $x^\perp$, entonces $\det[-x \mid -v_1 \mid \dots \mid -v_{m-1}] = (-1)^m \det[x \mid v_1 \mid \dots \mid v_{m-1}]$, y cada y tiene una única preimagen. En particular, si m es impar, la antipodal no es homotópica a la identidad.
- (c) Si $R \in \mathcal{O}_m$, la aplicación $x \mapsto Rx$ tiene grado $\det R$.

10.3.2 Índice de un cero aislado

Definición 10.19. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $v: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de vectores de clase C^∞ . Un cero z de v es *aislado* si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $v(x) \neq 0$ para $0 < \|x - z\| < \varepsilon_0$. En ese caso, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ consideramos

$$u_\varepsilon: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}, \quad u_\varepsilon(w) = \frac{v(z + \varepsilon w)}{\|v(z + \varepsilon w)\|},$$

y definimos el *índice* de v en z como $\text{ind}_z(v) = \deg(u_\varepsilon)$. Por el Teorema 10.17, no depende de ε (las u_ε son homotópicas entre sí).

Proposición 10.20. *Si $v(z) = 0$ y $Jv(z)$ es invertible (se dice que z es un cero no degenerado), entonces z es un cero aislado y $\text{ind}_z(v) = \text{signo} \det Jv(z)$. Ver [Mi1, §6].*

Ejemplo 10.21. En $\mathbb{R}^2$ (Figura 10.2): la *fuerza* $v(x, y) = (x, y)$, el *sumidero* $v(x, y) = (-x, -y)$ y el *centro* $v(x, y) = (-y, x)$ tienen índice 1 en el origen; la *silla* $v(x, y) = (x, -y)$ tiene índice -1 . El campo $v(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ (es decir, $z \mapsto z^2$ en notación compleja) tiene en el origen un cero degenerado de índice 2, pues $u_\varepsilon(w) = w^2$ da dos vueltas al círculo.

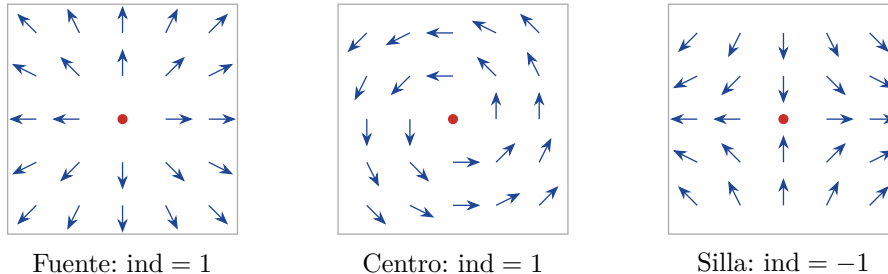


Figura 10.2: Campos en el plano con un cero aislado en el origen (se dibuja la dirección $v/\|v\|$).

10.3.3 Campos tangentes y el teorema de Poincaré–Hopf

Definición 10.22. Un *campo tangente* de clase C^∞ en la superficie $M \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ con $v(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$. Si p es un cero aislado de v y $\varphi: U_0 \rightarrow U$ es una parametrización local con $\varphi(x_0) = p$, la *representación local* $\tilde{v}(x) = (d\varphi_x)^{-1}(v(\varphi(x)))$ es un campo de vectores en U_0 con un cero aislado en x_0 , y definimos

$$\text{ind}_p(v) = \text{ind}_{x_0}(\tilde{v}),$$

que no depende de la parametrización elegida [GP, cap. 3].

Teorema 10.23 (Poincaré–Hopf, o teorema del índice). Sea M una superficie compacta de clase C^∞ y v un campo tangente de clase C^∞ en M con ceros aislados (por compacidad, son finitos). Entonces

$$\sum_{v(p)=0} \text{ind}_p(v) = \chi(M),$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M , un invariante topológico de M . En particular, la suma de los índices no depende del campo v . Ver [Mi1, §6] y [GP, cap. 3].

Observación 10.24. Para superficies de dimensión 2, $\chi(M) = V - A + C$ (vértices menos aristas más caras) para cualquier triangulación de M . Por ejemplo, $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 0$ y, para una superficie compacta orientable con g “agujeros”, $\chi = 2 - 2g$.

