

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Semestre 2024-2

Profesor: Marcelo V. Flamarion

mvellosoflamarionvasconcellos@pucp.edu.pe

Notas escritas por: Marcelo Gallardo

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

<https://marcelogallardob.github.io/>

1 Introducción

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales puede aproximarse desde tres perspectivas. La teórica, la numérica, y la asintótica. Entre el enfoque teórico y el enfoque numérico, existe el dilema de la existencia y/o unicidad de las soluciones. Entre lo numérico y lo asintótico, cabe la duda de cuando ciertos elementos son despreciables en las ecuaciones. A modo de ejemplo, considérese

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Ciertamente, las raíces son $x_{1,2} = 2, 4$. Ahora bien, si tenemos

$$x^4 + 10x^2 + 11x - 20 = 0,$$

encontrar una solución cerrada resulta bien complicado. No obstante, por el TVI, dado que $f(0) = -20$ y $f(1) = 2$, existe x^* solución en $(0, 1)$. Finalmente, considere

$$x^3 - 1 + \epsilon x^2 + \epsilon x = 0.$$

Si $\epsilon \rightarrow 0$, ¿podríamos decir que $x^* \sim 1$? Ahí entra el análisis asintótico. Recordemos que en EDOs, cuando tenemos

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

bajo ciertas condiciones sobre f (Teorema de Peano-Picard), podemos asegurar existencia y unicidad,

1. Ecuación del transporte: $u_t + c \underbrace{u_x}_{\text{transporte}} = 0.$

2. Ecuación del calor: $u_t = k^2 \underbrace{u_{xx}}_{\text{difusión}}.$

3. Ecuación lineal de Korteweg-de Vries (KDV): $u_t + \underbrace{u_{xxx}}_{\text{dispersión}} = 0.$

4. Ecuación no lineal de Korteweg-de Vries: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$

Ver [Lax \(1968\)](#).

1.1 Definiciones básicas

Una ecuación en derivadas parciales o ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación de la forma

$$F \left[x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right] = 0.$$

F es conocida, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y por determinar.

Observación 1. Usualmente $x = (x_1, x_2)$, (x, y) o $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Definición 1.1. Se dice que una EDP es de orden $k > 0$ cuando la derivada parcial de mayor orden en la ecuación es k .

Ejemplo 1.1. Tenemos:

1. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ - de orden 2
2. $u_t + u_{xxx} = 0$ - de orden 3
3. $u_{xx}^2 + e^{u_x} + 17 = 0$ - de orden 2.

Definición 1.2. Se dice que una EDP es lineal si es lineal en u y todas las derivadas parciales que aparecen en la ecuación. Esto es, para el primer orden,

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0$$

y para el segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0.$$

Ejemplo 1.2. En el Ejemplo 1.1, tanto (1) como (2) son lineales.

Observación 2. Entre las ecuaciones no lineales, dos clasificaciones son importantes.

Definición 1.3. La parte principal de una EDP es la parte que contiene las derivadas de mayor orden.

Ejemplo 1.3. En azul las partes principales:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u_{xx}^2 + e^{u_x} + 17 &= 0 \end{aligned}$$

Definición 1.4. Una EDP semilineal es una EDP que tiene la **parte principal** lineal con coeficientes que dependen apenas de $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Ejemplo 1.4. Consideremos

$$xu_{xx} + u_{yy} + u^2 = 0$$

$$uu_{xx} + u_{yy} + 3u = 0.$$

Ambas son no lineales. La primera es semilineal y la segunda no.

Definición 1.5. Una EDP casilineal es una EDP que tiene la parte principal no lineal con coeficientes que dependen de $x = (x_1, \dots, x_n)$ y de las derivadas parciales de orden menor.

Ejemplo 1.5. Consideremos:

$$\text{KDV : } u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{orden 2 y semilineal}$$

$$\text{Burgers : } u_t + uu_x = 0 \quad \text{orden 1 y casilineal.}$$

Observación 3. En general, para las ecuaciones de primer orden,

$$P(x, y)u_x + Q(x, y)u_y + R(x, y)u(x, y) = f(x, y).$$

Por otro lado,

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y + R(x, y, u) = 0, \quad \text{casilineal}$$

y

$$P(x, y)u_x + Q(x, y)u_y + R(x, y, u) = 0, \quad \text{semilineal.}$$

Definición 1.6. Decimos que una EDP es homogénea si el término que no contiene la variable dependiente es idénticamente nulo.

Ejemplo 1.6. Por ejemplo,

$$u_t + uu_x + u_{xx} = 0, \quad \text{homogénea}$$

$$u_t + uu_x = f(x, t), \quad \text{no homogénea.}$$

En las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n , la solución general contiene constantes arbitrarias, en las EDP's tenemos funciones.

Ejemplo 1.7. Considere $u''(x) = 2$. Entonces, $u(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Por otro lado, si tenemos $u = u(x, y)$

$$u_{xx} = 2 \implies u(x, y) = x^2 + \phi(y)x + \psi(y).$$

Por lo tanto, para obtener una única solución a un problema, habremos de imponer ciertas condiciones

1. Dirichlet: $u|_{\partial\Omega} = g(x)$
2. Neumann: $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = g(x)$

3. Robin: $\alpha(x)u|_{\partial\Omega} + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = g(x)$.

4. Cauchy: son las que deben satisfacerse a lo largo de una curva o superficie

$$u(f(s), g(s)) = h(s)$$

con $(f(s), g(s)) \in \Omega, s \in I$.

Ejemplo 1.8. Podemos tener, por ejemplo, en relación a las restricciones con el borde,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x, 0) &= x^2. \end{cases}$$

Hasta el momento, algunas preguntas de interés:

1. ¿Existe solución al problema?
2. ¿Es la solución única?
3. ¿La solución depende continuamente de los datos?
4. ¿Cómo se puede encontrar la solución?

Ejemplo 1.9. Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_y &= 0 \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, p(x)) &= f(x) \end{cases}$$

con $p, f \in C^1(\mathbb{R})$. Buscamos $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. La solución general es

$$u(x, y) = \psi(x).$$

Luego,

$$u(x, y) = \psi(x) = f(x).$$

Ejemplo 1.10. Encontrar las condiciones para que

$$\begin{cases} u_y &= 0 \\ u(0, y) &= f(y). \end{cases}$$

Tengo solución $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Luego,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \psi(x) \\ \psi(0) = f(y) &\rightarrow \text{constante!} \end{aligned}$$

La solución existe si f es constante, pero no es única!

Ejemplo 1.11. Consideremos

$$\begin{cases} u_y &= 0 \\ u(1 - y^2, y) &= f(y). \end{cases}$$

Queremos $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Primero,

$$u(x, y) = \psi(x).$$

Entonces,

$$\psi(1 - y^2) = u(1 - y^2, y) = f(y).$$

Por ende, f debe ser par. Por otro lado,

$$\psi(x) = f(\pm\sqrt{1-x}) = f(\sqrt{1-x}), \quad x \leq 1.$$

Luego,

$$u(x, y) = \begin{cases} f(\sqrt{1-x}) & \text{si } x \leq 1 \\ g(x), & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Acá $g \in C^1[1, \infty)$, $g(1) = g(0)$ y

$$\left. \frac{d}{dx} f(\sqrt{1-x}) \right|_{x=1} = g'(1).$$

Observación 4. Si tenemos $u = u(x(t), y(t))$,

$$\frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) = x'(t) \frac{\partial u}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Por ejemplo, si tenemos

$$u_x + 2u_y = 0 \implies \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2.$$

Así, $x = t + x_0$ y $y = 2t + y_0$.

2 Clase 2

Método de las características. Sea $u = u(x, y) \in C^1(\mathbb{R})$ y $t \rightarrow (x(t), y(t))$ con $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = \frac{dx}{dt}u_x + \frac{dy}{dt}u_y.$$

Ejemplo 2.1. Considere el problema de Cauchy para la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(s, 0) = f(s), & f \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Entonces, identificando $x = x(r, s)$ y $t = t(r, s)$,

$$\begin{aligned} \frac{dx(r, s)}{dr} &= c \\ x(r, s) &= cr + c_1(s) \\ \frac{dt(r, s)}{dr} &= 1 \\ t(r, s) &= r + c_2(s). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}u(x(r), t(r)) &= 0 \\ \frac{dz(r, s)}{dr} &= 0 \\ z(r, s) &= c_3(s). \end{aligned}$$

Luego, $t(0, s) = 0$, por lo que $0 = c_2(s)$ y $x(0, s) = s$, por lo que $c_1(s) = s$. Finalmente, $c_3(s) = f(s)$. Como $s = x - cr = x - ct$

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

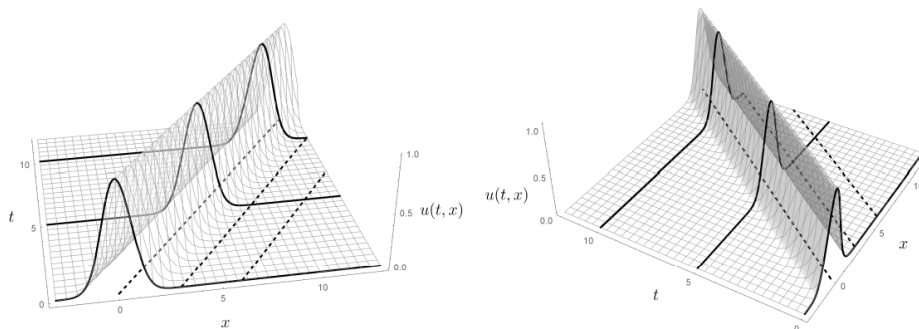


Figure 1: Ecuación del Transporte Lineal.

Ejemplo 2.2. Ecuación de Burgers.

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0 \\ u(s, 0) &= f(s). \end{cases}$$

El problema más general:

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \quad a, b, c \in C^1(\mathbb{R}^2) \\ u(f(s), g(s)) &= h(s), \quad f, g, h \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Derivando la segunda ecuación,

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y) \\ f'(s)u_x + g'(s)u_y &= h'(s). \end{cases}$$

Identificamos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y), \quad x(s, 0) = f(s) \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y), \quad y(s, 0) = g(s). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{vmatrix} a(f(s), g(s)) & b(f(s), g(s)) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_t(s, 0) & y_t(s, 0) \\ x_s(s, 0) & y_s(s, 0) \end{vmatrix} = |J(s, 0)|.$$

Si $|J(s, 0)| \neq 0$, entonces la transformación es localmente inyectiva, lo que nos permite hacer el cambio de variables $s = s(x, y)$ y $t(x, y)$ y escribir

$$v(s, t) = u(x, y).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= a(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) + b(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \\ &= c(x(s, t), y(s, t)). \end{aligned}$$

Por otro lado,

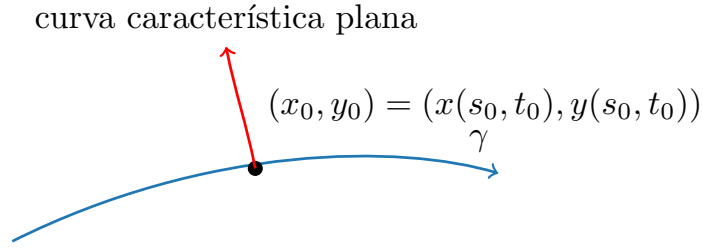
$$v(s, 0) = h(s).$$

Así,

$$v(s, t) = \int_0^t v_t(s, \nu) d\nu + v(s, 0) = \int_0^t c(x(s, \nu), y(s, \nu)) d\nu + h(s).$$

Para volver a u , dado $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$ se integra la EDP a lo largo de la característica plana (la transversal a γ) que pasa por (x_0, y_0) , de $s = 0$ a $s_0 = s_0(x_0, y_0)$. O sea, $x_0 = x(s_0, t_0)$ y $y_0 = y(s_0, t_0)$. Así, como

$$u(x, y) = v(s, t) \implies u(x_0, y_0) = h(s_0) + \int_0^{t_0} c(x(s_0, t), y(s_0, t)) dt.$$



$$(\sigma(t_0), \rho(t_0)) = (x(0, t_0), y(0, t_0))$$

Figure 2: Solución en el punto $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$.

Ejemplo 2.3. Solucionar

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y &= 4xy \\ u(s, 0) &= f(s), \quad f \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Identificamos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \quad x(s, 0) = s \\ \frac{dy}{dt} &= x, \quad y(s, 0) = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt}(x^2(t, s) + y^2(t, s)) = 0.$$

O sea,

$$x^2 + y^2 = x(s, 0)^2 + y(s, 0)^2 = s^2.$$

Así,

$$x = s \cos t, \quad y = s \sin t.$$

Luego, sea

$$v(s, t) = u(x, y).$$

$$v_t = 4s^2 \cos t \sin t.$$

Integrando,

$$v(s, t) = \int \frac{\partial v}{\partial t} dt = 2s^2 \sin^2 t + f(s).$$

Finalmente,

$$u(x, y) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Teorema 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y γ una curva suave en Ω parametrizada por $\gamma(s) = (\sigma(s), \rho(s))$, $s \in I$, $f \in C^1(I)$, $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponga que $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$ y que

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(s), \rho(s)) & b(\sigma(s), \rho(s)) \\ \sigma'(s) & \rho'(s) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in I.$$

Entonces, el problema

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y) \\ u(\sigma(s), \rho(s)) &= f(s), \quad s \in I \end{cases}$$

tiene una única solución de clase C^1 en una vecindad de la curva γ en Ω dada por

$$u(x_0, y_0) = f(s_0) + \int_0^{t_0} \underbrace{c(x(s_0, t), y(s_0, t))}_{\frac{d}{dt}u(x(s_0, t), y(s_0, t))} dt.$$

Ejemplo 2.4. Considere

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y &= (2y^2 + x) \sin(2xy) \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, e^{-2x}) &= \cos^2(xe^{-2x}). \end{cases}$$

Primero, verificamos las hipótesis del Teorema 1,

- $a(x, y) = 2y, b(x, y) = 1$
- $\begin{vmatrix} 2e^{-2s} & 1 \\ 1 & -2e^{-2s} \end{vmatrix} = -4e^{-4s} - 1 < 0$
- $2y^2 + 1 \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(s_0) = \cos^2(s_0 e^{-2s_0}) = \cos^2(x_0 y_0)$.

Luego, las características planas satisfacen

$$\begin{cases} \alpha'(s) &= 2\beta(s) \\ \beta'(s) &1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(s) &= s^2 + 2sc_1 + c_2 = (s + c_1)^2 + c_2 - c_1^2 \\ \beta(s) &= s + c_1. \end{cases}$$

Así, las curvas características son parábolas $x = y^2 + c$. Dado cualquier punto $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, se encuentra en la parábola

$$x = y^2 + x_1 - y_1^2$$

que interseca $y = e^{-2x}$ en $(x_0, y_0) = (y_0^2 + x_1 - y_1^2, e^{-2x_0})$. Así,

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{d}{ds} u(s^2 + x_1 - y_1^2, s) ds + u(x_0, y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1) \sin(2s^3 + 2s + 2s(x_1 - y_1^2)) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \int_{y_0(y_0^2 + x_1 - y_1^2)}^{y_1(y_1^2 + x_1 - y_1^2)} 2 \sin r \cos r dr + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \cos^2(x_1 y_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(x, y) = \cos^2(xy).$$

3 Clase 3

Una EDP casi lineal de primer orden es

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (1)$$

con $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, abierto. Una solución a una EDP (1) representa una superficie (gráfico), $u = u(x, y)$.

Observación 5. La EDP (1) puede verse

$$(a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0.$$

Definición 3.1. Una superficie S es superficie integral para (1) si

$$\forall (x, y, z) \in S : (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$$

es tangente a S .

Observación 6. S , gráfico de la función u es solución de (1).

Definición 3.2. Una curva característica para (1) es una curva suave $t : I \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y, z), \quad x(s, 0) = x_0(s) \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y, z), \quad y(s, 0) = y_0(s) \\ \frac{dz}{dt} &= c(x, y, z), \quad x(s, 0) = z_0(s). \end{aligned}$$

Para obtener la superficie solución, consideramos una curva inicial

$$\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s)), \quad \forall s \in I.$$

Obtenemos $S = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$. En seguida, es necesario encontrar s, t en función de x, y : $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$.

Proposición 1. Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es unión de curvas características, entonces S es superficie integral. Recíprocamente, toda superficie integral que es gráfico $z = u(x, y)$, es unión de curvas características.

Proof. La ida es por definición. Para la vuelta, sea

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

una parametrización de una curva con característica con

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) \in S$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= c(x, y, z). \end{aligned}$$

Mostremos que $\gamma \subset S$. Defina

$$\omega(t) = z(t) - u(x(t), y(t))$$

$$\omega(0) = z_0 - u(x_0, y_0) = z_0 - z_0 = 0.$$

Mostraremos que $\omega(t)$ es constante:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt}u_x - \frac{dy}{dt}u_y \\ &= c(x, y, z) - a(x, y, z)u_x - b(x, y, z)u_y \\ &= c(x, y, \omega + u) - a(x, y, \omega + u) - b(x, y, \omega + u)u_y. \end{aligned}$$

$\omega = 0$ es solución particular. Sin embargo, la EDO con condición $\omega(0) = 0$ tiene única solución. Luego, $\omega = 0$. $\square$

Proposición 2. Sean S_1, S_2 dos superficies soluciones:

1. Si $P \in S_1 \cap S_2$ entonces S_1 y S_2 se intersecan en una curva característica.
2. $S_1 \cap S_2 = \{\gamma\}$ es una curva transversal, entonces γ es característica.

Proof. Sean γ_1, γ_2 curva características

$$\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$$

$$\gamma'_i(t) = (a, b, c), \quad \forall i = 1, 2.$$

Por unicidad, tenemos $\gamma_1 = \gamma_2$. (b) Ejercicio. $\square$

Teorema 2. Problema de Cauchy.

