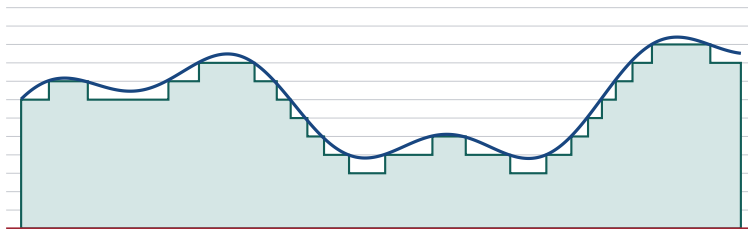


Teoría de la Medida

Notas de clase

σ -álgebras, construcción de medidas, integración,
la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, cambio de variable y convolución



Marcelo Gallardo

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

Índice general

Notación y convenciones		iv
I	Medidas	1
1	Preliminares: la recta extendida	1
1.1	Supremo e ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$	1
1.2	Sucesiones en $\overline{\mathbb{R}}$	2
1.3	Sumas de términos no negativos	4
2	σ -álgebras y medidas	7
2.1	σ -álgebras.	7
2.2	Medidas	7
2.3	π -sistemas, λ -sistemas y el teorema de Dynkin.	9
2.4	Unicidad de medidas.	10
2.5	Los borelianos de $\mathbb{R}^d$.	11
2.6	Unicidad de la medida de Lebesgue	12
2.7	Espacios de medida inducidos.	13
2.8	Ejercicios resueltos	14
3	Construcción de medidas	15
3.1	Funciones de distribución.	15
3.2	La premedida sobre los intervalos	16
3.3	Medidas exteriores	18
3.4	El teorema de Carathéodory.	18
3.5	Existencia de las medidas de Lebesgue–Stieltjes.	20
3.6	Compleción de medidas.	21
3.7	La medida de Lebesgue en la recta	22
3.8	Ejercicios resueltos	23
II	Integración	24
4	Funciones medibles	24
4.1	Definición y criterio de los generadores.	24
4.2	Funciones borelianas en $\mathbb{R}^d$	25
4.3	Funciones con valores en la recta extendida.	26

4.4	Funciones simples.	27
4.5	Propiedades en casi todo punto.	28
4.6	Ejercicios resueltos	28
5	La integral de Lebesgue	30
5.1	Integral de funciones simples no negativas.	30
5.2	Integral de funciones medibles positivas	31
5.3	Funciones integrables	33
5.4	El teorema de la convergencia dominada.	34
5.5	Integración sobre subconjuntos	36
5.6	Medida imagen	36
5.7	Medidas con densidad	37
5.8	Ejercicios resueltos	38
6	Medida producto: los teoremas de Tonelli y Fubini	40
6.1	La σ -álgebra producto.	40
6.2	Medidas producto	41
6.3	La integral como funcional.	41
6.4	Secciones e integrales iteradas.	42
6.5	El teorema de Tonelli	43
6.6	El teorema de Fubini	43
6.7	La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$	44
6.8	Ejercicios resueltos	45
III	La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$	47
7	La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$	47
7.1	Conjuntos y funciones Lebesgue medibles	47
7.2	Regularidad	47
7.3	Conjuntos de medida nula	49
7.4	Transformaciones lineales.	51
7.5	Ejercicios resueltos	52
8	Las integrales de Riemann y de Lebesgue	53
8.1	Funciones semicontinuas	53
8.2	La integral de Riemann en una caja.	54
8.3	Riemann y Lebesgue.	56
8.4	Conjuntos Jordan medibles	57
8.5	Ejercicios resueltos	58
9	Cambio de variable	59
9.1	El enunciado	59
9.2	Dos lemas de aproximación	60
9.3	Demostración del teorema	61
9.4	Coordenadas polares en el plano	61
9.5	Coordenadas polares en $\mathbb{R}^d$	62

9.6	Ejercicios resueltos	63
10	Convolución y aproximación en L^1	65
10.1	Motivación: suma de vectores aleatorios	65
10.2	La convolución en L^1	66
10.3	Aproximación en L^1	67
10.4	Regularización por convolución	68
10.5	Convolución de medidas	69
	Apéndices	71
A	Resultados auxiliares	71
A.1	Topología de $\mathbb{R}^d$ y cálculo	71
A.2	Álgebra lineal	71
A.3	La función Gamma.	72
	Bibliografía	73

Notación y convenciones

A lo largo de todo el texto se usan las convenciones siguientes. Salvo mención explícita, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ denota un espacio de medida fijo.

Conjuntos y σ -álgebras

$X, \mathcal{P}(X)$	conjunto base no vacío y la familia de todos sus subconjuntos.
$(X, \mathcal{F}), (X, \mathcal{F}, \mu)$	espacio medible y espacio de medida.
$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$	σ -álgebras genéricas.
$\sigma(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})$	σ -álgebra y λ -sistema generados por $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$.
$\sigma(f)$	σ -álgebra generada por una función: $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{H}\}$.
$\mathcal{B}_E$	borelianos de $E \subset \mathbb{R}^d$; en particular $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.
$\mathcal{L}_E$	conjuntos Lebesgue medibles de $E \subset \mathbb{R}^d$.
$\mathcal{F}_A$	σ -álgebra traza $\{A \cap E : E \in \mathcal{F}\}$ sobre $A \subset X$.
$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$	σ -álgebra producto (<i>no</i> es un producto cartesiano).
$\overline{\mathcal{F}}^\mu$	compleción de $\mathcal{F}$ respecto de μ .
$\mathcal{M}_{\mu^*}$	σ -álgebra de los conjuntos μ^* -medibles (Carathéodory).
$A \setminus B, A^c, \uplus$	diferencia, complemento y unión disjunta.
$A_n \uparrow A, A_n \downarrow A$	$A_n \subset A_{n+1}$ y $A = \bigcup_n A_n$; resp. $A_n \supset A_{n+1}$ y $A = \bigcap_n A_n$.
$A + x, \lambda A$	$\{a + x : a \in A\}$ y $\{\lambda a : a \in A\}$.