Ejemplo 10.25 (La esfera). Sea $v(x) = e_{m+1} - x_{m+1}x$ en $\mathbb{S}^m$, la proyección ortogonal de e_{m+1} sobre $T_x \mathbb{S}^m = x^\perp$ (el “gradiente” de la función altura del Ejemplo 10.4). Como $\langle v(x), x \rangle = x_{m+1} - x_{m+1}\|x\|^2 = 0$, es un campo tangente, y sus ceros son $N = e_{m+1}$ y $S = -e_{m+1}$. Cerca de N usamos la parametrización $\varphi(\lambda) = (\lambda, \sqrt{1 - \|\lambda\|^2})$, $\lambda \in \mathbb{B}^m$. Como $d\varphi_\lambda(u) = (u, *)$, se tiene $(d\varphi_\lambda)^{-1} = \pi_m$ en $T_{\varphi(\lambda)} \mathbb{S}^m$, y

$$\tilde{v}(\lambda) = \pi_m(v(\varphi(\lambda))) = -\sqrt{1 - \|\lambda\|^2} \lambda, \quad J\tilde{v}(0) = -I_m.$$

Por la Proposición 10.20, $\text{ind}_N(v) = \det(-I_m) = (-1)^m$. Análogamente, con $\varphi(\lambda) = (\lambda, -\sqrt{1 - \|\lambda\|^2})$ se obtiene $\tilde{v}(\lambda) = \sqrt{1 - \|\lambda\|^2} \lambda$ y $\text{ind}_S(v) = 1$. Por lo tanto,

$$\chi(\mathbb{S}^m) = 1 + (-1)^m = \begin{cases} 2, & m \text{ par}, \\ 0, & m \text{ impar}. \end{cases}$$

Corolario 10.26 (Teorema de la bola peluda). *Si m es par, todo campo tangente continuo en $\mathbb{S}^m$ se anula en algún punto. Si m es impar, el campo $v(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{m+1}, x_m)$ es tangente a $\mathbb{S}^m$ y no se anula.*

Prueba. Si m es par y v es de clase C^∞ sin ceros, la suma de los índices sería $0 \neq 2 = \chi(\mathbb{S}^m)$. El caso continuo se reduce a este por aproximación [Mi2]. Para m impar, $\langle v(x), x \rangle = 0$ y $\|v(x)\| = \|x\| = 1$. $\square$

Observación 10.27 (Prueba analítica de Milnor). El teorema de la bola peluda admite una prueba que solo usa el teorema del cambio de variable [Mi2]. Supongamos que m es par y que v es un campo tangente unitario de clase C^1 en $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Lo extendemos a la corona $A = \{x : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$ mediante $v(rx) = r v(x)$ y consideramos $f_t(x) = x + t v(x)$. Para $|t|$ pequeño, f_t es inyectiva con derivada invertible en A y, por el Teorema 6.17,

$$\text{vol}(f_t(A)) = \int_A \det(I + t Jv(x)) \, dx,$$

que es un polinomio en t . Por otro lado, como $v(x) \perp x$ y $\|v(x)\| = \|x\|$, se tiene $\|f_t(x)\| = \sqrt{1 + t^2} \|x\|$, y se prueba que f_t lleva la esfera de radio r sobre la esfera de radio $r\sqrt{1 + t^2}$. Así, $f_t(A) = \sqrt{1 + t^2} A$ y $\text{vol}(f_t(A)) = (1 + t^2)^{(m+1)/2} \text{vol}(A)$, que no es un polinomio en t porque $m + 1$ es impar. Contradicción.

Bibliografía

- [Ba] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, 2.^a ed., Wiley, Nueva York, 1976.
- [GP] V. Guillemin y A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974. Reimpreso por AMS Chelsea Publishing, Providence.
- [Jä] K. Jänich, *Vector Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Nueva York, 2001.
- [La] S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley, Reading, 1969.
- [Li1] E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, Río de Janeiro, 2014.
- [Li2] E. L. Lima, *Análisis real*, IMCA, Lima, 1997.
- [Mi1] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [Mi2] J. Milnor, Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), n.º 7, 521–524.
- [Mu1] J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley, Redwood City, 1991.
- [Mu2] J. R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [Ru] W. Rudin, *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, México, 1980.
- [Sa] A. Sard, The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 883–890.
- [Sp] M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Reverté, Barcelona, 1970. (Original: *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, Nueva York, 1965.)