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y &= c(x, y, u) \\ u(f(s), g(s)) &= h(s). \end{cases}$$

Dado $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$. Supongamos que $f, g, h \in C^1(I)$ y $a, b, c \in C^1(V_{P_0})$

$$\begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(P_0) & b(P_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces, existe una única solución $u = u(x, y)$ definida en una vecindad de (x_0, y_0) .

Ejemplo 3.1. Sea

$$\begin{cases} u_t + cu_x &= 0 \\ u(s, 0) &= f(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

La solución es

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Ejemplo 3.2. Sea

$$\begin{cases} u_y + uu_x &= 0, \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u(s, 0) &= h(s), \quad h \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= z, \quad x(s, 0) = s \\ \frac{dy}{dt} &= 1, \quad y(s, 0) = 0 \\ \frac{dz}{dt} &= 0, \quad z(s, 0) = h(s)\end{aligned}$$

lo cual conlleva a

$$\begin{aligned}z(s, t) &= h(s) \\ y(s, t) &= t \\ x(s, t) &= s + th(s).\end{aligned}$$

Así,

$$u(x, y) = z(s, t) = h(s) = h(x - tu(x, y)).$$

3.1 Wave breaking

Considere las curvas características, $s_2 > s_1$

$$x(s_1, t) = s_1 + th(s_1), \quad x(s_2, t) = s_2 + th(s_2).$$

$$\begin{aligned}x(s_1, t) &= x(s_2, t) \\ s_1 + th(s_1) &= s_2 + th(s_2) \\ t &= -\frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)} > 0.\end{aligned}$$

Así, la función asumirá valores distintos en el mismo punto

$$\begin{aligned}u(x, t) = h(s) &\implies u_x(x, t) = h'(s)(1 - tu_x) \\ u_x &= \frac{h'(s)}{1 + th'(s)}.\end{aligned}$$

Por ende, u_x explota en $t = -1/h'(s)$. El blow up ocurre cuando $h'(s) < 0$ y el tiempo crítico es $t_c = -\frac{1}{h'(s)}$.

Teorema 3. Suponga que u_1 y u_2 son soluciones del problema de Cauchy. Sean S_1 y S_2 las superficies asociadas a u_1 y u_2 respectivamente. Entonces las superficies pasan por $P_0 = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$ i.e. $P_0 \in S_1 \cap S_2$, luego $S_1 \cap S_2$ contiene una curva característica que pasa por P_0 . Por tanto, $u_1 = u_2$ localmente.

Proof. Suponga que u_1 y u_2 son soluciones del problema de Cauchy. Sean S_1 y S_2 las superficies asociadas a u_1 y u_2 respectivamente. Entonces, las superficies pasan por $P_0 = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$, i.e., $P_0 \in S_1 \cap S_2$. Luego, $S_1 \cap S_2$ contiene una curva característica que pasa por P_0 . Por lo tanto, $u_1 = u_2$ localmente. Ahora la existencia. Para cada $s \in J$, sea

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(x, y, z), \quad x(s, 0) = f(s) \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y, z), \quad y(s, 0) = g(s) \\ \frac{dz}{dt} &= c(x, y, z), \quad z(s, 0) = h(s).\end{aligned}$$

Ese sistema admite existencia y unicidad de solución por el Teorema de Picard. Por hipótesis,

$$\begin{bmatrix} x_s(s, 0) & x_t(s, 0) \\ y_s(s_0) & y_t(s, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(s) & a(f(s), g(s), h(s)) \\ g'(s) & b(f(s), g(s), h(s)) \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$(x, y) : V_{(s,0)} \rightarrow W_{(f(s),g(s))}$$

define un sistema de coordenadas $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$. Ahora, sea

$$u(x, y) = z(s, t) = z(s(x, y), t(x, y)).$$

Verifiquemos que es solución de la EDP

$$\begin{aligned} u_x &= z_s s_x + z_t t_x \\ u_y &= z_s s_y + z_t t_y \\ au_x + bu_y &= (as_x + bs_y)z_s + (at_x + bt_y)z_t \\ 0 &= \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{dx}{dt}s_x + \frac{dy}{dt}s_y = as_x + bs_y \\ at_x + bt_y &= \frac{dx}{dt}t_x + \frac{dy}{dt}t_y = \frac{dt}{dt} = 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$au_x + bu_y = z_t = c.$$

□

4 Clase 4

- Series de Fourier.
- Transformada de Fourier.
- Transformada discreta de Fourier.

$$f(x) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{f}(k)$$

$$f'(x) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \rightarrow (ik)\hat{f}(k)$$

$$f^{(n)}(x) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \rightarrow (ik)^n \hat{f}(k)$$

Ejemplo 4.1. Sea

$$\begin{cases} u_t(x, t) + u_{xxx}(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x, 0). \end{cases}$$

Aplicando la transformada $\mathcal{F}$,

$$\begin{cases} \hat{u}_t(k, t) + (ik)^3 \hat{u}(k, t) &= 0 \\ \hat{u}(k, 0) &= \hat{u}_0(k, 0). \end{cases}$$

Esto último es una EDO cuya solución es

$$\hat{u}(k, t) = e^{-(ik)^3 t} \hat{u}(k, 0) = e^{-(ik)^3 t} \hat{u}_0(k).$$

Luego,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-(ik)^3 t} \hat{u}_0(k)].$$

Ejemplo 4.2. Qué hay de

$$\begin{cases} u_t(x, t) + uu_x + u_{xxx}(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x, 0). \end{cases}$$

Ahora no es posible aplicar la transformada $\mathcal{F}$ por el segundo término. Sin embargo, podemos escribir el nuevo término como $\frac{1}{2}(u^2)_x$ y proceder como antes.

4.1 Series de Fourier - Separación de Variables

Ejemplo 4.3. Consideremos la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t &= \alpha^2 u_{xxx}, \text{ en } (0, L) \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= 0 = u(L, t), \ t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \ x \in [0, L]. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c}
u_t = \alpha^2 u_{xxx} \\
u(x, 0) = f(x) \\
\begin{array}{ccc}
\leftarrow & \text{---} & \rightarrow \\
u(0, t) = 0 & & u(L, t) = 0 \\
& \text{---} & \\
& L &
\end{array}
\end{array}$$

Buscamos $u \in C^2((0, L) \times (0, \infty)) \cap C^0([0, L] \times [0, \infty])$. Supongamos que

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t).$$

De este modo,

$$\varphi(x)\psi'(t) = \alpha^2 \varphi''(x)\psi(t).$$

Re-escribiendo, (en los puntos en los que ψ y φ no se anulan)

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Como un lado de la ecuación depende de x pero no de t y el otro lado más bien depende de t y no de x , ambos ratios deben ser iguales a una constante que denotamos $-\lambda$. Así, tenemos las EDOS:

$$\begin{cases}
\psi'(t) &= -\lambda \alpha^2 \psi(t) \\
\psi'(t) + \lambda \alpha^2 \psi(t) &= 0
\end{cases}$$

y

$$\begin{cases}
\varphi''(x) &= -\lambda \varphi(x) \\
\varphi''(x) + \lambda \varphi(x) &= 0 \\
\varphi(0) &= 0 \\
\varphi(L) &= 0.
\end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi(0)\psi(t) &= 0, \quad t > 0, \quad \varphi(0) = 0 \\
\varphi(L)\psi(t) &= 0, \quad t \geq 0 \implies \varphi(L) = 0.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{cases}
\varphi''(x) + \lambda \varphi(x) &= 0, \quad 0 < x < L \\
\varphi(0) = \varphi(L) &= 0
\end{cases} \tag{3}$$

y

$$\psi'(t) + \alpha^2 \lambda \psi(t) = 0.$$

Un λ para el cual (3) tiene solución no trivial, es llamado autovalor del Problema 3, y las soluciones no triviales se conocen como autofunciones correspondientes del autovalor λ .

Probemos que $\lambda > 0$ (los autovalores son positivos). Sea

$$C_{\mathbb{C}}[0, L] = \{f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ continuas}\}.$$

Dados $f, g \in C_{\mathbb{C}}[0, L]$ definamos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x) \bar{g}(x) dx. \tag{4}$$

(4) define un producto interno en $C_{\mathbb{C}}[0, L]$. Dado que $\varphi \in C_{\mathbb{C}}^2((0, L)) \cap \mathbb{C}_{\mathbb{C}}[0, L]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi''(x) &= -\lambda \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\lambda \varphi(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow L^-} \varphi''(x) &= -\lambda \lim_{x \rightarrow L^-} \varphi(x) = -\lambda \varphi(L) = 0\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^x \varphi(y) dy &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x \varphi''(y) dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} [\varphi'(x) - \varphi'(a)] \\ \lambda \int_x^L \varphi(y) dy &= \lim_{b \rightarrow L^-} \int_x^b \varphi''(y) dy = \lim_{b \rightarrow L^-} [\varphi'(b) - \varphi'(x)].\end{aligned}$$

Luego, existen los límites $\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a)$ y $\lim_{b \rightarrow L^-} \varphi'(b)$. Esto nos permite integrar φ'', φ' sobre $[0, L]$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned}\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle &= \langle \lambda \varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle -\varphi'', \varphi \rangle \\ &= - \int_0^L \varphi''(x) \overline{\varphi}(x) dx \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow L^-} \int_a^b \varphi''(x) \overline{\varphi}(x) dx \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow L^-} [\varphi'(x) \overline{\varphi}(x)] - \int_a^b \varphi'(x) \overline{\varphi}'(x) dx \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow L^-} [\varphi'(b) \overline{\varphi}(b) - \varphi'(a) \overline{\varphi}(a)] + \int_0^L |\varphi'(x)|^2 \\ &= \langle \varphi', \varphi' \rangle > 0.\end{aligned}$$

Dado que $\langle \varphi, \varphi \rangle > 0$, necesariamente $\lambda > 0$.

Otra forma de verlo es que si $\lambda \leq 0$, entonces $\varphi(x) = 0$. Por ende, $\lambda > 0$. Ahora bien, la solución a la EDO $\varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0$ con $\lambda > 0$ es de la forma

$$\varphi(x) = a_{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) + b_{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

con a y b constantes tales que

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= a_{\lambda} = 0 \\ \varphi(L) &= b_{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.\end{aligned}$$

Así, $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ para cierto $n \in \mathbb{N}$: $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$:

$$\varphi_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L]$$

son las autofunciones asociadas a los λ_n . Ahora bien, en cuanto a $\psi'(t) + \alpha^2 \lambda \psi(t) = 0$, la solución es de la forma

$$\psi(t) = ke^{-\alpha^2 \lambda t}$$

donde k es una constante arbitraria. De este modo,

$$u_n(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right), \quad x \in [0, L], t \geq 0.$$

Un candidato solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right)$$

Vamos a buscar b_n tales que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ejemplo 4.4. Consideremos la siguiente variante de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad (0, L) \times (0, \infty) \\ u_x(0, t) &= 0 = u_x(L, t), \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x). \end{cases}$$

En este caso,

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ejemplo 4.5. En el caso que el flujo de calor en cada lado de la barra es proporcional a la temperatura

$$\begin{cases} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad (0, L) \times (0, \infty) \\ u_x(0, t) + u(0, t) &= 0 = u_x(L, t) + u(L, t), \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x). \end{cases}$$

La función f tendrá la forma

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5)$$

El objetivo es responder las siguientes preguntas:

- Dada $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, ¿cuando es posible expresar f como (5).
- ¿Cómo calcular a_n y b_n ?
- ¿En qué sentido (5) converge?

Notación 1. Denotamos

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \psi_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Proposición 3. Dado $n \in \mathbb{N}$, las funciones φ_n, ψ_n son periódicas con periodo fundamental $T = \frac{2L}{n}$. En particular, $2L$ es un periodo común a todas esas funciones.

Definición 4.1. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones tales que el producto es integrable, podemos definir

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

como producto interno. En caso $\langle f, g \rangle = 0$, se dice que f y g son ortogonales. Una familia de funciones se llama ortogonal en $[a, b]$ si las funciones son 2 a 2 ortogonales.

Proposición 4. El conjunto $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortogonal en $[-L, L]$ y cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \psi_n(x)\psi_m(x)dx &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ L, & \text{si } m = n \\ 2L, & \text{si } m = n = 0. \end{cases} \\ \int_{-L}^L \psi_n(x)\varphi_m(x)dx &= 0 \\ \int_{-L}^L \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ L, & \text{si } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Proof. Si $m = n$, como $\frac{1}{2} \sin(2\theta) = \sin(\theta) \cos(\theta)$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx.$$

Luego, usando el hecho que $\int \sin(ax)dx = \frac{-1}{a} \cos(ax)$:

$$\frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx = -\frac{1}{2} \frac{L}{2m\pi} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L = 0.$$

Para el caso $m \neq n$, recordemos que

$$\boxed{\sin(Ax) \cos(Bx) = \frac{1}{2} (\sin((A - B)x) + \sin((A + B)x))}.$$

Así,

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\sin\left(\frac{(m - n)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(m + n)\pi x}{L}\right) \right] dx. \quad (6)$$

Desarrollando la integral, queda:

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{L}{m\pi - n\pi} \cos\left(\frac{m\pi - n\pi}{L}x\right) \right) \Big|_{-L}^L + \frac{1}{2} \left(-\frac{L}{m\pi + n\pi} \cos\left(\frac{m\pi + n\pi}{L}x\right) \right) \Big|_{-L}^L. \quad (7)$$

Expandiendo los cosenos y senos, se concluye que 7 es igual a cero. Probemos ahora que, cuando $m \neq n$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Para esto, recordemos que

$$\cos Ax \cos Bx = \frac{1}{2} (\cos((A - B)x) + \cos((A + B)x)).$$

Así,

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{n\pi x - m\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x + m\pi x}{L}\right) \right] dx.$$

Dado que $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{n\pi x - m\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x + m\pi x}{L}\right) \right] dx &= \frac{1}{2} \frac{L}{n\pi - m\pi} \sin\left(\frac{n\pi - m\pi}{L} x\right) \Big|_{-L}^L \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{L}{n\pi + m\pi} \sin\left(\frac{n\pi + m\pi}{L} x\right) \Big|_{-L}^L \\ &= 0. \end{aligned}$$

En efecto, $\sin(k\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Para la integral $\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$ recordemos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin(Ax) \sin(Bx) = \frac{1}{2} (\cos((A - B)x) - \cos((A + B)x)).$$

De este modo,

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{(n - m)\pi}{L} x\right) - \cos\left(\frac{(n + m)\pi}{L} x\right) \right] dx. \quad (8)$$

Por el mismo argumento $\sin(k\pi) = 0$ para k entero, concluimos que 8 es iguala cero. Queda únicamente analizar el caso $n = m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &\int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Veamos que ambas integrales son iguales a L . Basta recordar que

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}. \end{aligned}$$

□

Vamos a usar las propiedades precedentes para determinar los coeficientes de Fourier. Sea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + b_n \varphi_n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_0 \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + b_n \varphi_n, \psi_0 \right\rangle \\ &= \frac{a_0}{2} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle = a_0 L.\end{aligned}$$

O sea,

$$a_0 = \frac{1}{L} \langle f, \psi_0 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_n \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + b_n \varphi_n, \psi_n \right\rangle \\ &= a_n \langle \psi_n, \psi_n \rangle \\ &= a_n L\end{aligned}$$

o sea,

$$a_n = \frac{1}{L} \langle f, \psi_n \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi_n \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + b_n \varphi_n, \varphi_n \right\rangle \\ &= b_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \\ &= L b_n.\end{aligned}$$

O sea,

$$b_n = \frac{1}{L} \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Definición 4.2. Sea $L > 0$ y $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable la serie de Fourier de f es la serie

$$S[f](x) \triangleq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde

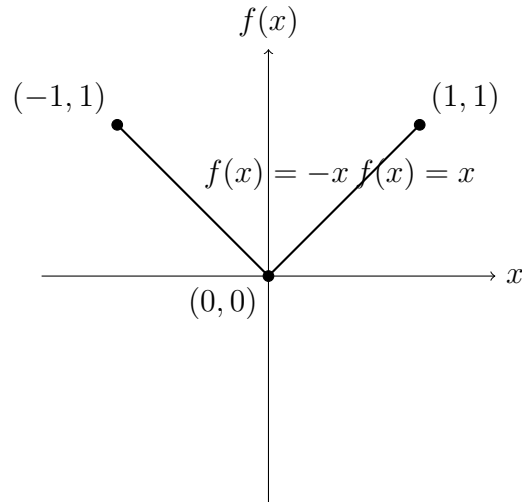
$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.\end{aligned}$$

Los coeficientes a_n y b_n son llamados coeficientes de Fourier.

Observación 7. Si $S[f]$ converge para $x \in \mathbb{R}$, $S_n[f]$, converge a una función de periodo $2L$. Además, es natural estudiar la serie de Fourier de funciones de la recta en la recta que son periódicas en $[-L, L]$ tal que $f(-L) = f(L)$ y $f(x+2L) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.6. Encuentre la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Tenemos que $L = 1$. Luego,

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\ &= 2 \left. \frac{n\pi x \sin(n\pi x) + \cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right|_0^1 \\ &= 2 \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \\ &= 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 \underbrace{f(x) \sin(n\pi x)}_{=\text{impar}} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así,

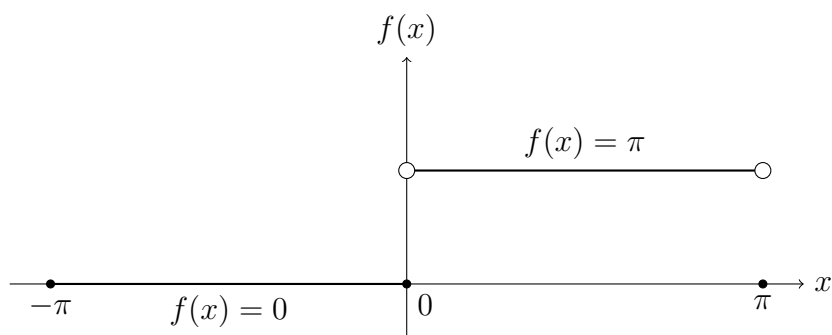
$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos((2k+1)\pi x). \end{aligned}$$

Note que en $x = 0$,

$$S[f](0) = \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2 \pi^2}}_{=-1/2}.$$

Ejemplo 4.7. Vamos a calcular la serie de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$



Entonces,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi dx = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos(mx) dx \\ &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin(nx) dx \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

5 Clase 5

Definición 5.1. Se dice que f es seccionalmente continua en $[a, b]$ si existe una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que f es continua en cada sub-intervalo (x_j, x_{j+1}) , $j = 0, \dots, n-1$ y $f(x)$ tiene a un límite finito cuando $x \in (x_j, x_{j+1})$ tiene a x_j o a x_{j+1} , $0 \leq j \leq n-1$.