Medidas

μ, ν	medidas; μ^* medida exterior.
$m_d, m = m_1$	medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ (escribimos m si d es claro).
δ_a	medida de Dirac en a : $\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a)$.
μ_F	medida de Lebesgue–Stieltjes asociada a F .
$\mu \otimes \nu$	medida producto.
$\mu \circ T^{-1}$	medida imagen (<i>pushforward</i>) de μ por T .

continúa en la página siguiente

μ_A	medida $E \mapsto \mu(E \cap A)$.
$\rho d\mu$	medida con densidad ρ respecto de μ ; $\nu \ll \mu$ continuidad absoluta.
$\sigma = \sigma_{d-1}$	medida de superficie en la esfera $\mathbb{S}^{d-1}$.
μ -c.t.p.	en casi todo punto respecto de μ (fuera de un conjunto μ -nulo).
Funciones	
$\mathbf{1}_A$	función indicadora de A .
$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$	funciones medibles $X \rightarrow \mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$	funciones medibles $X \rightarrow [0, +\infty]$.
$\mathcal{S}(X, \mathcal{F}), \mathcal{S}_+(X, \mathcal{F})$	funciones simples y simples no negativas.
f^+, f^-	partes positiva y negativa: $f^\pm = \max(\pm f, 0)$.
$\int f d\mu, \int f(x) \mu(dx)$	integral de Lebesgue; $\int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu$.
$L^1(\mu), \ f\ _1$	funciones integrables (módulo igualdad μ -c.t.p.) y su norma.
$\ g\ _\infty$	supremo esencial de $ g $.
$\underline{f}, \bar{f}$	envolventes semicontinuas inferior y superior de f .
$f * g, \mu * \nu$	convolución de funciones y de medidas.
$\tau_v f$	traslación: $(\tau_v f)(x) = f(x + v)$.
$D\varphi(x), J_\varphi(x)$	diferencial de φ en x y jacobiano $J_\varphi(x) = \det D\varphi(x) $.
Conjuntos numéricos y geometría	
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$.
$\overline{\mathbb{R}}, [0, +\infty]$	$[-\infty, +\infty]$ y $[0, +\infty]$.
$a \wedge b, a \vee b$	mínimo y máximo.
$\ x\ , \ x\ _\infty$	norma euclídea y norma del máximo en $\mathbb{R}^d$.
$B(x, r)$	bola euclídea abierta de centro x y radio r .
$C_r(a)$	cubo cerrado $\{x : \ x - a\ _\infty \leq r\}$, de lado $2r$.
$R = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$	caja (rectángulo) de $\mathbb{R}^d$; $\text{vol}(R) = \prod_j (b_j - a_j)$.
$A^\circ, \bar{A}, \partial A$	interior, clausura y frontera de $A \subset \mathbb{R}^d$.
$\mathbb{S}^{d-1}$	esfera unitaria $\{x \in \mathbb{R}^d : \ x\ = 1\}$.

Tres convenciones que conviene tener presentes.

1. **“Positivo”** significa ≥ 0 y **“numerable”** significa finito o infinito numerable.
Una función medible positiva toma valores en $[0, +\infty]$; si hace falta excluir el cero lo diremos explícitamente.
2. **Aritmética en $[0, +\infty]$.** $a + (+\infty) = +\infty$ para todo $a \in [0, +\infty]$, y $0 \cdot (+\infty) = 0$.
Además $\inf \emptyset = +\infty$ y $\sup \emptyset = -\infty$.

3. **Igualdades c.t.p.** En L^1 (y en L^∞) identificamos funciones que coinciden μ -c.t.p.; toda igualdad entre elementos de estos espacios se entiende en ese sentido.

CAPÍTULO 1

Preliminares: la recta extendida

1.1 Supremo e ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$

El orden de $\mathbb{R}$ se extiende a $\overline{\mathbb{R}}$ declarando $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1. Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ no vacío. Decimos que $\theta \in \overline{\mathbb{R}}$ es *cota superior* de A si $x \leq \theta$ para todo $x \in A$, y *cota inferior* si $\theta \leq x$ para todo $x \in A$. El *supremo* $\sup A$ es la menor cota superior de A , es decir, el $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que

- (I) β es cota superior de A ;
- (II) si β' es otra cota superior de A , entonces $\beta \leq \beta'$.

Análogamente, el *ínfimo* $\inf A$ es la mayor cota inferior: es cota inferior y, si α' es otra cota inferior, $\alpha' \leq \alpha$.

Proposición 1.2. *Todo $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ no vacío tiene un único supremo y un único ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Unicidad. Si β y γ son supremos de A , ambos son cotas superiores, luego $\beta \leq \gamma$ y $\gamma \leq \beta$.

Existencia. Si $+\infty \in A$, la única cota superior de A es $+\infty$. Si $A = \{-\infty\}$, entonces $\sup A = -\infty$. En los demás casos $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y $+\infty \notin A$. Si $A \cap \mathbb{R}$ está acotado superiormente por un real, el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ (*todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene una menor cota superior*) da $\beta = \sup(A \cap \mathbb{R}) \in \mathbb{R}$, que es también el supremo de A porque $-\infty \leq \beta$. Si $A \cap \mathbb{R}$ no está acotado superiormente por ningún real, la única cota superior de A es $+\infty$. El caso del ínfimo es análogo, o se obtiene de la observación 1.4. ■

Observación 1.3 (Convenciones). Para $A = \emptyset$ todo elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ es a la vez cota superior e inferior, de modo que ponemos $\sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$. Esta convención aparecerá constantemente: por ejemplo, un tiempo o un índice definido como un ínfimo vale $+\infty$ cuando el conjunto es vacío.

Observación 1.4. Para todo $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ no vacío,

$$\inf A = -\sup(-A), \quad -A = \{-x : x \in A\}.$$

En efecto, θ es cota inferior de A si y solo si $-\theta$ es cota superior de $-A$; así, la mayor cota inferior de A es el opuesto de la menor cota superior de $-A$.

Proposición 1.5 (Caracterización secuencial del supremo). Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ no vacío y $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $\beta = \sup A$ si y solo si

- (I) $x \leq \beta$ para todo $x \in A$, y
- (II) existe una sucesión creciente (x_n) en A con $x_n \rightarrow \beta$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Por (i), β es cota superior. Si β' es otra cota superior, $x_n \leq \beta'$ para todo n y, pasando al límite, $\beta \leq \beta'$.

($\Rightarrow$) Supongamos $\beta = \sup A$. Si $\beta = -\infty$, entonces $A = \{-\infty\}$ y basta tomar $x_n = -\infty$. Si $\beta \in \mathbb{R}$, para cada n el número $\beta - 1/n$ no es cota superior, de modo que existe $y_n \in A$ con $\beta - 1/n < y_n \leq \beta$. Si $\beta = +\infty$, para cada n existe $y_n \in A$ con $y_n > n$. En ambos casos ponemos

$$x_n = \max\{y_1, \dots, y_n\} \in A,$$

que es creciente, está acotada por β y satisface $x_n \geq y_n$, luego $x_n \rightarrow \beta$. ■

1.2 Sucesiones en $\overline{\mathbb{R}}$

Una sucesión (x_n) en $\overline{\mathbb{R}}$ converge a $L \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ para $n \geq N$; converge a $+\infty$ si para todo $K \in \mathbb{R}$ existe N con $x_n \geq K$ para $n \geq N$; y análogamente a $-\infty$.

La sucesión es *creciente* si $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ y *decreciente* si $x_1 \geq x_2 \geq \dots$. Escribimos

$$\begin{aligned} x_n \uparrow \beta & \text{ si } (x_n) \text{ es creciente y } \beta = \sup_n x_n, \\ x_n \downarrow \alpha & \text{ si } (x_n) \text{ es decreciente y } \alpha = \inf_n x_n. \end{aligned}$$

Proposición 1.6. Toda sucesión monótona en $\overline{\mathbb{R}}$ converge en $\overline{\mathbb{R}}$: si $x_n \uparrow \beta$ entonces $x_n \rightarrow \beta$, y si $x_n \downarrow \alpha$ entonces $x_n \rightarrow \alpha$.

Demostración. Sea $x_n \uparrow \beta$. Si $\beta \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, existe N con $x_N > \beta - \varepsilon$, y entonces $\beta - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \beta$ para $n \geq N$. Si $\beta = +\infty$, para cada K existe N con $x_N \geq K$, y $x_n \geq K$ para $n \geq N$. Si $\beta = -\infty$, todos los términos valen $-\infty$. El caso decreciente se reduce a este cambiando el signo. ■

1.2.1 Límite superior y límite inferior

Definición 1.7. Dada (x_n) en $\overline{\mathbb{R}}$, definimos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} x_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} x_n.$$

Como $k \mapsto \sup_{n \geq k} x_n$ es decreciente y $k \mapsto \inf_{n \geq k} x_n$ es creciente, la proposición 1.6 da también

$$\limsup_n x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} x_n, \quad \liminf_n x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} x_n.$$

La idea es ignorar una cantidad finita de términos. Cuando $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ solo finitos términos quedan fuera de $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$; cuando no hay límite, $\liminf$ y $\limsup$ son los extremos del menor intervalo que “encajona” a la cola de la sucesión (figura 1.1).

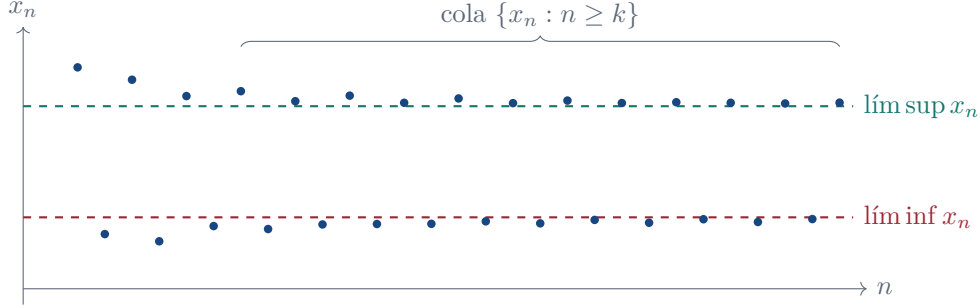


Figura 1.1: Límite superior e inferior de una sucesión acotada que oscila. Salvo finitos términos, la sucesión queda por debajo de $\limsup x_n + \varepsilon$ y por encima de $\liminf x_n - \varepsilon$, y visita infinitas veces cada vecindad de ambos valores.

Proposición 1.8. Para toda sucesión (x_n) en $\overline{\mathbb{R}}$, $\liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n$.

Demostración. Sean $a_k = \inf_{n \geq k} x_n$ y $b_k = \sup_{n \geq k} x_n$. Para $k, j \geq 1$ y $\ell = \max(k, j)$,

$$a_k \leq a_\ell \leq b_\ell \leq b_j,$$

pues (a_k) crece, (b_j) decrece y $a_\ell \leq x_\ell \leq b_\ell$. Tomando supremo en k se obtiene $\liminf x_n \leq b_j$ para todo j , y tomando ínfimo en j , $\liminf x_n \leq \limsup x_n$. ■

Proposición 1.9. Sea (x_n) en $\overline{\mathbb{R}}$ y $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $x_n \rightarrow L$ si y solo si $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n = L$.

Demostración. Con la notación anterior, $a_k \leq x_k \leq b_k$ para todo k .

($\Leftarrow$) Si $a_k \rightarrow L$ y $b_k \rightarrow L$, el teorema del encaje da $x_k \rightarrow L$ (el argumento es el mismo si $L = \pm\infty$).

($\Rightarrow$) Sea $L \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Existe N con $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ para $n \geq N$, luego $L - \varepsilon \leq a_k \leq b_k \leq L + \varepsilon$ para $k \geq N$. Así $a_k \rightarrow L$ y $b_k \rightarrow L$. Si $L = +\infty$, para cada K existe N con $x_n \geq K$ para $n \geq N$, luego $a_k \geq K$ para $k \geq N$, es decir $a_k \rightarrow +\infty$; como $a_k \leq b_k$, también $b_k \rightarrow +\infty$. El caso $L = -\infty$ es simétrico. ■

Proposición 1.10. Para toda sucesión (x_n) en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\liminf_n x_n = -\limsup_n (-x_n).$$

Además, si $x_n \leq y_n$ para todo n , entonces

$$\liminf_n x_n \leq \liminf_n y_n \quad y \quad \limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n.$$

Demostración. Por la observación 1.4 aplicada a $A_k = \{x_n : n \geq k\}$, $\inf_{n \geq k} x_n = -\sup_{n \geq k}(-x_n)$ para todo k , y la primera afirmación se obtiene aplicando de nuevo la observación 1.4 a la familia indexada por k . Para la segunda, si $x_n \leq y_n$ para todo n , entonces $\sup_{n \geq k} x_n \leq \sup_{n \geq k} y_n$ e $\inf_{n \geq k} x_n \leq \inf_{n \geq k} y_n$ para todo k ; se pasa al límite en k . ■

Proposición 1.11. Sea (x_n) en $\overline{\mathbb{R}}$ con $b = \limsup_n x_n \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (I) para todo $b' > b$, el conjunto $\{n : x_n > b'\}$ es finito;
- (II) para todo $b'' < b$, el conjunto $\{n : x_n > b''\}$ es infinito.