Observación 8. Existen funciones seccionalmente continuas tales que $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ pero $f \neq 0$. Por ejemplo, $f(x) = 0$ para $x \in [0, 1)$ y $f(1) = 1$.

Notación 2. Denotamos $SC[-L, L]$ al espacio de las funciones seccionalmente continuas en $[-L, L]$.

Observación 9. Notemos que

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx$$

no es producto interno. Sin embargo, $\langle, \rangle$ es una forma bilineal. Es decir,

1. $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g, h \in SC[-L, L]$.
2. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, $f, g \in SC[-L, L]$.
3. $\langle f, f \rangle \geq 0$, $f \in SC[-L, L]$, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ define una semi-norma.
 - $\|f\| \geq 0$, $f \in SC[-L, L]$.
 - $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in SC[-L, L]$.
 - $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $f, g \in SC[-L, L]$.

Proposición 5. Si $f \in SC[-L, L]$ y si

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n + b_n\varphi_n$$

es su serie de Fourier,

$$\left\| f - \left[\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n\psi_n + \sum_{n=1}^M b_n\varphi_n \right] \right\| \leq \left\| f - \left[\frac{c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^N c_n\psi_n + \sum_{n=1}^M d_n\varphi_n \right] \right\|$$

para $N, M \in \mathbb{N}$, $c_n, d_n \in \mathbb{R}$. Además, vale la igualdad si y solamente si $a_n = c_n, b_n = d_n$.

Proof. Sea g la función

$$g = f - \left[\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n\psi_n + \sum_{n=1}^M b_n\varphi_n \right].$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \langle g, \psi_0 \rangle &= \underbrace{\langle f, \psi_0 \rangle}_{=a_0L} - \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}_{=2L} = 0 \\ \langle g, \psi_n \rangle &= \underbrace{\langle f, \psi_n \rangle}_{=a_nL} - a_n \underbrace{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}_{=L} = 0 \\ \langle g, \varphi_n \rangle &= \underbrace{\langle f, \varphi_n \rangle}_{=b_nL} - b_n \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}_{=L} = 0. \end{aligned}$$

Consideremos ahora

$$h = \frac{a_0 - c_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n - c_n)\psi_n + \sum_{n=1}^M (b_n - d_n)\varphi_n.$$

Por el Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} \left\| f - \left[c_0\psi_0 + \sum_{n=1}^N c_n\psi_n + \sum_{n=1}^M d_n\varphi_n \right] \right\|^2 &= \|g + h\|^2 \\ &\stackrel{g \perp h}{=} \|g\|^2 + \|h\|^2 \\ &\geq \|g\|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, si ocurre la igualdad, $a_n = c_n$ y $b_n = d_n$. □

Proposición 6. Desigualdad de Bessel. Sea $f \in SC[-L, L]$ y sea $S[f](x) = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n + b_n\varphi_n$ su serie de Fourier. Entonces, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergen y se cumple

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{\|f\|^2}{L}.$$

Proof. Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n\psi_n + \sum_{n=1}^M b_n\varphi_n \right] \right\|^2 \\ &= \left\langle f - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n\psi_n + \sum_{n=1}^M b_n\varphi_n \right], f - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n\psi_n + \sum_{n=1}^M b_n\varphi_n \right] \right\rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \frac{a_0}{2} \langle f, \psi_0 \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle f, \psi_n \rangle \\ &\quad - \sum_{n=1}^M b_n \langle f, \varphi_n \rangle - \frac{a_0}{2} \langle \psi_0, f \rangle \\ &\quad + \frac{a_0^2}{4} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_n, f \rangle + \sum_{n=1}^N a_n^2 \langle \psi_n, \psi_n \rangle \\ &\quad - \sum_{n=1}^M b_n \langle \varphi_n, f \rangle + \sum_{n=1}^M b_n^2 \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{n=1}^N a_n^2 - L \sum_{n=1}^M b_n^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{n=1}^M b_n^2 \leq \frac{\|f\|^2}{L}.$$

Como esto es para cualesquiera N, M , haciendo $N, M \rightarrow \infty$ concluimos por la continuidad de la norma. □

Podemos escribir la serie de Fourier de una función $f \in SC[-L, L]$ usando exponenciales complejas:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi x}{L}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{in\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{\frac{in\pi x}{L}} \end{aligned}$$

donde $\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$, $\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $\hat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx. \end{aligned}$$

Corolario 1. Si $f \in SC[-L, L]$, $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sus coeficientes de Fourier, entonces,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2L} \|f\|^2.$$

6 Clase 6

Corolario 2. Sea $f \in SC[-L, L]$ y $S[f](x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{\frac{in\pi x}{L}}$, su serie de Fourier. Entonces, la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| = \lim_n \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(n)|^2$$

es convergente por la desigualdad de Bessel.

Corolario 3. Riemann-Lebesgue. Si $f \in SC[-L, L]$, entonces $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$. En la versión real,

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0.$$

Aquí $\hat{f}(n)$ son los coeficientes de Fourier de la serie en forma compleja y $\{a_n\}, \{b_n\}$ los coeficientes en su forma real.

Observación 10. f es suave en $(-\pi, \pi)$, periódica,

$$|\hat{f}^{(n)}(k)| = |(ik)^n \hat{f}(k)| \implies |\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{k^n}.$$

Definición 6.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas continuas definidas en $I \subset \mathbb{R}$. Diremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente en I a una función f si y solamente si dados $x \in I$ y $\epsilon > 0$, existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_x : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Decimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en I a una función f si solamente si, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I$$

Teorema 4. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $f \in C_{\mathbb{C}}(I)$.

Proof. Sea $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(x_0) - f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$, para todo $x \in I$, por la convergencia unifrmemente. Sea $n = N$, entonces,

$$|f_N(x) - f(x)| < \epsilon/3.$$

Dado $x_0 \in I$, existe por la continuidad $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon/3.$$

Luego, si $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

□

Teorema 5. M-Weierstrass. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, y $\{f_n\}$ una sucesión en $C_{\mathbb{C}}(I)$, suponga que exista $\{M_n\}$ sucesión numérica tal que

1. $|f_n(x)| \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}, x \in I$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en I .

Proof. Primero, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $\ell \geq n \geq N$

$$\sum_{k=n}^{\ell} M_k < \epsilon.$$

Entonces,

$$\left| \sum_{k=n}^{\ell} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{\ell} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{\ell} M_k < \epsilon.$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente. Por otro lado, haciendo $\ell \rightarrow \infty$,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \epsilon, \forall x \in I.$$

Sea $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), x \in I$. De esta forma, para $n \geq N$ y cualquier $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon.$$

□

Teorema 6. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C_{\mathbb{C}}[a, b]$ y suponga que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f \in C_{\mathbb{C}}[a, b]$. Entonces, cualquiera que sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente continua,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx.$$

Proof. Simplemente

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f_n(x)g(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))g(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \cdot |g(x)|dx \\ &< \epsilon M(b-a). \end{aligned}$$

Esto se deriva del hecho que existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ y como $f_n \rightarrow f$ uniformemente, podemos encontrar $N > 0$ tal que

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{M(b-a)}.$$

□

Teorema 7. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C_{\mathbb{C}}^1[a, b]$. Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge para algún $x_0 \in [a, b]$ y que la serie de derivada $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $g \in C_{\mathbb{C}}[a, b]$. Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente a una función de clase C^1 , digamos f , y $f' = g$.

Proof. Primero, por el TFC y la convergencia uniforme

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x g(t)dt &= \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(t)dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f'_k(t)dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) - f_k(x_0)]. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ es convergente, tendremos que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente. Luego, podemos definir

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in [a, b].$$

Así,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt.$$

Sigue que $f \in C_{\mathbb{C}}^1[a, b]$ y $f' = g$. Resta demostrar que la convergencia es uniforme:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x g(t)dt + f(x_0) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x g(t)dt + f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) + \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x g(t)dt - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) + \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - f(x_0) \right| \\ &< \left| \int_{x_0}^x g(t)dt - \sum_{k=1}^n [f_k(x) - f_k(x_0)] \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \left| \int_{x_0}^x g(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f'_k(t)dt \right| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

□

Dada una función $f \in SC[-L, L]$ podemos extenderla de forma natural a una función periódica F de periodo $2L$ que es seccionalmente continua en $[a, b]$. Denotemos

$SC_{\text{Per}}(2L)$ = funciones reales periódicas de periodo $2L$

que son seccionalmente continuas en todo intervalo $[a, b]$

$C_{\text{Per}}(2L)$ = funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y periódicas con periodo $2L$.

Dados $f \in SC_{\text{Per}}(2L)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ denotaremos por $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ los límites laterales

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Teorema 8. Si $f \in SC_{\text{Per}}(2L)$ y suponga que f es diferenciable salvo en un número finito de puntos en $(-L, L)$ con $f' \in SC_{\text{Per}}(2L)$. Entonces, para cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge en el punto x a $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

Lema 1. Sea $f \in SC_{\text{Per}}(2L)$ y suponga que f es diferenciable salvo en un número finito de puntos en $(-L, L)$ con $f' \in SC_{\text{Per}}(2L)$. Supongamos también que f es continua con $f(0) = 0$, entonces

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = f(0) = 0.$$

Proof. Definamos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{\frac{i\pi x}{L}} - 1}, & \text{si } x \neq 0, x \in [-L, L) \\ -\frac{iLf'(0^+)}{\pi}, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{e^{\frac{i\pi x}{L}} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \frac{x}{e^{\frac{i\pi x}{L}} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \frac{L}{i\pi} \\ &= -\frac{iLf'(0^+)}{\pi}. \end{aligned}$$

Análogamente, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ existe y es igual a $-\frac{iLf'(0^-)}{\pi}$. Por aritmética de funciones seccionalmente continuas, $g \in SC[-L, L]$. Por ello, por el Teorema de Riemann-Lebesgue, $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}(n) = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} - 1 \right) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-\frac{i(n-1)\pi x}{L}} dx - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \\ &= \hat{g}(n-1) - \hat{g}(n). \end{aligned}$$

De este modo,

$$\sum_{k=-n}^m \hat{f}(k) = \sum_{k=-n}^m \hat{g}(k-1) - \hat{g}(k) = -\hat{g}(-m-1) - \hat{g}(m) \rightarrow 0.$$

□

7 Clase 7

Teorema 9. Si $f \in SC_{\text{Per}}(2L)$ y suponga que f es diferenciable salvo en un número finito de puntos en $(-L, L)$ con $f' \in SC_{\text{Per}}(2L)$. Entonces, para cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge en el punto x a $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

Proof. Sea

$$T(x, y) = \left(x - x_0, y - \left[\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] \right).$$

Así T lleva el gráfico de f en punto de la forma

$$\left(x - x_0, y - \left[\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] \right),$$

el cual resulta ser el gráfico de la función

$$g(x) = f(x + x_0) - \left[\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right].$$

La función g la todavía no es continua como en el lema anterior pues no necesariamente ocurre que $g(0) = 0$. Sin embargo,

$$g(0^+) = \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$$

y

$$g(0^-) = \frac{f(x_0^-) - f(x_0^+)}{2} \implies \frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} = 0.$$

Así, sea

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x) + g(x^-)}{2}, & \text{si } x \neq 0, x \in [-L, L) \\ 0, & \text{con } x = 0, \end{cases}$$

y $h(x + 2L) = h(x)$. Como $f, f' \in SC_{\text{Per}}(2L)$, es evidente que $g, g' \in SC_{\text{Per}}(2L)$ y por tanto $h, h' \in SC_{\text{Per}}(2L)$. Además, por construcción, h es continua en $x = 0$. Sigue del Lema anterior que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \hat{h}(k) = 0.$$

Por otro lado,

$$\hat{h}(k) = \frac{\hat{g}(k) + \hat{g}(-k)}{2}. \quad (9)$$

Luego, de (9)

$$\sum_{k=-n}^n \hat{g}(k) = \sum_{k=-n}^n \hat{h}(k).$$

Los coeficiente de Fourier de la función g son

$$\begin{aligned} \hat{g}(k) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[f(x + x_0) - \left(\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right) \right] e^{-\frac{ik\pi x}{L}} dx \\ &= \hat{f}(k) e^{\frac{ik\pi x_0}{L}} - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \int_{-L}^L e^{-\frac{ik\pi x}{L}} dx. \end{aligned}$$

Luego,

$$\hat{g}(k) = \begin{cases} \hat{f}(0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, & \text{si } k = 0 \\ \hat{f}(k)e^{\frac{ik\pi x_0}{L}}, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \left\{ \hat{f}(k)e^{\frac{ik\pi x_0}{L}} \right\} - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) = 0.$$

□

Observación 11. La condición de diferenciabilidad de f puede ser debilitada, pero es importante observar que es necesario algo más que $f \in SC_{\text{Per}}(2L)$.

Ejemplo 7.1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Vimos anteriormente que

$$S[f](x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

Como f es continua y diferenciable en $(-1, 0) \cup (0, 1)$ con $f' \in SC[-1, 1]$ tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

En particular, tomando $x = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

7.1 Convergencia uniforme

Proposición 7. Suponga que $f \in C_{\text{Per}}(2L)$ es diferenciable en $(-L, L)$ salvo un número finito de puntos con $f' \in SC_{\text{Per}}(2L)$. Entonces los coeficientes de Fourier cumplen

$$\hat{f}'(n) = \frac{i\pi n}{L} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Proof. Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{f}'(n) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f'(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{2} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} \Big|_{-L}^L + \frac{in\pi}{L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \\ &= \frac{in\pi}{L} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

Observación 12. Si $f^{(k)} \in SC_{\text{Per}}(2L)$ entonces $\hat{f}^{(k)}(n) = \left(\frac{in\pi}{L}\right)^k \hat{f}(k)$, $n \in \mathbb{Z}$. En particular, si $n \neq 0$

$$\hat{f}(n) = \left(\frac{L}{in\pi}\right)^k \hat{f}^{(k)}(n).$$

Así, si $k \geq 2$, la serie de f converge uniformemente a f . De hecho $f, f' \in C_{\text{Per}}(2L)$ y $f'' \in SC_{\text{Per}}(2L)$, por el Lema de Riemann-Lebesgue

$$\hat{f}''(n) \rightarrow 0, |n| \rightarrow \infty.$$

Luego, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\hat{f}''(n)| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consecuencia

$$\left| \hat{f}(n) e^{\frac{in\pi x}{L}} \right| \leq |\hat{f}(n)| \leq \frac{L^2}{n^2 \pi^2} |\hat{f}''(n)| \leq \frac{ML^2}{n^2 \pi^2} \rightarrow 0.$$

Como $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sigue por el test M de Weierstrass que la serie de Fourier converge uniformemente.

Teorema 10. Suponga que $f \in C_{\text{Per}}(2L)$ es diferenciable en $[-L, L]$ salvo un número finito de puntos, $f' \in SC_{\text{Per}}(2L)$. Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente en $\mathbb{R}$ hacia f .

Proof. Por la observación anterior y el test M de Weierstrass es suficiente probar que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{k=-N}^N |\hat{f}(k)| \leq K, \forall N \in \mathbb{N}.$$

Para eso utilizaremos la desigualdad de Bessel y la Proposición 7

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| &= |\hat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\hat{f}(n)| \\ &= |\hat{f}(0)| + \frac{L}{\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{|\hat{f}'(n)|}{n} \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \frac{1}{\pi} \left[\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} |f'(n)|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \frac{L}{\pi \sqrt{2L}} \|f'\| \left[\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} \\ &= |\hat{f}(0)| + \frac{\sqrt{L}}{\pi \sqrt{2}} \|f'\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego, se sigue el resultado. □

Teorema 11. Sean $f, g \in C_{\text{Per}}(2L)$ y supongo que f es diferenciable en $(-L, L)$ salvo un número finito de puntos con $f' \in SC_{\text{Per}}(2L)$. Entonces

$$\frac{1}{2}(f|g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

En particular, se cumple la desigualdad de Parseval

$$\frac{1}{2L} \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Proof. Por el Teorema 10, la serie de Fourier converge uniformemente. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} (f|g) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \overline{g}(x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \int_{-L}^L \overline{g}(x) e^{\frac{in\pi x}{L}} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{g}(n). \end{aligned}$$

□

8 Clase 8

8.1 Transformada de Fourier

Motivación: la barra del calor en la barra infinita.