Simétricamente, si $a = \liminf_n x_n \in \mathbb{R}$, entonces $\{n : x_n < a'\}$ es finito para todo $a' < a$ y $\{n : x_n < a''\}$ es infinito para todo $a'' > a$.

Demostración. (i) Como $\inf_k \sup_{n \geq k} x_n = b < b'$, existe k_0 con $\sup_{n \geq k_0} x_n < b'$, es decir $x_n < b'$ para todo $n \geq k_0$.

(ii) Para todo k se tiene $\sup_{n \geq k} x_n \geq b > b''$, de modo que existe $n \geq k$ con $x_n > b''$. Como k es arbitrario, hay infinitos tales n .

La afirmación sobre el $\liminf$ se obtiene aplicando lo anterior a $(-x_n)$ y usando la proposición 1.10. ■

Corolario 1.12. Sea (x_n) una sucesión acotada de números reales, $a = \liminf_n x_n$ y $b = \limsup_n x_n$. Entonces:

- (a) el límite de toda subsucesión convergente de (x_n) pertenece a $[a, b]$;
- (b) existen subsucesiones (x_{n_k}) y (x_{m_k}) con $x_{n_k} \rightarrow b$ y $x_{m_k} \rightarrow a$.

Demostración. Como (x_n) es acotada, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Si $x_{n_k} \rightarrow c$ con $c > b$, tomando $b' \in (b, c)$ habría infinitos n con $x_n > b'$, contra la proposición 1.11(i). El caso $c < a$ es simétrico.

(b) Construimos $n_1 < n_2 < \dots$ inductivamente. Por la proposición 1.11, para cada k el conjunto $\{n : x_n > b + 1/k\}$ es finito y $\{n : x_n > b - 1/k\}$ es infinito; luego existe $n_k > n_{k-1}$, mayor que todos los elementos del primer conjunto, con $x_{n_k} > b - 1/k$. Así $b - 1/k < x_{n_k} \leq b + 1/k$ y $x_{n_k} \rightarrow b$. La subsucesión que converge a a se construye igual. ■

1.3 Sumas de términos no negativos

Una medida sobre un conjunto discreto no es otra cosa que una suma, posiblemente sobre un conjunto de índices no numerable. Conviene entonces definir tales sumas sin recurrir a un orden de los sumandos.

Para $\mathcal{I}$ finito y $a_i \in [0, +\infty]$, la suma $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i$ tiene el sentido usual, con la convención $a + (+\infty) = +\infty$.

Definición 1.13. Sean $a_i \in [0, +\infty]$, $i \in \Lambda$, con Λ un conjunto arbitrario. Definimos

$$\sum_{i \in \Lambda} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i : \mathcal{I} \subset \Lambda \text{ finito} \right\} \in [0, +\infty].$$

Es inmediato que, si $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda$, entonces $\sum_{i \in \Lambda_1} a_i \leq \sum_{i \in \Lambda_2} a_i$.

Proposición 1.14. Sean $a_i \in [0, +\infty]$, $i \in \Lambda$. Si $\Lambda_n \uparrow \Lambda$, entonces

$$\sum_{i \in \Lambda_n} a_i \uparrow \sum_{i \in \Lambda} a_i.$$

Demostración. La sucesión $s_n = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i$ es creciente y acotada por $s = \sum_{i \in \Lambda} a_i$, luego $\beta = \lim_n s_n \leq s$. Recíprocamente, sea $\mathcal{I} \subset \Lambda$ finito. Como $\Lambda_n \uparrow \Lambda$ y $\mathcal{I}$ es finito, existe n_0 con $\mathcal{I} \subset \Lambda_n$ para $n \geq n_0$, y entonces $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \leq s_n \leq \beta$. Tomando supremo sobre $\mathcal{I}$ resulta $s \leq \beta$. ■

Ejemplo 1.15. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, como $\{1, \dots, n\} \uparrow \mathbb{N}$,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i,$$

de modo que la definición 1.13 extiende la suma usual de series de términos no negativos. Más aún, si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es biyectiva, entonces $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \uparrow \mathbb{N}$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$: una serie de términos no negativos puede reordenarse sin cambiar su suma. Del mismo modo, para $a_i \geq 0$ con $i \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_n \sum_{i=-n}^n a_i = \lim_n \sum_{i=-2^n}^{2^n} a_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i,$$

pues ambas familias de índices crecen hacia $\mathbb{Z}$.

Proposición 1.16. Sean $a_i \in [0, +\infty]$, $i \in \Lambda$. Si $\sum_{i \in \Lambda} a_i < +\infty$, entonces el conjunto $\{i \in \Lambda : a_i > 0\}$ es numerable. Equivalentemente, si $\{i \in \Lambda : a_i > 0\}$ no es numerable, entonces $\sum_{i \in \Lambda} a_i = +\infty$.

Demostración. Sea $s = \sum_{i \in \Lambda} a_i < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\Lambda_n = \{i : a_i \geq 1/n\}$ tiene a lo sumo ns elementos: si $\mathcal{I} \subset \Lambda_n$ es finito, entonces $\text{card}(\mathcal{I})/n \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \leq s$. Así,

$$\{i \in \Lambda : a_i > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{i \in \Lambda : a_i \geq 1/n\}$$

es una unión numerable de conjuntos finitos, luego numerable. ■

Proposición 1.17 (Asociatividad). Sean $a_i \in [0, +\infty]$, $i \in \Lambda$, y $\Lambda = \bigsqcup_{j \in J} \Lambda_j$ una partición de Λ indexada por un conjunto arbitrario J . Entonces

$$\sum_{i \in \Lambda} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in \Lambda_j} a_i.$$

Demostración. Sean $s = \sum_{i \in \Lambda} a_i$ y $s_j = \sum_{i \in \Lambda_j} a_i$.