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx}, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \\ u &\text{acotada.} \end{cases}$$

Por separación de variables

$$\begin{aligned} u(x, t) &= X(x)T(t) \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T'}{T} = -\lambda. \end{aligned}$$

Luego, obtenemos las EDO's

$$\begin{cases} X'' + \lambda X &= 0 \\ X &\text{acotada} \end{cases}$$
$$\begin{cases} T' + \lambda T &= 0 \\ T &\text{acotada} \end{cases}$$

Para que X y T sean acotadas, es necesario que $\lambda > 0$. En dicho caso,

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ T(t) &= Ce^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Sea $\lambda = \xi^2$. Entonces,

$$u_\xi(x, t) = (A(\xi)e^{i\xi x} + B(\xi)e^{-i\xi x})e^{-\xi^2 t}.$$

Sea

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^\infty [A(\xi)e^{i\xi x} + B(\xi)e^{-i\xi x}]e^{-\xi^2 t} d\xi \\ &= \int_0^\infty A(\xi)e^{i\xi x}e^{-\xi^2 t} d\xi + \int_0^\infty B(\xi)e^{-i\xi x}e^{-\xi^2 t} d\xi \\ &= \int_0^\infty A(\xi)e^{i\xi x}e^{-\xi^2 t} d\xi + \int_{-\infty}^0 B(-\eta)e^{-\eta x}e^{-\eta^2 t} d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(\xi)e^{i\xi x}e^{-\xi^2 t} d\xi. \end{aligned}$$

O sea, $u(x, t)$ es una expansión de f por funciones φ_ξ que cumplen $-\varphi_\xi'' = \xi^2 \varphi_\xi$, $\varphi_\xi = e^{i\xi x}$. Formalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi}_\xi(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) \overline{\varphi}_\xi(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{i\eta x} d\eta \right] e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a g(\eta) e^{-i(\xi-\eta)x} dx d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \frac{e^{-i(\xi-\eta)x}}{-i(\xi-\eta)} \Big|_{-a}^a d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \frac{e^{-i(\xi-\eta)a} - e^{i(\xi-\eta)a}}{-i(\xi-\eta)} d\eta \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \frac{\sin((\eta-\xi)a)}{\eta-\xi} d\eta \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\xi - \frac{r}{a}\right) \frac{\sin r}{r} dr \\
&= g(\xi) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin r}{r} dr \\
&= g(\xi).
\end{aligned}$$

Definición 8.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ y si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

la transformada de Fourier de f es definida por la función

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Mostraremos la fórmula de inversión

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}^1$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente integrables en cualquier intervalo $[a, b]$ y que cumplen

$$\|f\|_1 \leq \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)| dx < \infty.$$

Proposición 8. Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, entonces

1. $(f + \lambda g)(s) = \hat{f}(s) + \lambda \hat{g}(s)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. $\hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.
2. Si $y \in \mathbb{R}$ y $f_y(x) = f(x - y)$, $\hat{f}_y(\xi) = e^{-i\xi y} \hat{f}(\xi)$.
3. $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Teorema 12. Si $f \in \mathcal{L}^1$, entonces la transformada de Fourier $\hat{f}$ es uniformemente continua.

Proof.

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\xi+\eta)x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} (e^{-i\eta x} - 1) dx \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| < M} |f(x)| \cdot |e^{i\eta x} - 1| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > M} |f(x)| \cdot |e^{i\eta x} - 1| dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| < M} |f(x)| \cdot |e^{i\eta x} - 1| dx + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > M} f(x) dx.
\end{aligned}$$

Como $y \rightarrow e^{iy} - 1$ es continua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$, $|y| < \delta_0$, $|e^{iy} - 1| < \epsilon$. Tomando $\delta = \delta_0/M$

$$|\eta x| < M|\eta| < \delta_0 \rightarrow |e^{i\eta x} - 1| < \epsilon.$$

□

Proposición 9. Riemann-Lebesgue. Si $f \in \mathcal{L}^1$ es tal que f es seccionalmente continua en cualquier $[a, b]$, entonces

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Proof. Dado $\epsilon > 0$, como $\hat{f}$ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que. si $|\xi - \eta| < \delta$, $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| < \epsilon/3$. Por otro lado, existe $M > 0$ tal que

$$\int_{|x| > M} |f(x)| dx < \frac{\sqrt{2\pi}\epsilon}{3}, \quad M \geq \frac{\pi}{8}.$$

Sea $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} M f\left(\frac{M}{\pi} y\right)$$

g es $SC \in [-M, M]$ provisto que f lo sea. Así, por Riemann-Lebesgue (clásico)

$$\lim_n \hat{g}(n) = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = 0.$$

En particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $|n| \geq N$, $|\hat{g}(n)| < \epsilon/3$. Si $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi| > N\pi/M$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $K - 1 < \frac{M}{\pi}\xi \leq K$. Entonces, $K \geq |N|$ y $0 \leq \pi K/M - \xi = \frac{\pi}{M} (K - \frac{M}{\pi}\xi) < \frac{\pi}{M} < \delta$. Así,

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &\leq \left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}\left(\frac{\pi k}{M}\right) \right| + \left| \hat{f}\left(\frac{\pi k}{M}\right) \right| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > M} |f(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-M}^M f(x) e^{-i\pi K x/M} dx \right| \\
&< \frac{2\epsilon}{3} + \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{M}{\pi} y\right) e^{-iky} \frac{M}{\pi} dy \right| \\
&= \frac{2\epsilon}{3} + |\hat{g}(k)| < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Definición 8.2. El espacio de Schwartz. La colección de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}$ tales que cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ existe $C_{\alpha, \beta}$ con

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha, \beta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El espacio de Schwartz es no vacío pues la funciones con soporte compacto así como la Gaussiana $\gamma(x) = e^{-x^2/2}$ pertenecen a dicho espacio. Más aún, se puede verificar que $\hat{\gamma}(\xi) = \gamma(\xi)$.

Proposición 10. Si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces $f' \in S(\mathbb{R})$ y $\hat{f}'(\xi) = (i\xi)\hat{f}(\xi)$.

Proof. Es claro que $f' \in S(\mathbb{R})$. Por otro lado,

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= (i\xi) \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

pues $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ para $f \in S$. □

Corolario 4. Por inducción, si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces $f^{(n)} \in S(\mathbb{R})$ y $\hat{f}^{(n)}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$.

Lema 2. Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Proof. Tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-i\xi x} dx \\ \frac{d^\beta}{d\xi^\beta} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^\beta f(x) e^{-i\xi x} dx. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^\beta}{d\xi^\beta} \hat{f}(\xi) &= (-i)^\beta (x^\beta f)(\xi) \\ (i\xi)^\alpha \frac{d^\beta}{d\xi^\beta} \hat{f}(\xi) &= (-i)^\beta (i\xi)^\alpha x^\beta f(\xi) \\ &= (-i)^{\beta+\alpha} (i\xi)^\alpha x^\beta f(\xi) \\ &= (-i)^{\beta+\alpha} \hat{g}(\xi), \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} [x^\beta f(x)] \in S(\mathbb{R}).$$

Se ha usado el Corolario 4. El Lema de Riemann-Lebesgue garantiza que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{g}(\xi) = 0$$

entonces $\xi \rightarrow \xi^\alpha \frac{d^\beta}{d\xi^\beta} \hat{f}(\xi)$ es acotada. Luego, $\hat{f} \in SC(\mathbb{R})$. □

Lema 3. Si $f \in S(\mathbb{R})$ es tal que $f(0) = 0$, entonces

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Proof. Supongamos que existe $g \in S(\mathbb{R})$ tal que¹

$$f(x) = xg(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \hat{xg}(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= i\hat{g}'(\xi). \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}'(\xi) d\xi = i\hat{g}(\xi) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

El hecho que $g \in S$ es consecuencia de lo siguiente:

$$g^{(\beta)}(x) = \frac{1}{x^{\beta+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta!}{(\beta-k)!} x^{\beta-k} f^{(\beta-k)}(x).$$

Luego, para $|x| \geq 1$,

$$|x^\alpha g^{(\beta)}(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta-k)!} |x|^{\alpha+\beta-k} |f^{(\beta-k)}(x)| \leq C_{\alpha,\beta}.$$

Para $|x| \leq 1$, la continuidad de $x^\alpha g^{(\beta)}(x)$ asegura que esté acotada la función. □

Lema 4. Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Proof. Definimos

$$g(x) = f(x) - f(0)\gamma(x)$$

donde $\gamma(x) = e^{-x^2/2}$ y $\hat{\gamma}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$. Tenemos que $g(0) = 0$ y $g \in S(\mathbb{R})$. Luego,

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) - f(0)\hat{\gamma}(\xi)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi - \frac{f(0)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi - f(0). \end{aligned}$$

Así,

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

□

¹ $f(x) = \int_0^1 f'(tx) dt = \int_0^1 x f'(tx) dt = xg(x).$

9 Clase 9

Lema 5. Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Proof. Para $x, \xi \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\hat{f}(\xi) e^{i\xi x} = \hat{f}_{-x}(\xi),$$

donde $f_{-x}(t) = f(t+x)$. Claramente $f_{-x} \in S(\mathbb{R})$ y $f_{-x}(0) = f(x)$. De este modo, por el Lema 4,

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{-x}(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{-x}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \end{aligned}$$

□

Teorema 13. La aplicación $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$, $f \rightarrow \mathcal{F}\{f\} = \hat{f}$ es una biyección.

Proof. Si $\hat{f} = 0$, por el Lema 5 tenemos que $f = 0$. Así, $\mathcal{F}$ es inyectiva. Ahora, vamos a mostrar que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva. De hecho, si $f \in S(\mathbb{R})$,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi = \hat{f}(-x).$$

Es claro que $g \in S(\mathbb{R})$, y por la fórmula de inversión

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(-x) e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} dy \\ &= \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Luego, $f = \hat{g}$. □

Proposición 11. Identidad de Parseval. Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, esto es

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$$

es una isometría.

Proof. Considere el operador convolución

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy.$$

Se cumple que $f * g \in L^1$ y

$$\begin{aligned}
 f \hat{*} g(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x-y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\xi x} g(x-y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-i\xi y} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i\xi z} g(\xi) \\
 &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f \hat{*} g)(\xi) d\xi \\
 &= (f * g)(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(-y) dy.
 \end{aligned}$$

Si $g(y) = \overline{f(-y)}$, entonces,

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)} e^{-i\xi x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{i\xi x} dx \\
 &= \overline{\hat{f}(\xi)}.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \underbrace{\hat{g}(\xi)}_{=\overline{\hat{f}(\xi)}} d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(-y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy \\
 &= \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

□

10 Clase 10

Ejemplo 10.1. Sean $u, v \in S(\mathbb{R})$,

$$v = u - \frac{1}{2}\beta u_{xx} + \mathcal{O}(\beta^2), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Entonces, sacando la transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \hat{u} + \frac{1}{2}k^2\beta\hat{u}(k) + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= \left(1 + \frac{\beta k^2}{2}\right)\hat{u}(k) + \mathcal{O}(\beta^2).\end{aligned}$$

Así,

$$\hat{u} = \frac{1}{1 + \frac{\beta k^2}{2}}\hat{v}(k).$$

Usando una expansión de Taylor,

$$\hat{u} = \left(1 - \frac{\beta k^2}{2} + \mathcal{O}(\beta^2)\right)\hat{v}(k).$$

10.1 Ecuación de la onda

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicamos la transformada de Fourier:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + c^2 k^2 \hat{u}(k, t) &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ \hat{u}(k, 0) &= \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{R} \\ \hat{u}_t(k, 0) &= \hat{g}(k), \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La solución general de la EDO obtenida es

$$\hat{u}(k, t) = \hat{c}_1(k) \cos(ckt) + \hat{c}_2(k) \sin(ckt).$$

Las condiciones iniciales implican que

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \cos(ckt) + \frac{\hat{g}(k)}{ck} \sin(ckt).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}i\hat{g}(k) &= c(ik)\hat{c}_2(k) \\ \hat{c}_2'(k) &= \frac{i}{c}\hat{g}(k) \\ \hat{c}_2(k) &= \frac{i}{c} \int_0^k \hat{g}(s) ds.\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_1(k) \cos(kct) e^{ikx} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_2(k) \sin(kct) e^{ikx} dk \\
&= I + J \\
I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c_1(k) \frac{e^{ikct} + e^{-ikct}}{2} e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{c}_1(k) e^{ik(x+ct)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{c}_1(k) e^{ik(x-ct)} dk \\
&= \frac{1}{2} \{c_1(x+ct) + c_1(x-ct)\} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct))}_{\text{la onda se divide en 2}} \\
J &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_2(k) \sin(kct) e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_2(k) \frac{e^{ikct} - e^{-ikct}}{2i} dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} \hat{c}_2(k) e^{ik(x+ct)} dk - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} \hat{c}_2(k) e^{ik(x-ct)} dk \\
&= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.
\end{aligned}$$

De este modo,

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ f(x-ct) + f(x+ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \right\}.}$$

Observación 13. Si tomamos $g(x) = -cf'(x)$, o $g(x) = cf'(x)$, podemos cancelar uno de los términos, de forma que la onda viaje solo hacia un lado.

Una forma alternativa es la siguiente:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\
[\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}] u(x, t) &= 0 \\
[\partial_t - c \partial_x][\partial_t + c \partial_x] u(x, t) &= 0 \\
[\partial_t - c \partial_x] u(x, t) = 0 &\implies u(x, t) = \psi(x+ct) \\
[\partial_t + c \partial_x] u(x, t) = 0 &\implies u(x, t) = \varphi(x-ct) \\
u(x, t) &= \varphi(x-ct) + \psi(x+ct).
\end{aligned}$$

Así,

$$f(x) = u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f(x) &= u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) \\
u_t(x, t) &= -c\varphi'(x-ct) + c\psi'(x+ct) \\
g(x) &= u_t(x, 0) = -c\varphi'(x) + c\psi'(x).
\end{aligned}$$

De este modo, tenemos el sistema

$$\begin{cases} \varphi'(x) + \psi'(x) &= f'(x) \\ -c\varphi'(x) + c\psi'(x) &= g(x). \end{cases}$$

Por ende, obtenemos nuevamente

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ f(x - ct) + f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \right\}.$$

Interpretación para la solución del problema.

1. $g = 0$: $u(x, t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}$. El dato inicial se divide en dos que se propagan en direcciones opuestas.
2. Si fijamos (x_0, t_0) ,

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \{f(x_0 - ct_0) + f(x_0 + ct_0)\} + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(s) ds.$$

La información solo depende de lo que pasa en $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$, fijado (x_0, t_0) .

Ejemplo 10.2. Vamos a considerar el problema con $c = 1$, $g = 0$ y f definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| > 1 \\ -2|x| + 2, & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

La función f es discontinua en $x = 0, \pm 1$. Por ende, las singularidades se propagan en $x \pm 1 = \pm 1$.

$$u(x, t) = 2 - |x - t| - |x + t|.$$

Ejemplo 10.3. Sea

$$u_t + u_{xxx} + \alpha u u_x = 0, \quad \alpha \ll 1.$$

Aplicando Fourier, podemos encontrar una solución para $u_t + u_{xxx} = 0$, digamos u_0 . Luego, proponemos

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2.$$

10.2 El problema de la cuerda finita

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, L] \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u &\in C^2([0, L] \times [0, \infty)). \end{cases}$$

Inicialmente, observe que

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t),$$

donde v resuelve

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0, (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ v(x, 0) &= f(x) \\ v_t(x, 0) &= 0, x \in [0, L] \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0, t \geq 0 \\ v &\in C^2([0, L] \times [0, \infty)) \end{cases}$$

y ω resuelve

$$\begin{cases} \omega_{tt} - c^2 \omega_{xx} &= 0, (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ \omega(x, 0) &= 0 \\ \omega_t(x, 0) &= g(x), x \in [0, L] \\ \omega(0, t) &= \omega(L, t) = 0, t \geq 0 \\ \omega &\in C^2([0, L] \times [0, \infty)) \end{cases}$$

Aplicamos el método de separación de variables;

$$v(x, t) = X(x)T(t).$$

Obtenemos el siguiente sistema de EDOS

$$\begin{cases} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) &= 0 = X(L) \end{cases}, \quad \begin{cases} T'' + \lambda c^2 T &= 0 \\ T'(0) &= 0. \end{cases}$$

Tenemos

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Además, usando las condiciones de borde, $X(0) = A = 0$ y

$$0 = X(L) = B \sin(\sqrt{\lambda}L) \implies \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Luego, $T(t) = C \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$. Así,

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Usando las fórmulas trigonométricas, es posible expresar u como una función que viaja hacia la derecha y otra hacia la izquierda. Consideremos

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [0, L] \\ -f(-x), & \text{si } x \in [-L, 0], \end{cases}$$

que está bien definida por la condición de compatibilidad.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

$u(x, t)$ es una función continua en $[0, L] \times [0, \infty)$. Por el Test de Weierstrass es suficiente demostrar que $u(x, t)$ es acotada.

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty. \end{aligned}$$

Si le pedimos a f ser C^2 , por integración por partes, $|b_n| \leq \frac{M}{n^2}$. Por otro lado, si $f''' \in S[0, L]$, tenemos que $|b_n| \leq Mn^{-3}$.