($\leq$) Sea $\mathcal{I} \subset \Lambda$ finito. Solo hay finitos j , digamos $j \in J_0$, con $\mathcal{I} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$, y

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = \sum_{j \in J_0} \sum_{i \in \mathcal{I} \cap \Lambda_j} a_i \leq \sum_{j \in J_0} s_j \leq \sum_{j \in J} s_j.$$

Tomando supremo sobre $\mathcal{I}$, $s \leq \sum_j s_j$.

($\geq$) Sea $J_0 \subset J$ finito y, para cada $j \in J_0$, sea $\mathcal{I}_j \subset \Lambda_j$ finito. Los $\mathcal{I}_j$ son disjuntos, luego $\sum_{j \in J_0} \sum_{i \in \mathcal{I}_j} a_i = \sum_{i \in \bigcup_j \mathcal{I}_j} a_i \leq s$. Tomando supremo sucesivamente sobre cada $\mathcal{I}_j$ (son finitos índices j y las sumas son no negativas) resulta $\sum_{j \in J_0} s_j \leq s$, y tomando supremo sobre J_0 , $\sum_j s_j \leq s$. ■

Corolario 1.18 (Series dobles de términos no negativos). Si $a(n, k) \in [0, +\infty]$ para $n, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a(n, k) = \sum_{(n, k) \in \mathbb{N}^2} a(n, k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a(n, k).$$

Demostración. Aplicar la proposición 1.17 a las particiones de $\mathbb{N}^2$ en filas $\{n\} \times \mathbb{N}$ y en columnas $\mathbb{N} \times \{k\}$, junto con el ejemplo 1.15. ■

La idea en una frase

Para términos no negativos, la suma $\sum_{i \in \Lambda} a_i$ no depende del orden ni de cómo se agrupen los sumandos, y solo puede ser finita si a lo sumo una cantidad numerable de ellos es positiva. Es la versión discreta de lo que serán la σ -aditividad de una medida y el teorema de Tonelli.

CAPÍTULO 2

σ -álgebras y medidas

2.1 σ -álgebras

Definición 2.1 (σ -álgebra). Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra si

- (I) $X \in \mathcal{F}$;
- (II) si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$;
- (III) si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

El par $(X, \mathcal{F})$ se llama *espacio medible* y los elementos de $\mathcal{F}$, *conjuntos medibles*.

Observación 2.2. Una σ -álgebra contiene a $\emptyset = X^c$ y es estable por uniones finitas (basta completar con conjuntos vacíos), por intersecciones numerables, pues $\bigcap_n A_n = (\bigcup_n A_n^c)^c$, y por diferencias, $B \setminus A = B \cap A^c$. No es, en general, estable por uniones arbitrarias: en $X = \mathbb{R}$, la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ es numerable o } A^c \text{ es numerable}\}$$

es una σ -álgebra (verifíquese) que contiene a todos los puntos $\{x\}$, pero no contiene a $[0, 1] = \bigcup_{x \in [0, 1]} \{x\}$.

Otros ejemplos inmediatos son la σ -álgebra trivial $\{\emptyset, X\}$ y la σ -álgebra total $\mathcal{P}(X)$.

Proposición 2.3 (σ -álgebra generada). Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Existe una única σ -álgebra $\sigma(\mathcal{C})$, llamada σ -álgebra generada por $\mathcal{C}$, tal que

- (I) $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$;
- (II) si $\mathcal{G}$ es una σ -álgebra con $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$.

Es decir, $\sigma(\mathcal{C})$ es la menor σ -álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

Demostración. La unicidad es clara por doble inclusión. Para la existencia, la familia Λ de todas las σ -álgebras que contienen a $\mathcal{C}$ es no vacía, pues $\mathcal{P}(X) \in \Lambda$, y la intersección $\bigcap_{\mathcal{G} \in \Lambda} \mathcal{G}$ es una σ -álgebra (cada una de las tres condiciones se verifica en cada $\mathcal{G}$) que contiene a $\mathcal{C}$ y está contenida en toda $\mathcal{G} \in \Lambda$. ■

2.2 Medidas

Definición 2.4 (Medida). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una *medida* es una función $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

- (I) $\mu(\emptyset) = 0$;
 (II) (σ -aditividad) si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ son disjuntos dos a dos,

$$\mu\left(\biguplus_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

La terna $(X, \mathcal{F}, \mu)$ se llama *espacio de medida*. La medida es *finita* si $\mu(X) < \infty$, es una *probabilidad* si $\mu(X) = 1$, y es σ -finita si existen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ con $X = \bigcup_n A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo n .

Proposición 2.5 (Propiedades básicas). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $A, B, A_n \in \mathcal{F}$.

- (a) (Aditividad finita.) Si $A_1, \dots, A_k$ son disjuntos, $\mu(A_1 \uplus \dots \uplus A_k) = \sum_{j=1}^k \mu(A_j)$.
 (b) (Monotonía.) Si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$; si además $\mu(A) < \infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
 (c) (σ -subaditividad.) $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.
 (d) (Continuidad por abajo.) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.
 (e) (Continuidad por arriba.) Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.

Demostración. (a) Aplicar la σ -aditividad a $A_1, \dots, A_k, \emptyset, \emptyset, \dots$.

(b) $B = A \uplus (B \setminus A)$, luego $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$, y si $\mu(A) < \infty$ se puede despejar.

(d) Sean $E_1 = A_1$ y $E_n = A_n \setminus A_{n-1}$ para $n \geq 2$. Los E_n son disjuntos, $A_n = E_1 \uplus \dots \uplus E_n$ y $A = \biguplus_n E_n$, de modo que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(E_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(c) Sean $\tilde{A}_1 = A_1$ y $\tilde{A}_n = A_n \setminus \bigcup_{j < n} A_j$. Son disjuntos, $\tilde{A}_n \subset A_n$ y $\bigcup_n A_n = \biguplus_n \tilde{A}_n$, luego $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(\tilde{A}_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$ por (b).

(e) $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$, y por (d) y (b), $\mu(A_1) - \mu(A_n) \rightarrow \mu(A_1) - \mu(A)$; como $\mu(A_1) < \infty$, $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$. $\blacksquare$

La hipótesis $\mu(A_1) < \infty$ en (e) es necesaria. Con la medida de contar en $\mathbb{N}$ (ejemplo 2.8) y $A_n = \{n, n+1, \dots\}$ se tiene $A_n \downarrow \emptyset$ pero $\mu(A_n) = \infty$ para todo n .

Proposición 2.6. Sea $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ con $\mu(\emptyset) = 0$. Entonces μ es una medida si y solo si

- (I) $\mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B)$ para $A, B \in \mathcal{F}$ disjuntos, y
 (II) $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ siempre que $A_n \uparrow A$ en $\mathcal{F}$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ es la proposición 2.5. $(\Leftarrow)$ Por inducción, (i) da la aditividad finita. Si $A_1, A_2, \dots$ son disjuntos y $B_n = A_1 \uplus \dots \uplus A_n$, entonces $B_n \uparrow \biguplus_j A_j$ y, por (ii), $\mu(\biguplus_j A_j) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{j \leq n} \mu(A_j) = \sum_j \mu(A_j)$. $\blacksquare$

Proposición 2.7. Una medida μ es σ -finita si y solo si existen $B_n \in \mathcal{F}$ con $B_n \uparrow X$ y $\mu(B_n) < \infty$ para todo n ; y también si y solo si existe una partición numerable $X = \biguplus_n E_n$ con $E_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(E_n) < \infty$.

Demostración. Si $X = \bigcup_n A_n$ con $\mu(A_n) < \infty$, basta tomar $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$, que tiene medida finita por subaditividad, y $E_n = B_n \setminus B_{n-1}$. Los recíprocos son inmediatos. ■

Ejemplo 2.8 (Medida de contar y sumas de masas puntuales). Sea X no vacío y $a : X \rightarrow [0, +\infty]$ una función arbitraria. Para $A \subset X$ definimos

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} a(x)$$

en el sentido de la definición 1.13. Entonces μ es una medida sobre $(X, \mathcal{P}(X))$: $\mu(\emptyset) = 0$, la aditividad para dos conjuntos disjuntos es la proposición 1.17, y la continuidad por abajo es la proposición 1.14; la proposición 2.6 concluye.

Con $a \equiv 1$ se obtiene la *medida de contar*: $\mu(A) = \text{card}(A)$ si A es finito y $\mu(A) = +\infty$ en caso contrario. Con $a = \mathbf{1}_{\{x_0\}}$ se obtiene la *medida de Dirac* en x_0 ,

$$\delta_{x_0}(A) = \mathbf{1}_A(x_0) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo 2.9. La medida de contar es σ -finita sobre $\mathbb{Z}$, pues $\{-n, \dots, n\} \uparrow \mathbb{Z}$, pero no lo es sobre $\mathbb{R}$: los conjuntos de medida finita son los finitos, y una unión numerable de conjuntos finitos es numerable.

Ejemplo 2.10 (Sumas de medidas). Si $\mu_1, \mu_2, \dots$ son medidas sobre $(X, \mathcal{F})$, entonces $\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$, definida por $\nu(E) = \sum_j \mu_j(E)$, es una medida. En efecto, si $E = \biguplus_n E_n$, el corolario 1.18 permite intercambiar las sumas:

$$\nu(E) = \sum_j \sum_n \mu_j(E_n) = \sum_n \sum_j \mu_j(E_n) = \sum_n \nu(E_n).$$

En particular, si $p_j \geq 0$ y $a_j \in X$, la fórmula $\nu = \sum_j p_j \delta_{a_j}$ define una medida, que concentra la masa p_j en cada punto a_j .

2.3 π -sistemas, λ -sistemas y el teorema de Dynkin

Para probar que una propiedad vale para todos los conjuntos de una σ -álgebra $\sigma(\mathcal{C})$, lo natural es considerar la familia de los conjuntos que la verifican y mostrar que es una σ -álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Con frecuencia esa familia es estable por diferencias y uniones crecientes, pero no por intersecciones. El teorema π - λ dice que eso basta si $\mathcal{C}$ es estable por intersecciones.

Definición 2.11. Sea X no vacío y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$.

- $\mathcal{C}$ es un π -sistema si $A, B \in \mathcal{C}$ implica $A \cap B \in \mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}$ es un λ -sistema si
 - (I) $X \in \mathcal{C}$;
 - (II) si $A, B \in \mathcal{C}$ y $A \subset B$, entonces $B \setminus A \in \mathcal{C}$;
 - (III) si $A_n \in \mathcal{C}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in \mathcal{C}$.

Proposición 2.12. *Toda σ -álgebra es un λ -sistema. Además, $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra si y solo si es a la vez un π -sistema y un λ -sistema.*

Demostración. La primera afirmación se sigue de $B \setminus A = B \cap A^c$ y de la observación 2.2; en particular toda σ -álgebra es π -sistema y λ -sistema. Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es π -sistema y λ -sistema, entonces $X \in \mathcal{F}$, $A^c = X \setminus A \in \mathcal{F}$, y $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{F}$. Así $\mathcal{F}$ es estable por uniones finitas, y si $A_n \in \mathcal{F}$, entonces $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}$ y $B_n \uparrow \bigcup_n A_n$, de modo que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$. ■

Ejemplo 2.13. Sea $X = \{a, e, i, o, u\}$, $A = \{a, e\}$ y $B = \{e, i\}$, y consideremos

$$\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, X\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{\emptyset, X, A, B\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c\}.$$

$\mathcal{C}_1$ es una σ -álgebra. $\mathcal{C}_2$ no es λ -sistema, pues $X \setminus A = A^c \notin \mathcal{C}_2$. $\mathcal{C}_3$ es un λ -sistema (los únicos pares $E \subset F$ con $E \neq F$ en $\mathcal{C}_3$ tienen $E = \emptyset$ o $F = X$), pero no es π -sistema ni σ -álgebra, pues $A \cap B = \{e\} \notin \mathcal{C}_3$. Así, el recíproco de la primera afirmación de la proposición 2.12 es falso.