Observación 14.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Derivamos

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \\ u_t(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right). \end{aligned}$$

11 Clase 11

Derivación de la ecuación de onda (escrito con variables adimensionales, $z = 0$ y no $z = -h_0$):

$$\begin{cases} \beta\phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0, \quad 0 < z < 1 + \alpha\eta(x, t) \\ \phi_z &= 0, \quad z = 0 \\ \eta_t + \alpha\phi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\phi_z &= 0, \quad z = 1 + \alpha\eta(x, t) \\ \phi_t + \frac{1}{2}\alpha\phi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\phi_z^2 + \eta &= 0, \quad z = 1 + \alpha\eta(x, t), \end{cases}$$

donde $\alpha = \frac{a}{h_0}$, $\beta = \frac{h_0^2}{\lambda^2} \ll 1$.

$$\phi = \phi(x, z, t), \quad \eta = \eta(x, t).$$

Planteamos el siguiente candidato a solución:

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, t) z^n.$$

Entonces, reemplazando en la EDO

$$\begin{aligned} 0 &= \beta\phi_{xx} + \phi_{zz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta f_{nxx} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) f_n z^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\beta f_{nxx} + (n+2)(n+1) f_{n+2}] z^n. \end{aligned}$$

Así, (para los pares)

$$f_{n+2} = -\frac{\beta}{(n+2)(n+1)} f_{nxx}.$$

De este modo,

$$f_{2n} = \frac{(-1)^n \beta^n}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f_0(x, t).$$

En el caso de los impares:

$$f_{2n+1} = \frac{(-1)^n \beta^n}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} f_1(x, t).$$

Así,

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f_0(x, t) z^{2n} + (-1)^n \frac{\beta^n}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} f_1(x, t) z^{2n+1}.$$

Por otro lado

$$0 = \phi_z \Big|_{z=0} \implies f_1(x, t) = 0 \implies f_{2n+1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f_0(x, t) \cdot z^{2n}.$$

Entonces,

$$\phi(x, z, t) = f_0 - \frac{\beta}{2} f_{0xx} z^2 + \frac{\beta^2}{4!} f_{0xxx} z^4 - \frac{\beta^3}{6!} f_{0xxxxx} z^6 + \mathcal{O}(\beta^4).$$

Así,

$$\begin{aligned}\phi_x &= f_{0x} - \frac{\beta}{2} f_{0xxx} z^2 + \frac{\beta^2}{4!} f_{0xxxx} z^4 - \frac{\beta^3}{6!} f_{0xxxxx} z^6 + \mathcal{O}(\beta^4) \\ \phi_z &= -\beta f_{0xx} + \frac{\beta^2}{3!} f_{0xxx} z^3 - \frac{\beta^3}{5!} f_{0xxxx} z^5 + \mathcal{O}(\beta^4).\end{aligned}$$

Sea $u = f_{0x}$. De la condición de cinemática

$$\eta_t + \alpha \phi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \phi_z = 0, \quad z = 1 + \alpha \eta(x, t).$$

se llega a

$$\eta_t + \alpha \left[u - \frac{\beta}{2} u_{xx} (1 + \alpha \eta)^2 + \mathcal{O}(\beta^2) \right] \eta_x - \frac{1}{\beta} \left[-\beta u_x (1 + \alpha \eta) + \frac{\beta^2}{6} u_{xxx} (1 + \alpha \eta)^3 + \mathcal{O}(\beta^3) \right] = 0.$$

Simplificando,

$$\eta_t + u_x + \alpha (\eta u)_x - \frac{1}{6} \beta u_{xxx} = \underbrace{\mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2)}_{\mathcal{O}(\alpha \beta) + \mathcal{O}(\beta^2)}.$$

Haciendo lo mismo para

$$\phi_t + \frac{1}{2} \alpha \phi_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \phi_z^2 + \eta = 0,$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + \alpha (\eta u)_x - \frac{1}{6} \beta u_{xxx} &= \mathcal{O}(\beta^2, \alpha \beta) \\ u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \frac{\beta}{2} u_{xxt} &= \mathcal{O}(\beta^2, \alpha \beta). \end{cases} \quad (10)$$

En primer orden (aproximación)

$$\begin{cases} \eta_t + u_x &= 0 \\ u_t + \eta_x &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \eta_{tt} + u_{xt} &= 0 \\ u_{xt} + \eta_{xx} &= 0 \end{cases} \implies \underbrace{\eta_{tt} - \eta_{xx}}_{\text{ecuación de onda}} = 0.$$

Supongamos que $\eta(x, t) = f(x - t)$ sea solución de Boussinesq y que

$$u = \eta + \alpha A(x, t) + \beta B(x, t).$$

Entonces, sustituyendo en (10), la primera ecuación provee

$$\begin{aligned}\eta_t + \eta_x + \alpha A_x + \beta B_x + \alpha (\eta \eta)_x - \frac{1}{6} \beta \eta_{xxx} &= 0 \\ \eta_t + \eta_x + \alpha [A_x + 2\eta \eta_x] + \beta \left[B_x - \frac{1}{6} \eta_{xxx} \right] &= 0.\end{aligned}$$

Para la segunda ecuación,

$$\begin{aligned}
\eta_t + \eta_x + \alpha A_t + \beta B_t + \alpha \eta \eta_x - \frac{\beta}{2} \eta_{xxt} &= 0 \\
\eta_t + \eta_x + \alpha [A_t + \eta \eta_x] + \beta \left[B_t + \frac{1}{2} \eta_{xxx} \right] &= 0 \\
\eta_t + \eta_x + \alpha (A_x + 2\eta \eta_x) + \beta \left[B_x - \frac{1}{6} \eta_{xxx} \right] &= 0 \\
\eta_t + \eta_x + \alpha [A_t + \eta \eta_x] + \beta \left[B_t + \frac{1}{2} \eta_{xxx} \right] &= 0.
\end{aligned}$$

Imponiendo compatibilidad:

$$\begin{aligned}
A_x + 2\eta \eta_x &= A_t + \eta \eta_x & B_x - \frac{1}{6} \eta_{xxx} &= B_t + \frac{1}{2} \eta_{xxx} \\
A_x + 2\eta \eta_x &= -A_x + \eta \eta_x & B_x - \frac{1}{6} \eta_{xxx} &= -B_x + \frac{1}{2} \eta_{xxx} \\
2A_x &= -\left(\frac{\eta^2}{2}\right)_x & 2B_x &= \frac{4}{6} \eta_{xxx} \\
A &= -\frac{1}{4} \eta^2 & B &= \frac{1}{3} \eta_{xx}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, obtenemos la ecuación de KdV

$$\eta_t + \eta_x = \alpha \left[-\frac{1}{2} \eta \eta_x + 2\eta \eta_x \right] + \beta \left[\frac{1}{3} \eta_{xxx} - \frac{1}{6} \eta_{xxx} \right] = 0.$$

PARTE II

12 Clase 12

12.1 La ecuación de onda en dimensiones altas

Ahora consideramos

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \quad u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

La EDP de la onda es dada por

$$u_{tt} = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

El PVI que estudiaremos será

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{cases}$$

Método de las medias esféricas

Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $M_h(x, r)$ su media definida sobre la esfera de centro x y radio r :

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\underbrace{\omega_n r^{n-1}}_{1/|\partial B(x, r)|}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y,$$

con ω_n ² el área de la esfera unitaria n dimensional³. Así,⁴

$$M_u(x, t, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y, t) dS_y.$$

Sea $\xi = \frac{y-x}{r}$. Entonces,

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) r^{n-1} dS_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi.$$

Luego, definimos

$$\tilde{M}_h(x, r) = \begin{cases} M_h(x, r), & \text{si } r > 0 \\ h(x), & \text{si } r = 0 \\ M_h(x, -r) & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Si $h \in C^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $M_h \in C^p(\mathbb{R}^n)$. También denotaremos la extensión de $\tilde{M}_h$ por M_h .

Proposición 12. Ecuación de Darboux. Si $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\left[\partial_{rr} - \frac{n-1}{r} \partial_r \right] M_h(x, r) = \Delta_x M_h(x, r).$$

² $n\alpha_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$.

³ $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

⁴ $dS_y = r^{n-1} dS_\xi$.

Además,

$$M_h(x, 0) = h(x)$$

y

$$\left. \frac{\partial M}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Proof. Se tiene que⁵

$$\begin{aligned}
\partial_r M_h(x, r) &= \partial_r \left[\frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi \right] \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \partial_r h(x + r\xi) dS_\xi \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \nabla h(x + r\xi) \cdot \underbrace{\xi}_{\mathbf{n}} dS_\xi \\
&\stackrel{\text{teorema de la divergencia}}{=} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} \nabla \cdot \nabla h(x + r\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} \underbrace{\Delta_\xi}_{\text{notación}} h(x + r\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} r \Delta_x h(x + r\xi) d\xi \\
&= \frac{r}{\omega_n} \Delta_x \int_{|\xi|<1} h(x + r\xi) d\xi \\
&= \frac{r}{\omega_n} \frac{1}{r^n} \Delta_x \int_{|y-x|<r} h(y) dy \\
&= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_0^r \int_{|y-x|=\rho} h(y) dS_y d\rho \\
&= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_0^r \omega_n \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho \\
\partial_r M_h(x, r) &= r^{1-n} \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho \\
r^{n-1} \partial_r M_h(x, r) &= \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho.
\end{aligned}$$

Note que se ha aplicado que el determinante del Jacobiano de $\varphi(y) = \frac{y-x}{r}$ es r^{-n} . Luego, derivamos con respecto a r :

$$\begin{aligned}
(n-1)r^{n-2} \partial_r M_h + r^{n-1} \partial_{rr} M_h &= r^{n-1} \Delta_x M_h(x, r) \\
\partial_{rr} M_h + \left(\frac{n-1}{r} \right) \partial_r M_h &= \Delta_x M_h(x, r).
\end{aligned}$$

□

⁵ $\int_\Omega \nabla \cdot F d\Omega = \int_{\partial\Omega} F \cdot \mathbf{n} d\omega.$

Considere la ecuación de la onda

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x), \end{cases}$$

y defina

$$\begin{aligned} M_u(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi \\ M_f(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} f(x + r\xi) dS_\xi \\ M_g(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} g(x + r\xi) dS_\xi. \end{aligned}$$

Entonces, si u es solución de la EDP,

$$\begin{aligned} \partial_{tt} M_u(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \partial_{tt} u(x + r\xi, t) dS_\xi \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} c^2 \Delta_x u(x + r\xi, t) dS_\xi \\ &= c^2 \Delta_x \left[\frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi \right] \\ &= c^2 \Delta_x M_u(x, r, t) \\ &= c^2 \left[\partial_{rr} M_u + \frac{n-1}{r} \partial_r M_u \right] \end{aligned}$$

El problema de Cauchy de la onda en $\mathbb{R}^3$

Si $n = 3$,

$$\begin{aligned} \partial_{tt} M_u &= \partial_{rr} M_u + \frac{2}{r} \partial_r M_u \\ \partial_{tt} [r M_u] &= r \partial_{rr} M_u + 2 \partial_r M_u \\ &= \partial_{rr} [r M_u]. \end{aligned}$$

De este modo, usando la paridad de M y la ecuación de d'Alambert

$$\begin{aligned} r M_u(x, r, t) &= \frac{1}{2} \left\{ (r - ct) M_f(x, r - ct) + (r + ct) M_f(x, r + ct) + \frac{1}{c} \int_{r-ct}^{r+ct} s M_g(x, s) ds \right\} \\ M_u(x, r, t) &= \frac{1}{2r} \left\{ (r + ct) M_f(x, r + ct) + (r - ct) M_f(x, r - ct) + \frac{1}{c} \int_{r-ct}^{r+ct} s M_g(x, s) ds \right\} \\ M_u(x, r, t) &= \frac{1}{2r} \left\{ (r + tc) M_f(x, ct + r) - (ct - r) M_f(x, ct - r) + \frac{1}{c} \int_{r-ct}^{r+ct} s M_g(x, s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Efectuando una reflexión para trabajar sobre $\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{c} \int_{r-ct}^{r+ct} s M_g(x, s) ds = \frac{1}{c} \int_{ct-r}^{ct+r} s M_g(x, s) ds.$$

Por ende, haciendo $r \rightarrow 0$, y recordando que $|\partial B(0, ct)| = 4\pi(ct)^2$ y que $\lim_{r \rightarrow 0} M_u(x, r, t) = u(x, t)$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{c} \partial_t [ct M_f(x, ct)] + t M_g(x, ct) \\ &= \partial_t \left[\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right] + \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y. \end{aligned}$$

13 Clase 13

Teníamos

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

La solución es

$$u(x, t) = \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right].$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right] = \underbrace{\frac{-1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y}_{=I} + \underbrace{\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \partial_t \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y}_{=J}.$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} J &= \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \partial_t \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \\ &= \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \partial_t \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) (ct)^2 dS_\xi \\ &= \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) 2c^2 t + [\nabla f(x + ct\xi) \cdot (c\xi)] (ct)^2 dS_\xi \\ &= \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} \frac{2f(y)}{t} + \left[\nabla f(y) \cdot \frac{y-x}{t} \right] dS_y. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} \{tg(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x)\} dS_y.$$

Observación 15. Cuando $n = 1$, se sigue de la fórmula de D'Alembert que la solución tiene la misma regularidad de los datos iniciales. Si $n = 3$, las soluciones son menos regulares. En general, si

$$f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^3), \quad g \in C^m(\mathbb{R}^3) \implies u \in C^m(\Omega).$$

Por otro lado, para conocer la solución en (x, t) , necesitamos conocer a los datos iniciales en toda la esfera $S = \{|y-x|=ct\}$.

Observación 16. Recordemos que

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F \circ \varphi(u, v) \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv,$$

donde

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

13.1 Método de Hadamard

Consideremos el problema de Cauchy en $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$

$$(*) : \begin{cases} u_{tt} - c^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ u(x_1, x_2, 0) &= f(x_1, x_2) \\ u_t(x_1, x_2, 0) &= g(x_1, x_2), \text{ en } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Una solución de $(*)$ puede ser considerada como una solución del problema 3D que no depende de la variable x_3 . Sean $\tilde{x} = (x_1, x_2, 0)$ y

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \tilde{u}(x_1, x_2, 0, t) \\ f(x_1, x_2) &= \tilde{f}(x_1, x_2, 0) \\ g(x_1, x_2) &= \tilde{g}(x_1, x_2, 0). \end{aligned}$$

Sea

$$(**) : \begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \Delta \tilde{u} &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) &= \tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \tilde{u}_t(\tilde{x}, 0) &= \tilde{g}(\tilde{x}), \text{ en } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Entonces,

$$u(x, t) = \tilde{u}(x_1, x_2, 0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|\tilde{y}-\tilde{x}|=ct} \left[\underbrace{t\tilde{g}(\tilde{y}) + \tilde{f}(\tilde{y}) + \nabla \tilde{f}(\tilde{y}) \cdot (\tilde{y} - \tilde{x})}_{=\tilde{h}(\tilde{y})} \right] dS_{\tilde{y}}.$$

O sea, tenemos que determinar

$$\int_{|\tilde{y}-\tilde{x}|=ct} \tilde{h}(\tilde{y}) dS_{\tilde{y}}.$$

Sea

$$S = \{|\tilde{y} - \tilde{x}| = ct\} = \left\{ \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - 0)^2} = ct \right\}.$$

Escribimos $y_3 = \sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} = \sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}$. Parametrizamos $\varphi(y_1, y_2) = (y_1, y_2, y_3)$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_{y_1} &= \left(1, 0, -\frac{y_1 - x_1}{y_3} \right) \\ \varphi_{y_2} &= \left(0, 1, -\frac{y_2 - x_2}{y_3} \right) \\ \varphi_{y_1} \times \varphi_{y_2} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{y_1 - x_1}{y_3} \\ 0 & 1 & -\frac{y_2 - x_2}{y_3} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 - x_1}{y_3} \\ \frac{y_2 - x_2}{y_3} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \|\varphi_{y_1} \times \varphi_{y_2}\| &= \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\int_{|\tilde{y}-\tilde{x}|=ct} \tilde{h}(\tilde{y}) dS_{\tilde{y}} = \int_{|\tilde{y}-\tilde{x}|<ct} h(y) \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy.$$

Así, la solución del problema en 2 dimensiones es

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x| < ct} \underbrace{2}_{\text{simetría, esfera completa}} ct \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy$$

$$+ \partial_t \left[\frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x| < ct} 2ct \cdot \frac{f(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right]$$

14 Clase 14

14.1 Métodos de energía

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave ∂U y $U_T = (0, T] \times U$, $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$, donde $T > 0$, y considere

$$(*) : \begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= \omega(x, t) \\ u &= f, \text{ en } \Gamma_T \\ u_t &= g \text{ en } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Teorema 14. Existe una única solución $C^2(\bar{U}_T)$ de $(*)$.

Proof. Suponga que u y $\tilde{u}$ son soluciones $C^2(\bar{U}_T)$ del problema $(*)$. Defina

$$z(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t) \in C^2(\bar{U}_T).$$

Entonces,

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z &= (u_{tt} - \Delta u) + (\tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u}) = \omega(x, t) - \omega(x, t) = 0 \\ z &= 0 \text{ en } \Gamma_T \\ z_t &= 0, \text{ en } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Defina

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U z_t^2(x, t) + |\nabla z(x, t)|^2 dx.$$

Derivamos E respecto a t ,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_U z_t z_{tt} + \underbrace{\nabla z \cdot \nabla z_t}_{\sum_{i=1}^n z_{x_i} z_{x_i t}} dx \\ &\stackrel{IPP}{=} \int_U (z_t z_{tt} - z_t \Delta z) dx \\ &= \int_U z_t (z_{tt} - \Delta z) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, $E(t) = E(0) = 0$. □

En $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_a^b (z_t z_{tt} + z_x z_{xt}) dx \\ &= \int_a^b (z_t z_{tt} - z_{xx} z_t) dx + \underbrace{z_t z_x \Big|_a^b}_{=0} \\ &= \int_a^b z_t [z_{tt} - z_{xx}] dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

14.2 Ecuacione de Euler

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{zz} & = 0, \quad 0 < z < h_0 + \eta(x, t) \\ \phi_z & = 0, \quad z = 0 \\ \eta_t + \eta_x \phi_x & = \phi_z, \quad z = h_0 + \eta(x, t) \\ [\phi_t + \frac{1}{2}[\phi_x^2 + \phi_z^2]g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\eta_{xx}}{[1+\eta_x^2]^{3/2}}] & = 0, \quad z = h_0 + \eta(x, t). \end{cases}$$

1. $[h_0] = L$
2. $[\eta] = L$
3. $g = [L]/[T]^2$
4. $[\nabla\phi] = [L]/[T]$
5. $[\phi] = [L]^2/[T]$
6. $[\rho] = \text{densidad}$
7. $[\sigma] = \text{tensión superficial.}$

Consideremos las siguientes medidas características:

1. λ es la longitud horizontal
2. h_0 la longitud vertical
3. a la amplitud de la onda
4. c_0 velocidad
5. λ/c_0 tiene como unidad el tiempo.