Como para las σ -álgebras, la intersección de todos los λ -sistemas que contienen a $\mathcal{C}$ es un λ -sistema (se verifican (i)–(iii) en cada uno), y es el menor λ -sistema que contiene a $\mathcal{C}$. Lo denotamos $\lambda(\mathcal{C})$. Como toda σ -álgebra es λ -sistema, $\lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Lema 2.14. *Si $\mathcal{C}$ es un π -sistema, entonces $\lambda(\mathcal{C})$ es un π -sistema y, por lo tanto, una σ -álgebra.*

Demostración. Para $D \in \lambda(\mathcal{C})$ sea $\mathcal{H}_D = \{E \in \lambda(\mathcal{C}) : E \cap D \in \lambda(\mathcal{C})\}$. Veamos que $\mathcal{H}_D$ es un λ -sistema: $X \in \mathcal{H}_D$ porque $X \cap D = D$; si $E \subset F$ están en $\mathcal{H}_D$, entonces $(F \setminus E) \cap D = (F \cap D) \setminus (E \cap D)$ es diferencia de elementos anidados de $\lambda(\mathcal{C})$, luego está en $\lambda(\mathcal{C})$; y si $E_n \uparrow E$ con $E_n \in \mathcal{H}_D$, entonces $E_n \cap D \uparrow E \cap D$, de modo que $E \cap D \in \lambda(\mathcal{C})$.

Paso 1. Si $D \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_D$ porque $\mathcal{C}$ es π -sistema; luego $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H}_D$. Es decir: $E \cap D \in \lambda(\mathcal{C})$ para todo $E \in \lambda(\mathcal{C})$ y todo $D \in \mathcal{C}$.

Paso 2. Sea ahora $D \in \lambda(\mathcal{C})$ arbitrario. Por el paso 1, $C \cap D \in \lambda(\mathcal{C})$ para todo $C \in \mathcal{C}$, es decir $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_D$, y otra vez $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H}_D$. Así, $E \cap D \in \lambda(\mathcal{C})$ para todos $E, D \in \lambda(\mathcal{C})$. La última afirmación es la proposición 2.12. ■

Teorema 2.15 (Teorema π - λ de Dynkin). *Si $\mathcal{C}$ es un π -sistema, $\mathcal{G}$ es un λ -sistema y $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$. En particular, $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Demostración. Por el lema 2.14, $\lambda(\mathcal{C})$ es una σ -álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, luego $\sigma(\mathcal{C}) \subset \lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$. ■

2.4 Unicidad de medidas

Teorema 2.16. *Sean μ y ν medidas finitas sobre $(X, \mathcal{F})$ que coinciden en un π -sistema $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Si $\mu(X) = \nu(X)$, entonces $\mu = \nu$ sobre $\sigma(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = \nu(A)\} \supset \mathcal{C}$. Es un λ -sistema: $X \in \mathcal{H}$ por hipótesis; si $A \subset B$ están en $\mathcal{H}$, como las medidas son finitas, $\mu(B \setminus A) =$

$\mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$; y si $A_n \uparrow A$ con $A_n \in \mathcal{H}$, la continuidad por abajo da $\mu(A) = \lim \mu(A_n) = \lim \nu(A_n) = \nu(A)$. El teorema 2.15 da $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H}$. ■

Teorema 2.17 (Unicidad de medidas). Sean μ y ν medidas sobre $(X, \mathcal{F})$ que coinciden en un π -sistema $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Supongamos que se cumple una de las dos condiciones siguientes:

- (I) existen $E_n \in \mathcal{C}$ con $E_n \uparrow X$ y $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$;
- (II) existe una partición numerable $X = \bigsqcup_n E_n$ con $E_n \in \mathcal{C}$ y $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$.

Entonces $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \sigma(\mathcal{C})$.

Demostración. Para cada n consideremos las medidas finitas $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$ y $\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n)$, $A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{C}$ es π -sistema y $E_n \in \mathcal{C}$, para $C \in \mathcal{C}$ se tiene $C \cap E_n \in \mathcal{C}$ y $\mu_n(C) = \nu_n(C)$; además $\mu_n(X) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu_n(X) < \infty$. Por el teorema 2.16, $\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n)$ para todo $A \in \sigma(\mathcal{C})$ y todo n . En el caso (i), $A \cap E_n \uparrow A$ y la continuidad por abajo da $\mu(A) = \nu(A)$; en el caso (ii), $\mu(A) = \sum_n \mu(A \cap E_n) = \sum_n \nu(A \cap E_n) = \nu(A)$. ■

Medidas definidas en σ -álgebras distintas. Si μ está definida sobre $\mathcal{F}_\mu$ y ν sobre $\mathcal{F}_\nu$, ambas conteniendo a $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\nu$ es una σ -álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, luego a $\sigma(\mathcal{C})$, y el teorema se aplica a las restricciones de μ y ν a $\sigma(\mathcal{C})$.

2.5 Los borelianos de $\mathbb{R}^d$

Definición 2.18 (σ -álgebra de Borel). La σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$ es la σ -álgebra generada por los abiertos,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma\{O \subset \mathbb{R}^d : O \text{ abierto}\}.$$

Sus elementos se llaman *borelianos*. Para $E \subset \mathbb{R}^d$ ponemos $\mathcal{B}_E = \{E \cap A : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}$ (véase la sección 2.7 y el ejemplo 4.5).

Los cerrados, los compactos, los conjuntos numerables y las intersecciones numerables de abiertos son borelianos. Para describir $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ mediante generadores más manejables usaremos los cubos diádicos.

Definición 2.19 (Cubos diádicos). Para $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ sea $\mathcal{A}_n$ la familia de los cubos diádicos de orden n ,

$$Q = \prod_{j=1}^d \left[\frac{k_j}{2^n}, \frac{k_j + 1}{2^n} \right], \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d,$$

y sea $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$. Cada $\mathcal{A}_n$ es una partición numerable de $\mathbb{R}^d$, y dos cubos diádicos cualesquiera son disjuntos o uno contiene al otro; en particular $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ es un π -sistema.

Lema 2.20 (Descomposición diádica de un abierto). Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^d$ es unión disjunta numerable de cubos diádicos cuyas clausuras están contenidas en U .