Definimos entonces las variables

1. $x = \lambda\tilde{x}$
2. $z = h_0\tilde{z}$
3. $t = \frac{\lambda}{c_0}\tilde{t}$
4. $\eta(x, t) = a\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})$
5. $\phi(x, z, t) = \frac{ac_0\lambda}{h_0}\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}).$

Sustituyendo en las EDP,

$$\begin{aligned} 0 < z < h_0 + \eta(x, t) &\sim 0 < h_0\tilde{z} < h_0 + a\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) \\ &\sim 0 < \tilde{z} < 1 + \frac{a}{h_0}\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\
\phi &= \frac{ac_0\lambda}{h_0} \tilde{\phi} \\
\phi_x &= \frac{ac_0\lambda}{h_0} \tilde{\phi}_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{ac_0\lambda}{h_0} \frac{1}{\lambda} \tilde{\phi}_{\tilde{x}} \\
\phi_{xx} &= \frac{ac_0\lambda}{h_0} \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} \\
\phi_z &= \frac{ac_0\lambda}{h_0} \tilde{\phi}_{\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz} = \frac{ac_0\lambda}{h_0} \frac{1}{h_0} \tilde{\phi}_{\tilde{z}} \\
\phi_{zz} &= \frac{ac_0\lambda}{h_0} \frac{1}{h_0^2} \tilde{\phi}_{\tilde{z}\tilde{z}}.
\end{aligned}$$

Así, la EDP resulta, definiendo $\alpha = a/h_0$ y $\beta = h_0^2/\lambda^2$

$$\begin{aligned}
\phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\
\frac{ac_0\lambda}{h_0} \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{ac_0\lambda}{h_0} \frac{1}{h_0^2} \tilde{\phi}_{\tilde{z}\tilde{z}} &= 0 \\
\beta \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{z}\tilde{z}} &= 0, \quad 0 < \tilde{z} < 1 + \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}).
\end{aligned}$$

Consideremos ahora

$$\begin{cases} \beta \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0, \quad 0 < z < 1 + \alpha \eta(x, t) \\ \phi_z &= 0 \\ z &= 0 \\ \eta_t + \alpha \eta_x \phi_x &= \frac{1}{\beta} \phi_z, \quad z = 1 + \alpha \eta(x, t) \\ \phi_t + \frac{\alpha}{2} \left[\phi_x^2 + \frac{\rho}{\beta} \phi_z^2 \right] + \eta - \frac{B\beta\eta_{xx}}{[1+\alpha^2\beta\eta_x^2]^{3/2}} = 0, & z = 1 + \alpha \eta. \end{cases}$$

Proponemos

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n(x, t).$$

Entonces, reemplazando en la EDP,

$$\begin{aligned}
\beta \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \beta f_{nxx} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) f_n z^{n-2} &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} [\beta f_{nxx} + (n+2)(n+1) f_{n+2}] z^n &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\beta f_{nxx} + (n+2)(n+1) f_{n+2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O sea,

$$f_{n+2} = -\frac{\beta}{(n+2)(n+1)} f_{nxx}(x, t).$$

Concluimos por inducción que

$$f_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \beta^n \partial_x^{2n} f_0(x, t)$$

$$f_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^n \partial_x^{2n} f_1(x, t).$$

Así, el potencial de la velocidad es

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \beta^n \partial_x^{2n} f_0(x, t) z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^n \partial_x^{2n} f_1(x, t) z^{2n+1}.$$

Como $\phi_z = 0$, $f_1 = \dots = f_{2n+1} = 0$ para todo n . Luego,

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= f_0(x, t) - \frac{\beta}{2} f_{0xx} z^2 + \frac{\beta^2}{4!} f_{0xxxx} z^4 + \mathcal{O}(\beta^3) \\ \phi_x(x, z, t) &= f_{0x}(x, t) - \frac{\beta}{2} f_{0xxx} z^2 + \frac{\beta^2}{4!} f_{0xxxxx} z^4 + \mathcal{O}(\beta^3) \\ \phi_t(x, z, t) &= f_{0t}(x, t) - \frac{\beta}{2} f_{0xxt} z^2 + \frac{\beta^2}{4!} f_{0xxxxt} z^4 + \mathcal{O}(\beta^3) \\ \phi_z(x, z, t) &= -\beta f_{0xx} z + \frac{\beta^2}{3!} f_{0xxx} z^3 + \mathcal{O}(\beta^3) \\ \eta_t + \alpha \eta_x \phi_x - \frac{\phi_z}{\beta} &= 0, \quad z = 1 + \alpha \eta(x, t).\end{aligned}$$

Así, llegamos a

$$\begin{aligned}\eta_t + \alpha \eta_x [f_{0x} + \mathcal{O}(\beta)] - \frac{1}{\beta} \left[-\beta f_{0xx} (1 + \alpha \eta) + \frac{\beta^2}{6} f_{0xxxx} (1 + \alpha \eta)^3 + \mathcal{O}(\beta^3) \right] &= \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2) \\ \eta_t + f_{0xx} + \alpha [\eta_x f_{0x} + \eta f_{0xxx}] - \frac{\beta}{6} f_{0xxxx} &= \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2) \\ \eta_t + f_{0xx} + \alpha (\eta f_{0x})_x - \frac{\beta}{6} f_{0xxxx} &= \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2).\end{aligned}$$

Como precisamos $\alpha^2 \beta$, tenemos

$$\phi_t + \frac{\alpha}{2} \phi_x^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \phi_z^2 + \eta - B\beta \eta_{xx} = \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2).$$

Reemplazando con la serie,

$$f_{0t} - \frac{\beta}{2} f_{0xxt} (1 + \alpha \eta)^2 + \frac{\alpha}{2} [f_{0x} + \mathcal{O}(\beta)]^2 + \frac{\alpha}{2\beta} [-\beta f_{0xx} (1 + \alpha \eta) + \mathcal{O}(\beta^2)]^2 + \eta - B\beta \eta_{xx} = \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2).$$

Esto es,

$$f_{0t} + \eta + \alpha \left[\frac{1}{2} f_{0x}^2 \right] + \beta \left[-\frac{1}{2} f_{0xxt} - B\eta_{xx} \right] = \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2).$$

Sea $u = f_{0x}$. Entonces, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\eta_t + u_x + \alpha (\eta u)_x - \frac{\beta}{6} u_{xxx} &= \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2). \\ u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \frac{\beta}{2} u_{xxt} - \beta B \eta_{xxx} &= \mathcal{O}(\alpha \beta, \beta^2).\end{aligned}$$

En $\mathcal{O}(1)$,

$$\begin{aligned}\eta_t + u_x &= 0 \\ u_t + \eta_x &= 0\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}\eta_{tt} - \eta_{xx} &= 0 \\ u_{tt} - u_{xx} &= 0.\end{aligned}$$

Buscamos

$$u = \eta + \alpha P(x, t) + \beta Q(x, t).$$

Entonces,

$$\eta_t + \eta_x + \alpha P_x + \beta Q_x + \alpha(\eta(\eta + \mathcal{O}(\alpha, \beta)))_x - \frac{\beta}{6}(\eta + \mathcal{O}(\alpha, \beta))_{xxx} = \mathcal{O}(\alpha\beta, \beta^2, \alpha^2).$$

Así,

$$\begin{aligned}\eta_t + \eta_x + \alpha P_x + \beta Q_x + \alpha(\eta^2)_x - \frac{\beta}{6}\eta_{xxx} &= \mathcal{O}(\alpha\beta, \beta^2, \alpha^2) \\ \eta_x + \eta_x + \alpha[P_x + 2\eta\eta_x] + \beta\left[Q_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}\right] &= \mathcal{O}(\alpha\beta, \beta^2, \alpha^2).\end{aligned}$$

Para la segunda ecuación, tenemos

$$u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \frac{\beta}{2}u_{xxt} - \beta B\eta_{xxx} = \mathcal{O}(\alpha\beta, \beta^2).$$

Esto es,

$$\eta_t + \eta_x + \alpha[P_t + \eta\eta_x] + \beta\left[Q_t + \frac{1}{2}\eta_{xxx} - B\eta_{xxx}\right] = \mathcal{O}(\alpha\beta, \beta^2, \alpha^2).$$

Imponiendo las condiciones de compatibilidad,

$$\begin{aligned}P_x + 2\eta\eta_x &= P_t + \eta\eta_x \\ Q_x &= \frac{1}{6}\eta_{xxx} = Q_t + \frac{1}{2}\eta_{xxx} - B\eta_{xxx}.\end{aligned}$$

Utilizando que $P_t = -P_x$ y $Q_t = -Q_x$,

$$\begin{aligned}2P_x &= -\eta\eta_x = -\frac{1}{2}(\eta^2)_x \\ P &= -\frac{1}{4}\eta^2.\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que tener

$$Q_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = -Q_x + \frac{1}{2}\eta_{xxx} - B\eta_{xxx} \implies 2Q_x = \left[\frac{2}{3} - B\right]\eta_{xxx}.$$

Por ende,

$$Q = \frac{1}{3}\eta_{xx} - \frac{B}{2}\eta_{xx}.$$

15 Clase 15

15.1 Principio de Duhamel

Consideramos la siguiente EDP

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_x u &= \omega(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Notamos que la solución de esta EDP es de la forma

$$u(x, t) = u_n(x, t) + v(x, t)$$

donde u_n es solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

y la $v(x, t)$ es una solución particular de

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 \Delta v &= w(x, t) \\ v(x, 0) &= 0 \\ v_t(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Principio de Duhamel: la solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 \Delta v &= f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \\ v(x, 0) &= 0 \\ v_t(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

es

$$v(x, t) = \int_0^t \tilde{v}(x, s, t) ds,$$

donde $\tilde{v}$ es solución de

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt} - c^2 \Delta \tilde{v} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{y } t > s \\ \tilde{v}(x, s, s) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \tilde{v}_t(x, s, s) &= f(x, s). \end{cases}$$

Proof. Tenemos que

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \tilde{v}(x, t, t) + \int_0^t \tilde{v}_t(x, t, s) ds \\ &= \int_0^t \tilde{v}_t(x, t, s) ds. \end{aligned}$$

Como $v(x, 0) = 0$, basta demostrar que

$$v_{tt} - c^2 \Delta v = 0.$$

Simplemente

$$\begin{aligned}
v_{tt}(x, t) &= \tilde{v}_t(x, t, t) + \int_0^t \tilde{v}_{tt}(x, t, s) ds \\
&= f(x, t) + \int_0^t c^2 \Delta \tilde{v}(x, t, s) ds \\
&= f(x, t) + c^2 \Delta \int_0^t \tilde{v}(x, t, s) ds \\
&= f(x, t) + c^2 \Delta v(x, t).
\end{aligned}$$

□

Observación 17. Defina $\tilde{v}(x, s, t) = V(x, t - s, s)$, entonces

$$v(x, t) = \int_0^t V(x, t - s, s) ds.$$

Es fácil ver que V resuelve $V_{tt} - c^2 \Delta V = 0$. Luego, el problema en V se escribe

$$\begin{cases} V_{tt} - c^2 \Delta V &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \\ V(x, 0, s) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ V_t(x, 0, s) &= f(x, s), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ejercicio 1. Determine la solución para $n = 3$ de

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u &= \omega(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{cases}$$

Solución: $u(x, t) = u_n(x, t) + v(x, t)$, donde

$$\begin{aligned}
u_n(x, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} t g(y) + f(y) + \nabla f(y)(y-x) dS_y \\
v(x, t) &= \int_0^t V(x, t-s, s) ds
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{tt} - c^2 \Delta V &= 0 \\
V(x, 0, s) &= 0 \\
V_t(x, 0, s) &= \omega(x, s).
\end{aligned}$$

Así,

$$V(x, t, s) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} t \omega(y, s) dS_y = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} \omega(y, s) dS_y.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
v(x, t) &= \int_0^t V(x, t-s, s) ds \\
&= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \left[\frac{1}{t-s} \int_{|y-x|=c(t-s)} \omega(y, s) dS_y \right] ds.
\end{aligned}$$

De este forma, el valor de v en el punto $(\bar{x}, T)$ depende del valor del forzante en los puntos (y, s) tales que

$$|y - \bar{x}| = c(T - s)$$

Observación 18. En $n = 2$,

$$u_n(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| < ct} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy + \partial_t \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x|=ct} \frac{f(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right]$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{|y-x| < c(t-s)} \frac{\omega(y, s)}{\sqrt{c^2 (t-s)^2 - |y-x|^2}} dy ds.$$

16 Clase 16

16.1 La ecuación de Laplace

De acuerdo con [de Magalhães Iório \(2007\)](#), el problema de Dirichlet en un rectángulo:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(a, y) &= f(y) \\ u(x, 0) &= u(x, b) = 0 \\ u(0, y) &= 0\end{aligned}$$

donde Ω es el interior de un rectángulo $[0, a] \times [0, b]$. Buscamos

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Así,

$$\begin{aligned}X''Y + XY'' &= 0 \\ \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = \lambda.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}X'' - \lambda X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ Y'' + \lambda Y &= 0 \\ Y(0) = 0 &= Y(b).\end{aligned}$$

El problema tiene solución no trivial si $\lambda > 0$, y en este caso,

$$\begin{aligned}Y(y) &= A \cos(\sqrt{\lambda}y) + B \sin(\sqrt{\lambda}y) \\ 0 &= Y(0) = A \\ 0 &= Y(b) = B \sin(\sqrt{\lambda}b) \\ \lambda &= \frac{n^2\pi^2}{b^2}.\end{aligned}$$

Así,

$$Y_n(y) = B_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Por otro lado,

$$X_n(x) = A_n e^{\sqrt{\lambda_n}x} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n}x}.$$

Se sigue que

$$0 = X_n(0) = A_n + B_n \implies B_n = -A_n, \quad X_n(x) = 2A_n \left[\frac{e^{\sqrt{\lambda_n}x} - e^{-\sqrt{\lambda_n}x}}{2} \right] = 2A_n \sinh \left(\frac{n\pi}{b}x \right).$$

Luego,

$$u_n(x, y) = D_n \sinh \left(\frac{n\pi}{b}x \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right).$$

De ahí,

$$f(y) = u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Como $f(0) = 0$ por la condición de compatibilidad, podemos considerar su extensión impar en $(-b, b)$. Así,

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

De este modo,

$$b_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy.$$

Por lo tanto,

$$D_n = \frac{b_n}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}.$$

Finalmente,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Note que

$$\left| \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \right| \leq 1.$$

Observación 19. La serie es convergente si la serie de f es convergente. Para obtener una solución clásica podemos tomar $f \in C_{Per}^2[0, b]$ y $f''' \in SC_{Per}[0, b]$.

Observación 20. Es suficiente que $f \in C[0, b]$, y diferenciable en $(0, b)$ salvo un número finito de puntos con $f' \in SC[0, b]$ y $f(0) = f(b)$ implica

$$u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty((0, a) \times (0, b)).$$

El problema de Dirichlet en el disco unitario.

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) & \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 < 1\} \\ \Delta u & = 0 \\ u|_{\partial\Omega} & = f. \end{cases}$$

Es conveniente escribir el problema en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \Psi &: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \\ (\theta, r) &\rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Así, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\tan \theta = y/x$ para $x \neq 0$. Haciendo $v(r, \theta) = u(x, y)$, tenemos

$$u_x = v_r r_x + v_\theta \theta_x$$

$$u_y = v_r r_y + v_\theta \theta_y$$

$$u_{xx} = \dots$$

$$u_{yy} = \dots$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0$$

$$f(\cos \theta, \sin \theta) = g(\theta).$$

Teorema 15. Si $v(r, \theta)$ es definida por

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] r^n.$$

Defina

$$u(x, y) = \begin{cases} v(r, \theta) & \text{si } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 \leq r < 1 \\ f(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Definición 16.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y limitado. Decimos que ∂U es de clase C^k si para cada punto $x^* \in \partial U$, existe $r > 0$ y una aplicación C^k , $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$U \cap B(x^*, r) = \{x \in B(x^*, r) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Notación 3. Si ∂U es C^1 , entonces sobre ∂U definimos al vector normal unitario $\nu = (\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^n)$.

Definición 16.2. Si $u \in C^1(\overline{U})$, decimos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u$$

es la derivada normal de u .

Teorema 16. Gauss. Suponga que $u \in C^1(\overline{U})$ y $\partial U \in C^{16}$. Entonces,

$$\int_U u_{x_i} dx = \int_{\partial U} u \nu^i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Teorema 17. Integración por partes. Sean $u, v \in C^1(\overline{U})$ y $\partial U \in C^1$, entonces

$$\int_U u_{x_i} v dx = - \int_U u v_{x_i} dx + \int_{\partial U} u v \nu^i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Teorema 18. Green. Sean $u, v \in C^2(\overline{U})$ y $\partial U \in C^1$

1. $\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$
2. $\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS$

16.2 Ecuación de Laplace en dimensiones más altas

Problema de Dirichlet. Dada una función $f \in C(\partial\Omega)$, encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \text{ en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= f. \end{cases}$$

Problema de Neumann. Dada una función $g \in C(\partial\Omega)$, encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

⁶Por partes basta.

Solución fundamental: vamos a buscar una solución a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. En $\mathbb{R}^2$ sabemos que el operador Δ es invariante por rotaciones (aplicación conforme). De esta forma, buscamos soluciones radiales

$$u(x) = v(r), \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(r)r_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i} &= v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\frac{r - x_i \frac{x_i}{r}}{r^2} \\ &= v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n \left[v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \right] = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r).$$

Por lo tanto,

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Para $n = 2$,

$$v(r) = b \ln r + c.$$

Para $n > 2$,

$$v(r) = \frac{b}{r^{n-2}} + c.$$

De esta forma,

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & \text{si } n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

Definición 16.3. La función

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n |x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y

$$\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

es solución fundamental a la ecuación de Laplace

Ejercicio 2. Se cumple que $|\nabla \Phi| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}$ y $|\nabla^2 \Phi| \leq \frac{C}{|x|^n}$, $x \neq 0$.

Por construcción $x \rightarrow \Phi(x)$ es armónica para $x \neq 0$. Así, $x \rightarrow \Phi(x - y)$ es armónica en $\mathbb{R}^n - \{y\}$ para $y \in \mathbb{R}^n$. Así, $x \rightarrow \Phi(x - y)f(y)$ también es una función armónica.

$$u(x) = \Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x - y)dy$$

para resolver $\Delta u = 0$. Sin embargo, $D^2 \Phi(x - y)$ no es integrable cerca a $y = x$.

Teorema 19. Solución de Poisson. Sea $u(x) = \Phi * f(x)$ y $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

1. $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$
2. $-\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$.

Proof. Primero queremos obtener u_{x_i} . Tomamos

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} dy, \quad h \neq 0,$$

para $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Pero,

$$\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y).$$

Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \left(\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| < \epsilon.$$

De esta forma,

$$\left| \Phi(y) \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right| < \epsilon |\Phi(y)|, \quad |h| < \delta.$$

Queremos utilizar el teorema de la convergencia dominada. Para esto debemos demostrar que $|\Phi(y)|$ es integrable en $B(0, R)$

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R)} |\Phi(y)| dy &= \int_0^R \int_{\partial B(0, r)} |\Phi(y)| dS dr \\ &= \begin{cases} \int_0^R -\frac{1}{2\pi} \ln r 2\pi r dr & \text{si } n = 2 \\ \int_0^R \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\alpha_n}{n} r^{n-1} dr & \text{caso contrario} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{R^2}{2} \ln R - \frac{R^2}{4} & \\ CR^2 & \text{caso contrario.} \end{cases} < \infty. \end{aligned}$$

Luego,

$$u_{x_i x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) dy.$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ es uniformemente continua, dado $\tilde{\epsilon} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $|hv| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y + vy) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) \right| < \tilde{\epsilon}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x - y + vy) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y + vy) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) \right| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(y)| \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y + vy) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) \right| dy \\ &\leq \tilde{\epsilon} \int_K |\Phi(y)| dy. \end{aligned}$$

Tomando $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \int_K |\Phi(y)| dy$, concluimos (1). Para (2)

$$\begin{aligned}\Delta u &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}I_\varepsilon &\leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \cdot |\Delta_x f(x-y)| dy \\ &\leq C \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| dy \\ &= C_1 \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(0,\rho)} |\Phi(y)| dS d\rho \\ &\leq C_2 \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(0,\rho)} \frac{1}{\rho^{n-2}} dS d\rho \\ &= C_2 \int_0^\varepsilon \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-2}} d\rho = 0.\end{aligned}$$

Para J_ε ,

$$\begin{aligned}J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla f(x-y) dy + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS \\ &= L_\varepsilon + K_\varepsilon.\end{aligned}$$

Por un lado,

$$|K_\varepsilon| \leq \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) \right| dS \leq C \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| dS \rightarrow 0.$$

Respecto a L_ε , aplicando el Teorema 18 y considerando $n \geq 3$

$$\begin{aligned}L_\varepsilon &= - \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla f(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} f(x-y) \Delta \Phi(y) dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) dS \\ &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \nabla \Phi(y) \cdot \left(\frac{-y}{|y|} \right) dS \\ &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{2-n}{|y|^{n-1}} \frac{y}{|y|} \cdot \frac{-y}{|y|} dS \\ &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \frac{1}{n\alpha_n \varepsilon^{n-1}} dS \\ &= -f(x).\end{aligned}$$

□

17 Clase 17

Teorema 20. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in C^2(U)$ armónica ($\Delta u = 0$). Entonces,

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dS_y,$$

para toda bola $B(x, r) \subset U$.

Proof. Defina para $x \in U$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y \\ &= \frac{1}{n\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + r\xi) r^{n-1} dS_\xi \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + r\xi) dS_\xi. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + r\xi) \cdot \xi dS_\xi \\ &= \frac{r^{n-1}}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y - x}{r} \right) dS_y \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS_y \\ &= \frac{r}{n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es constante y

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} u(y) dS_y = u(x).$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy &= \frac{1}{\alpha_n r^n} \int_{B(x, r)} u(y) dy \\ &= \frac{1}{\alpha_n r^n} \int_0^r \int_{\partial B(x, \rho)} u(y) dS_y d\rho \\ &= \frac{1}{\alpha_n r^n} \int_0^r n\alpha_n \rho^{n-1} u(x) d\rho \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Con esto concluimos. □

Teorema 21. Sea $u \in C^2(U)$ al que $u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y$ para toda bola $B(x, r) \subset U$. Entonces, u es armónica. Es decir, $\Delta u = 0$ en U .

Proof. Supongamos que $\Delta u \neq 0$ en U . Entonces, existen $x \in U$ y $\epsilon > 0$ tales que $\Delta u \neq 0$ en $B(x, \epsilon)$. Así, digamos $\Delta u > 0$ en $B(x, \epsilon)$. Definamos $\phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + r\xi) dS_\xi = u(x)$. Luego, derivando respecto a r ,

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'(r) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + r\xi) \cdot \xi dS_\xi \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS_y \\ &= \frac{1}{n\alpha_n r^{n-1}} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dS_y > 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 22. Principio del módulo máximo. Suponga $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ armónica en U .

1. Si U es conexo y existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u(x)$, entonces $u = u(x_0)$ en U .
2. $\max_{x \in \bar{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$ y $\min_{x \in \bar{U}} u(x) = \min_{x \in \partial U} u(x)$.

Proof. Sea $M = u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u(x)$. Por la propiedad de la media (teorema 20),

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} u(y) dy \leq M.$$

Entonces, $u = u(x_0)$ en $B(x_0, r)$, pues, caso contrario, tendríamos $u(\tilde{x}_0) < u(x_0)$ en $\tilde{B}(\tilde{x}_0, \tilde{r}) \subset B(x_0, r)$ (por continuidad de u) y así,

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} u(y) dy < M.$$

Considere $X = \{x \in U : u(x) = M\}$, por la continuidad de u X es cerrado. Por lo anterior, X es abierto. Así, $X = U$. Para (2), supongamos que el máximo no ocurre en ∂U . Entonces, existe $x_0 \in U^\circ$ tal que $\max_{x \in \bar{U}} u(x) = u(x_0)$. Luego, $u = u(x_0)$ en la componente conexa C_{x_0} conteniendo a x_0 . Siendo C_{x_0} cerrado, tenemos $\partial C_{x_0} \subset \partial U$ ⁷. Luego, existe $\tilde{x}_0 \in \partial U$ tal que $u(\tilde{x}_0) = u(x_0)$. □

Corolario 5. Unicidad. Sea $g \in C(\partial U)$ y $f \in C(U)$. Existe entonces máximo una solución $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ del problem de contorno:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \text{ en } U \\ u|_{\partial U} &= g. \end{cases}$$

Proof. Si u y $\bar{u}$ son soluciones en $C^2(U) \cap C(\bar{U})$, entonces $\omega^\pm = \pm(u - \bar{u})$ es solución de

$$\begin{cases} -\Delta \omega &= 0, \text{ en } U \\ \omega|_{\partial U} &= 0. \end{cases}$$

Se sigue del principio del máximo que $\omega = 0$. □

⁷Caso contrario, existe $\bar{x}_0 \in \partial C_{x_0} - \partial U$. Por la propiedad de la media, $u(x_0) = u(\bar{x}_0) = \frac{1}{|B(\bar{x}_0, r)|} \int_{B(\bar{x}_0, r)} u(y) dy \leq u(\bar{x}_0)$. Así, $u = u(x_0)$ en $C_{x_0} \cup B(\bar{x}_0, r)$, lo que contradice que C_{x_0} es una componente conexa.

Teorema 23. Suavedad. Si $u \in C(U)$ cumple la propiedad de la media,

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy$$

para cada $B(x, r) \subset U$, entonces $u \in C^\infty(U)$.

Teorema 24. Principio del máximo. Sea $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ y suponga que $\Delta u \geq 0$ en U . Entonces, $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$.

Proof. Inicialmente, supongamos que $\Delta u > 0$. Si existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{U \cup \partial U} u(x)$, esto implica que

$$\nabla u(x_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x_0) \leq 0.$$

En consecuencia, tenemos $\Delta u(x_0) \leq 0$, lo cual es una contradicción. Ahora consideremos el caso $\Delta u \geq 0$. Defina

$$u^\epsilon(x) = u(x) + \epsilon e^{x_1}.$$

Entonces,

$$\Delta u^\epsilon = \Delta u + \epsilon e^{x_1} > 0.$$

Luego,

$$\max_{x \in \bar{U}} (u + \epsilon e^{x_1}) = \max_{x \in \partial U} (u + \epsilon e^{x_1}).$$

Ahora,

$$\max_{x \in \bar{U}} u + \epsilon \min_{x \in \bar{U}} e^{x_1} \leq \max_{x \in \bar{U}} u + \epsilon \max_{x \in \bar{U}} e^{x_1}.$$

Luego, para $\epsilon \rightarrow 0$, $\max_{x \in \bar{U}} u(x) \leq \max_{x \in \partial U} u(x)$. La otra desigualdad es inmediata y concluimos. $\square$

Observación 21. La hipótesis de U acotado es importante. Considere $U = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ y $u(x_1, x_2) = x_2$. Entonces, no cumple el principio del máximo.

18 Clase 18

El problema de Dirichlet

Teorema 25. Sea $u \in C^2(\overline{U})$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto limitado que cumple las condiciones del teorema de la divergencia. Entonces,

$$u(x) = - \int_U K(x, y) \Delta u dy + \int_{\partial U} K(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial K}{\partial \nu}(x, y) dS,$$

donde $K(x, y) = \Phi(y - x)$ y⁸

$$\begin{cases} \Delta u &= -f, \text{ en } U \\ u &= g \text{ sobre } \partial U. \end{cases}$$

Observación 22. Recordemos que

$$\Phi(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |y| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{|y|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Definición 18.1. Función de Green. La función de Green para una región U es $G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi^x(y)$ con $x, y \in U$, $x \neq y$, donde

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x &= 0 \\ \Phi^x &= \Phi(y - x) \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta G &= 0 \\ G &= 0, \text{ sobre } \partial U \end{cases}$$

Observación 23. En particular, si $\Delta u = 0$, entonces

$$u(x) = \int_{\partial U} G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu} dS.$$

Definición 18.2. Función de Green en el semi-espacio. Sea $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, \dots, x_n), x_n > 0\}$. Entonces, queremos

$$\begin{aligned} \Delta G &= 0 \text{ sobre } U \\ G &= 0 \text{ sobre } \partial U. \end{aligned}$$

Consideremos

$$\Phi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x}), \text{ donde } \tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, -x_n)$$

y

$$G(x, y) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) - \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_n + x_n).$$

Notemos que

$$u(x) = - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu} dS.$$

⁸Este es el problema de Dirichlet, de Neumann es cuando $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial U} = g$.

Dado el conjunto que hemos considerado, solo nos interesa calcular $\frac{\partial G}{\partial y_n}$. Para $n \geq 3$,

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}) = \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{|y - x|^{n-2}} - \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{|y - \tilde{x}|^{n-2}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_n} &= \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \left[\frac{2-n}{|y-x|^{n-1}} \frac{y_n - x_n}{|y-x|} - \frac{2-n}{|y-\tilde{x}|^{n-1}} \frac{y_n - \tilde{x}_n}{|y-\tilde{x}|} \right] \\ &= \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \left[\frac{(2-n)(y_n - x_n)}{|y-x|^n} - \frac{(2-n)(y_n + x_n)}{|y-\tilde{x}_n|^n} \right] \\ &= \frac{2-n}{n(n-2)\alpha_n} \left[-\frac{2x_n}{|y-x|^n} \right] \\ &= \frac{2x_n}{n\alpha_n|y-x|^n}. \end{aligned}$$

Así,

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha_n} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|y-x|^n} dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial\mathbb{R}_+^n. \quad (11)$$

Teorema 26. Fórmula de Poisson. Suponga $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ y defina u por (11). Entonces,

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$
2. $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}_+^n$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0)$ para todo $x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$ y $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Observación 24.

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = 1,$$

donde $K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha_n} \frac{1}{|y-x|^n}$. Como

$$|y-x|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2 + x_n^2 = r^2 + \xi^2,$$

dado que $dy = r^{n-2} dr dS_y$,

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = \frac{2x_n}{n\alpha_n} \int_0^\infty \int_{S^{n-2}} \frac{r^{n-2}}{[r^2 + x_n^2]^{n/2}} dr dS_y = 1.$$

Proof. $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ y $\Delta u = 0$ por un procedimiento estándar. Luego,

$$|u(x)| \leq \|g\|_{L^\infty} \frac{2x_n}{n\alpha_n} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{|y-x|^n} dy < \infty.$$

Como

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = 1,$$

se sigue el resultado de que u es acotada. Luego,

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) g(y) dy - g(x_0) \right| \\
&= \left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) (g(y) - g(x_0)) dy \right| \\
&\leq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dy \\
&= \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \cap B(x_0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dy + \int_{\partial \mathbb{R}_+^n - B(x_0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dy \\
&= I + J
\end{aligned}$$

Entonces, escogemos $\delta > 0$ tal que $|y - x_0| < \delta$ de forma que $|g(y) - g(x_0)| < \epsilon$. Así,

$$I \leq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \cap B(x_0, \delta)} K(x, y) \epsilon dy \leq \epsilon.$$

Para J ,

$$\begin{aligned}
J &\leq 2 \|g\|_{L^\infty} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n - B(x_0, \delta)} K(x, y) dy \\
&= \frac{4 \|g\|_{L^\infty}}{n \alpha_n} x_n \int_{\partial \mathbb{R}_+^n - B(x_0, \delta)} \frac{1}{|y - x|} dy
\end{aligned}$$

Tomando $|y - x_0| > \delta$ y $|x - x_0| < \delta/2$, y usando que

$$\begin{aligned}
|y - x_0| &\leq |y - x| + |x - x_0| \\
&\leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \\
&\leq |y - x| + \frac{|y - x_0|}{2} \\
\frac{|y - x_0|}{2} &\leq |y - x|,
\end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|y - x|} &\leq \frac{2}{|y - x_0|} \\
J &\leq \frac{4 \|g\|_{L^\infty}}{n \alpha_n} x_n \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{2^n}{|y - x_0|^n} dy \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 27. Unicidad de solución del problema de Dirichlet por el método de energía. Si el problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \text{ en } U \\ u &= g \text{ sobre } \partial U \end{cases}$$

tiene solución $u \in C^2(U)$, entonces ella es única.

Proof. Suponga que $u, v \in C^2(U)$ solución del problema. Entonces, $\omega = u - v$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta\omega &= 0 \\ \omega &= 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$0 = \int_U \omega \Delta\omega = - \int_U (\nabla\omega \cdot \nabla\omega) dx + \int_{\partial U} \omega \frac{\partial\omega}{\partial\nu} dS.$$

Así, $|\nabla\omega|^2 = 0$. O sea, ω es constante. Como $\omega|_{\partial U} = 0$, tenemos que $\omega = 0$. $\square$

La función de Green para la esfera unitaria

Definición 18.3. Si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, definimos el punto $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$ es dicho el punto dual de x . Recordemos que la función correctora Φ^x debe cumplir

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x &= 0, \text{ en } B(0, 1) \\ \Phi^x &= \Phi(x - y), \text{ sobre } \partial B(0, 1). \end{cases}$$

Defina $\Phi^x(y) = \Phi(|x| \cdot (y - \tilde{x}))$. Tenemos que $\Delta\Phi^x = 0$ en $B(0, 1)$. Vamos a ver que $\Phi^x(y) = \Phi(y - x)$ sobre $\partial B(0, 1)$:

$$|x|^2|y - \tilde{x}|^2 = |x|^2(|y|^2 - 2y\tilde{x} + |\tilde{x}|^2) = |y - x|^2.$$

O sea, $|x| \cdot |y - \tilde{x}| = |y - x|$ sobre $\partial B(0, 1)$.

19 Clase 19

En este caso (esfera), el candidato a solución es

$$u(x) = - \int_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS_y.$$

Debemos determinar $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ sobre $\partial B(0, 1)$, donde

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x})), \quad \Phi(y - x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{|x + y|^{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_i} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi(|x|(y - \tilde{x})) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} &= \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{2-n}{|y-x|^{n-1}} \frac{y_i - x_i}{|y-x|} \\ &= \frac{1}{n\alpha_n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(|x|(y - \tilde{x})) &= -\frac{1}{n\alpha_n} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x|^n|y - \tilde{x}|^n} \\ &= -\frac{1}{n\alpha_n} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|y-x|^n}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) \\ &= -\frac{1}{n\alpha_n|y-x|^n} \sum_{i=1}^n y_i [(y_i x_i) - y_i |x|^2 + x_i] \\ &= -\frac{1}{n\alpha_n|y-x|^n} \sum_{i=1}^n [y_i^2 - y_i^2 |x|^2] \\ &= -\frac{1}{n\alpha_n|y-x|^n} (|y|^2 - |y|^2 |x|^2) \\ &= -\frac{1}{n\alpha_n|y-x|^n} |y|^2 (1 - |x|^2). \end{aligned}$$

Así, obtenemos el candidato a solución

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS_y.$$

Ahora considere el problema

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \text{ en } B(0, r) \\ u &= g, \text{ sobre } \partial B(0, r) \end{cases}$$

para $r > 0$. Entonces $\tilde{u} = u(rx)$ y $\tilde{g}(rx)$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} &= 0 \text{ en } B(0, 1) \\ \tilde{u} &= \tilde{g} \text{ sobre } \partial B(0, 1). \end{cases}$$

Luego, $u(x) = \tilde{u}(x/r)$. Así,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1 - \frac{|x|^2}{r^2}}{n\alpha_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(ry)}{|x - ry|^n} r^n dS_y \\ &= \frac{r^2 - |x|^2}{r^2 n\alpha_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(ry)}{|x - ry|^n} r^n dS_y \\ &= \frac{r^2 - |x|^2}{rn\alpha_n} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(\xi)}{|x - \xi|^n} dS_\xi \end{aligned}$$

con $\xi = ry$.

Teorema 28. Suponga $g \in C(\partial B(0, r))$ y sea

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{rn\alpha_n} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(\xi)}{|x - \xi|^n} dS_\xi.$$

Entonces,

1. $u \in C^\infty(B^*(0, r))$.
2. $\Delta u = 0$ en $B^*(0, r)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0)$ para cada $x_0 \in \partial B(0, r)$ y $x \in B^\circ(0, r)$.

Función de Green en el semi-espacio

Definición 19.1. Definimos

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}.$$

Definición 19.2. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, la reflexión sobre el hiperplano $\partial \mathbb{R}_+^n$ es el punto $x^* = (x_1, x_2, \dots, -x_n)$.

Consideremos $\Phi_y^x(y) = \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_n + x_n)$. Se cumple que

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x(y) &= 0, \text{ en } \mathbb{R}_+^n \\ \Phi^x(y) &= \Phi(y - x), \text{ sobre } \partial \mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

La idea es que Φ^x refleja la singularidad $x \in \mathbb{R}_+^n$ hacia $x^* \notin \mathbb{R}_+^n$.

Definición 19.3. La función de Green en el semi-espacio $\mathbb{R}_+^n$ es

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - x^*).$$

20 Clase 20

Ecuación del Calor

$$u_t - \Delta u = 0, \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \quad (12)$$

Si $u(x, t)$ es solución de (12), entonces

$$v(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

también lo es. En efecto,

$$\begin{aligned} v_t &= \lambda^2 u_t \\ v_{x_i} &= \lambda u_{x_i} \\ v_{x_i x_i} &= \lambda^2 u_{x_i x_i}. \end{aligned}$$

Por ende,

$$v_t - \Delta v = \lambda^2 [u_t - \Delta u] = 0.$$

Observación 25. Podemos buscar una solución usando

$$u(x, t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right), \quad r = |x|, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto, usando $\lambda = |x|/t$, conseguimos escribir $u(x, t) = u(f(x, t), f(x, t))$.

Es conveniente suponer

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Tomamos $y = x/t^\beta$, con lo cual $u(x, t) = v(y)/t^\alpha$. Así,

$$\begin{aligned} u_t &= -\alpha t^{-\alpha-1} v(y) + t^{-\alpha} \nabla v(y) \cdot [-\beta t^{-\beta-1} x] \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} v(y) - \beta t^{-\alpha-1} \nabla v(y) \frac{x}{t^\beta} \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} v(y) - \beta t^{-\alpha-1} \nabla v(y) \cdot y \\ u_{x_i} &= t^{-\alpha} v_{y_i} t^{-\beta} \\ &= t^{-\alpha-\beta} v_{y_i} \\ u_{x_i x_i} &= t^{-\alpha-2\beta} v_{y_i y_i} \\ \Delta u &= t^{-\alpha-2\beta} \Delta v \\ u_t - \Delta u = 0 &\implies \alpha t^{-\alpha-1} v(y) + \beta t^{-\alpha-1} \nabla v(y) \cdot y - t^{-\alpha-2\beta} \Delta v(y) = 0. \end{aligned}$$

Tomando $\beta = 1/2$, obtenemos

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y) = 0. \quad (13)$$

Ahora, asumimos que $v(y) = w(r)$ con $r = |y|$. Entonces,

$$v_{y_i} = w'(r) r_{y_i} = w'(r) \frac{y_i}{r}.$$

Entonces, $\nabla v(y) = w'(r)\frac{y}{r}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} v_{y_i y_i} &= w''(r)\frac{y_i^2}{r^2} + w'(r)\frac{r - y_i\frac{y_i}{r}}{r^2} \\ &= w''(r)\frac{y_i^2}{r^2} + w'(r)\left[\frac{1}{r} - \frac{y_i^2}{r^3}\right]. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\Delta v = w''(r) + w'(r)\left[\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right].$$

Entonces, reemplazando en (13)

$$\alpha w + \frac{1}{2}rw' + w'' + \frac{n-1}{n}w' = 0.$$

Al multiplicar por r^{n-1} ,

$$\alpha r^{n-1}w + \frac{1}{2}r^n w' + \underbrace{r^{n-1}w'' + (n-1)r^{n-2}w'}_{(r^{n-1}w)'} = 0.$$

Tomando $\alpha = n/2$, nos queda

$$(r^{n-1}w')' + \frac{1}{2}(r'w)' = 0.$$

Integrando,

$$r^{n-1}w' + \frac{1}{2}r^n w = a.$$

Si $a = 0$ (factible si $w, w' \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$),

$$w' = -\frac{1}{2}rw.$$

O sea,

$$w = be^{-r^2/4}.$$

De este modo, usando que $r = |y| = |x/\sqrt{t}|$,

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha}v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = \frac{b}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},}$$

donde se hizo $\alpha = n/2$ y $\beta = 1/2$

Definición 20.1. La función

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, \ t < 0 \end{cases}$$

es la solución fundamental a la ecuación del calor.

Lema 6. Se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

Proof. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\
&\stackrel{z=x/2t^{1/2}}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} 2^n t^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i}_{\pi^{1/2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Ahora vamos a considerar el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \text{ sobre } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g \text{ sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

En el caso $n = 1$,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0 \text{ sobre } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x). \end{cases}$$

Usando Fourier,

$$\begin{cases} \hat{u}_t - (ik)^2 \hat{u} &= 0 \text{ sobre } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \hat{u}(k, 0) &= \hat{g}(k). \end{cases}$$

Así,

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{g}(k).$$

Por ende,

$$u(x, t) = F^{-1}\{e^{-k^2 t} \hat{g}(k)\} = K_t * g(x)$$

donde $\hat{K}_t(k) = e^{-k^2 t}$. Recordemos que $e^{-\hat{x}^2/2} = e^{-k^2/2}$.

Teorema 29. Problema de valor inicial. Sea $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y defiamos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy.$$

Entonces,

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
2. $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$
3. $\lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = g(x^0)$, para cualquier $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Proof. (1) Se sigue de que el núcleo del calor $t^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$ es C^∞ con derivadas uniformemente acotadas sobre $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ para todo $\delta > 0$. Luego,

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} [\Phi_t - \Delta_x \Phi](x - y, t) g(y) dy = 0.$$

Para (3), fijemos $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y escogemos $\delta > 0$ tal que

$$|y - x^0| < \delta \implies |g(y) - g(x^0)| < \varepsilon.$$

Por ende,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) [g(y) - g(x^0)] dy \right| \\ &\leq \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &= J + I. \end{aligned}$$

Luego,

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy = \varepsilon.$$

Si $|x - x^0| \leq \delta/2$ y $|y - x^0| \geq \delta$, entonces

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

Así, $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \delta/\sqrt{t})} e^{-\frac{|z|^2}{16}} dz \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, si es que $|x - x^0| < \delta/2$ y $t > 0$ es suficientemente chico, $|u(x, t) - g(x^0)| < 2\varepsilon$. $\square$

Observación 26. Para $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, no es suficiente para garantizar la unicidad de solución para el PVI.

Principio del máximo

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y limitado y $T > 0$ un tiempo positivo. Definamos el cilindro parabólico $U_T = U \times (0, T]$. La frontera de Γ_T de U_T es $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$ contiene $U \times \{t = T\}$.

Teorema 30. Si $u \in C^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$, entonces

1. Si $u_t - \Delta u \leq 0$ ⁹ en U_T implica $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.
2. Si $u_t - \Delta u \geq 0$ ¹⁰ en U_T $\min_{\bar{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u$.

Proof. Caso por caso:

1. **Caso 1:** inicialmente supongamos que $u_t - \Delta u < 0$ en U_T . Además, suponga que existe $(x_0, t_0) \in U_T$ con $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$. Si $0 < t_0 < T$ entonces (x_0, t_0) pertenece al interior de U_T . Consecuentemente $u_t(x_0, t_0) = 0$. Por otro lado, $u_{x_i x_j}(x_0, t_0) \leq 0$ (condición de segundo orden). Sin embargo, por hipótesis $u_t - \Delta u < 0$ en U_T . Por ende, en (x_0, t_0) tenemos $\Delta u > 0$: una contradicción. Ahora si $t_0 = T$, entonces $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ y $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0 \implies u_t(x_0, t_0) \geq 0$ lo que contradice la hipótesis $u_t - \Delta u < 0$ en U_T .
2. **Caso 2:** $u_t - \Delta u \leq 0$ en U_T . Defina $u^\epsilon(x, t) = u(x, t) - \epsilon t$, $\epsilon > 0$. Luego,

$$\max_{\bar{U}_T} u^\epsilon = \max_{\Gamma_T} u^\epsilon$$

$$\max_{\bar{U}_T} u - \epsilon T \leq \max_{U_T} u^\epsilon = \max_{\Gamma_T} u^\epsilon \leq \max_{\Gamma_T} u + \epsilon T.$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, concluimos.

□

Se ha seguido [Evans \(2010\)](#).

⁹Subsolución a la ecuación del calor.

¹⁰Supersolución.

21 Clase 21

Corolario 6. Unicidad en dominio limitado. Existe máximo una única solución $C^{2,1}(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ para el problema de valor inicial y de frontera

$$(*) : \begin{cases} u_t - \Delta u &= f \\ u &= g, \text{ sobre } \Gamma_T \end{cases}$$

con $f \in C(U_T)$ y $g \in C(\Gamma_T)$.

Proof. Suponga que $u, v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ soluciones de $*$ entonces $\omega = u - v$ es solución de

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta \omega &= 0, \text{ en } U_T \\ \omega &= 0, \text{ sobre } \Gamma_T. \end{cases}$$

Por el principio del máximo,

$$\max_{\bar{U}_T} \omega = \max_{\Gamma_T} \omega = 0$$

y

$$\min_{\bar{U}_T} \omega = \min_{\Gamma_T} \omega = 0$$

por lo que $\omega = 0$ sobre U_T . □

Teorema 31. Principio del máximo en $\mathbb{R}^n$. Suponga que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ cumple

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &\leq 0, \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u &= f, \text{ sobre } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

y existen constantes $M, a > 0$ tales que

$$u(x, t) \leq M e^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t, T$$

entonces

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} f.$$

Proof. Suponga que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Caso contrario, no hay nada que probar. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $4aT < 1$. Podemos dividir $[0, T]$ en sub-intervalos de longitud $1/4a$ y aplicamos el mismo argumento. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $a < \frac{1}{4(T+\varepsilon)}$. Fijando $y \in \mathbb{R}^n$ y $\mu > 0$, sea

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}. \quad (14)$$

El segundo término de (14) cumple la ecuación del calor¹¹. Luego,

$$v_t - \Delta v \leq 0.$$

Considere el cilindro $B_T = B_\rho(y) \times (0, T]$, con frontera $\Gamma_T = \bar{B}_T - B_T$. Entonces, por el principio del máximo para dominios limitados

$$v(y, rt) \leq \max_{\Gamma_T} v.$$

¹¹ $\omega(x, t) = \Phi(i(x - y), T + \varepsilon - t).$

La frontera Γ_T está compuesta por dos partes Γ_1 y Γ_2 , la tapa del cilindro inferior y los laterales. Sobre la tapa,

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}}.$$

Así, si $|x - y| = r$, $0 \leq t \leq T$, entonces

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq u(x, 0) = g(x).$$

Ahora bien, sobre la parte lateral, $|x - y| = \rho$. Por ende, como $|x| \leq \rho + |y|$

$$\begin{aligned} v(x, t) &\leq M e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{\rho^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq M e^{a(|y|+\rho)^2} - \frac{\mu}{4(T + \varepsilon)} e^{\frac{\rho^2}{4(T+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

Sea $\gamma > 0$ tal que $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$. Entonces,

$$v(x, t) \leq M e^{a(|y|+\rho)^2} - \mu(4(a + \gamma))^{n/2} e^{(a+\gamma)\rho^2}.$$

Tomando ρ suficientemente grande obtenemos que

$$v(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \Gamma_2.$$

Así,

$$v(x, t) \leq \max \left\{ \sup_{\mathbb{R}^n} g, 0 \right\}.$$

S.p.d.g. podemos suponer que $\sup_{\mathbb{R}^n} g \geq 0$ pues, caso contrario, podemos definir $\tilde{g} = g + c$, de modo que $\sup_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}$ y $u = \tilde{u} + c$. En consecuencia,

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g, \quad (x, t) \in B_T.$$

O sea,

$$u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Haciendo $\mu \rightarrow 0$, obtenemos el resultado. $\square$

Corolario 7. Dados $g \in C(\mathbb{R}^n)$. Entonces, existe máximo una solución $C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ del PVI

$$(**) : \begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u &= g, \text{ sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

satisfaciendo la condición

$$|u(x, t)| \leq A e^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad a, A > 0.$$

Proof. Suponga que $u, \tilde{u} \in C_1^2(\mathbb{R}^n, (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ soluciones de $(**)$ y sea $\omega^\pm = \pm(u - \tilde{u})$. Entonces, $\omega^\pm$ resuelve

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta \omega &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ \omega &= 0, \text{ sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Además, $|\pm \omega(x, t)| \leq 2Ae^{a|x|^2}$, luego, el resultado sigue del principio del máximo. $\square$

Proposición 13. Sea $u \in C_1^2(U_T)$ con $u_t - \Delta u = 0$ con $\partial U \in C^1$. Entonces, $u \in C^\infty(U_T)$.

Proof. Sea $v \in C_1^2(\bar{U}_T)$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{U_T} (u_t - \Delta u) v dx dt \\ &= \int_{U_T} u_t v dx dt - \int_{U_T} v \Delta u dx dt \\ &= \int_U uv|_0^T dx - \int_{U_T} uv_t dx dt - \int_{U_T} v \Delta u dx dt \\ &= \int_U uv|_0^T dx - \int_{U_T} uv_t dx dt + \int_{U_T} \nabla v \cdot \nabla u dx dt - \int_{\Gamma_T} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\ &= \int_U uv|_0^T dx - \int_{U_T} uv_t dx dt - \int_{U_T} u \Delta v dx dt + \int_{\partial U_T} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS dt - \int_{\Gamma_T} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\ &= \int_U uv|_0^T dx - \int_{U_T} (v_t + \Delta v) u dx dt - \int_{\Gamma_T} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS dt. \end{aligned}$$

Para cada $y \in U$, consideremos $\varepsilon > 0$ y $v(x, y, t) = \Phi(x - y, T + \varepsilon - t)$. Entonces,

$$v_t + \Delta v = 0.$$

Luego,

$$0 = \int_U uv|_0^T dx - \int_{\Gamma_T} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS dt.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_U u(x, T) \Phi(x - y, \varepsilon) dx - \int_U u(x, 0) \Phi(x - y, T + \varepsilon) dx &= \int_{\Gamma_T} \Phi(x - y, T + \varepsilon - t) \frac{\partial u}{\partial \nu} \\ &\quad - u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - y, T + \varepsilon - t) dS dt. \end{aligned}$$

Ahora observe que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_U u(x, T) \Phi(x - y, \varepsilon) dx = \int_U u(x, T) \delta(x - y) dx = u(y, T).$$

Por lo tanto,

$$u(x, T) = \int_U \Phi(x - y, T) u(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} \Phi(x - y, T - t) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - y, T - t) dS dt.$$

Como $K(x, y, t) = \Phi(x - y, t)$ es C^∞ en $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. si extendemos K para $t \leq 0$, $x \neq y$. Así, tenemos que $u(y, t) \in C^\infty$ para $y \in U$ y $t > 0$. $\square$

22 Clase 22

Ecuación de Schrodinger

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u &= 0, \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x), \text{ } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Considere $u(x, t) = v(x, it)$. Entonces,

$$\begin{aligned} u_t &= iv_t \\ \Delta u &= \Delta v \end{aligned}$$

y por ende

$$0 = iu_t + \Delta u = i(iv_t) + \Delta v = -v_t + \Delta v.$$

Por ende, como $v(x, t) = \Phi_t * g(x)$, nuestro candidato a solución es $u(x, t) = \Phi_{it} * g(x)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y-x|^2}{4it}} g(y) dy = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|y-x|^2}{4t}} g(y) dy.$$

Acá $u(x, t)$ es la densidad de probabilidad de la localización de una partícula.

Definición 22.1. La solución fundamental de la ecuación de Schrodinger es

$$\Psi(x, t) = \Phi(x, it) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} e^{i|x|^2/4t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Teorema 32. Dada $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (más débil: $g \in L^1$ y $y^2 g \in L^1$), defina

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|y-x|^2}{4t}} g(y) dy$$

entonces

- $iu_t - \Delta u = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x^0, t \rightarrow 0} u(x, t) = g(x^0).$

Cole-Hopf transformation

Transformar una ecuación diferencial no lineal en una lineal no es una tarea sencilla. Sin embargo, no linealizar una ecuación lineal es más fácil. Consideremos la clásica ecuación del calor en una dimensión:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w = w(x, t). \quad (15)$$

Una de las transformaciones no lineales más simples es utilizar

$$w(x, t) = e^{\alpha \phi(x, t)}, \quad \alpha \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\phi(x, t) = \frac{\ln w(x, t)}{\alpha}, \quad w(x, t) > 0.$$

Usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{\alpha \phi}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{\alpha \phi}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left[\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] e^{\alpha \phi}.\end{aligned}$$

De este modo, la ecuación (15) se convierte en:

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{\alpha \phi} = \nu \left[\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] e^{\alpha \phi},$$

que se simplifica a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2. \quad (16)$$

Tomando la derivada de (16) respecto de x :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^3} + 2\nu \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Definiendo $u = \phi_x$, la ecuación (17) se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\nu \alpha u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (18)$$

Si consideramos $\alpha = -1/2\nu$, entonces (18) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Por lo tanto, $\phi_x = -2\nu w_x/w$ satisface la ecuación de Burgers.

Ejemplo 22.1. Consideremos la siguiente ecuación del calor con condición inicial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(x, 0) &= b + a \cos kx.\end{aligned}$$

Así,

$$w(x, t) = b + ae^{-\nu k^2 t} \cos kx.$$

Por lo tanto,

$$u(x, t) = -2\nu \frac{w_x}{w} = \frac{2\nu a k e^{-\nu k^2 t} \sin kx}{b + ae^{-\nu k^2 t} \cos kx}.$$

Lima, 2024.

References

- de Magalhães Iório, V. (2007). *EDP: Um Curso de Graduação*. IMPA, Rio de Janeiro, 2^a edition.
- Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2nd edition.
- Lax, P. D. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21(5):467–490.