Demostración. Sea $x \in U$ y $r > 0$ con $B(x, r) \subset U$. El cubo de $\mathcal{A}_n$ que contiene a x tiene diámetro $\sqrt{d}2^{-n}$, de modo que para n grande su clausura está contenida en $B(x, r) \subset U$. Llamemos *admisibles* a los cubos diádicos cuya clausura está en U . Todo punto de U está en algún cubo admisible y, como los órdenes son ≥ 0 , en uno *maximal* (no contenido estrictamente en otro admisible). Dos cubos maximales distintos no pueden estar anidados, luego son disjuntos. Así U es la unión disjunta de los cubos admisibles maximales, que forman una familia numerable porque $\mathcal{A}$ lo es. ■

Proposición 2.21 (Generadores de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$). $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ coincide con la σ -álgebra generada por cualquiera de las familias siguientes: las cajas cerradas $\prod_j [a_j, b_j]$, las cajas abiertas $\prod_j (a_j, b_j)$, las cajas semiabiertas $\prod_j (a_j, b_j]$, o los cubos diádicos $\mathcal{A}$.

Demostración. Las cajas abiertas son abiertas y las cerradas son cerradas; además

$$\prod_j (a_j, b_j] = \bigcap_n \prod_j (a_j, b_j + \frac{1}{n}),$$

de modo que las cuatro familias están contenidas en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y, por lo tanto, sus σ -álgebras generadas también. Recíprocamente, todo cubo diádico está en la σ -álgebra generada por cada una de las familias: es una caja semiabierto, y

$$\prod_j (a_j, b_j] = \bigcap_n \prod_j (a_j, b_j + \frac{1}{n}) = \bigcup_n \prod_j [a_j + \frac{1}{n}, b_j].$$

Por el lema 2.20, todo abierto es unión numerable de cubos diádicos, luego pertenece a cada una de esas σ -álgebras, y así $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ está contenida en ellas. ■

En particular, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\{(a, b] : a < b\}$, lo que usaremos al construir las medidas de Lebesgue–Stieltjes.

Proposición 2.22 (Invariancia por traslaciones). Si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y $x \in \mathbb{R}^d$, entonces $A + x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Demostración. Fijemos x y sea $\mathcal{H} = \{A \subset \mathbb{R}^d : A + x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}$. Es una σ -álgebra: $\mathbb{R}^d + x = \mathbb{R}^d$, $A^c + x = (A + x)^c$ y $(\bigcup_n A_n) + x = \bigcup_n (A_n + x)$. Además contiene a los abiertos, pues el trasladado de un abierto es abierto. Luego $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{H}$. ■

2.6 Unicidad de la medida de Lebesgue

Definición 2.23 (Medida de Lebesgue–Stieltjes). Sea μ una medida sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{F})$ con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{F}$. Decimos que μ es de Lebesgue–Stieltjes si $\mu(A) < \infty$ para todo $A \in \mathcal{F}$ acotado. Equivalentemente, $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K . Toda medida de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita, pues $(-n, n]^d \uparrow \mathbb{R}^d$.

Corolario 2.24. Existe a lo sumo una medida μ sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tal que

$$\mu\left(\prod_{j=1}^d (a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) \quad \text{para toda caja semiabierto.}$$

Más en general, dos medidas sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ que coinciden y son finitas sobre las cajas semiabiertas (o sobre las cerradas) son iguales.

Demostración. Las cajas semiabiertas, junto con $\emptyset$, forman un π -sistema:

$$\prod_j (a_j, b_j] \cap \prod_j (c_j, d_j] = \prod_j (a_j \vee c_j, b_j \wedge d_j],$$

con la convención $(\alpha, \beta] = \emptyset$ si $\alpha \geq \beta$. Generan $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y $(-n, n]^d \uparrow \mathbb{R}^d$; se aplica el teorema 2.17(i). Para cajas cerradas el argumento es idéntico, con $[-n, n]^d \uparrow \mathbb{R}^d$. ■

Teorema 2.25. Sean μ y ν medidas de Lebesgue–Stieltjes sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ invariantes por traslaciones, es decir, $\mu(A+x) = \mu(A)$ y $\nu(A+x) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Si $\nu \neq 0$, entonces $\mu = c\nu$ con $c = \mu((0, 1]^d)/\nu((0, 1]^d) \in [0, \infty)$. En particular, existe a lo sumo una medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ invariante por traslaciones que asigna medida 1 a $(0, 1]^d$ (tal medida es automáticamente de Lebesgue–Stieltjes, pues todo acotado está cubierto por finitos trasladados de $(0, 1]^d$).

Demostración. Sea $a = \nu((0, 1]^d) < \infty$. Se tiene $a > 0$: de lo contrario, como $\mathbb{R}^d$ es unión numerable de trasladados de $(0, 1]^d$, sería $\nu(\mathbb{R}^d) = 0$. Si $Q \in \mathcal{A}_n$, el cubo $(0, 1]^d$ es unión disjunta de 2^{nd} trasladados de Q , de modo que $\nu(Q) = a 2^{-nd}$ y, análogamente, $\mu(Q) = \mu((0, 1]^d) 2^{-nd}$. Así las medidas μ y $c\nu$ coinciden sobre el π -sistema $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$, que genera $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ (proposición 2.21), y $\mathbb{R}^d$ es unión disjunta numerable de cubos de $\mathcal{A}_0$, de medida finita. El teorema 2.17(ii) da $\mu = c\nu$. ■

La existencia de una tal medida, la *medida de Lebesgue*, se probará en el capítulo 3 para $d = 1$ y en el capítulo 6 para d arbitrario.

2.7 Espacios de medida inducidos

Proposición 2.26 (σ -álgebra traza). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $A \subset X$. La familia

$$\mathcal{F}_A = \{A \cap E : E \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{P}(A)$$

es una σ -álgebra de subconjuntos de A . Si además $A \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{F} : E \subset A\} \subset \mathcal{F}$, y si μ es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$, su restricción $\mu|_{\mathcal{F}_A}$ es una medida sobre $(A, \mathcal{F}_A)$.

Demostración. $A = A \cap X \in \mathcal{F}_A$; el complemento de $A \cap E$ dentro de A es $A \cap E^c$; y $\bigcup_n (A \cap E_n) = A \cap \bigcup_n E_n$. Si $A \in \mathcal{F}$, cada $A \cap E$ está en $\mathcal{F}$ y es subconjunto de A ; recíprocamente, si $E \in \mathcal{F}$ y $E \subset A$, entonces $E = A \cap E$. ■

Ejemplo 2.27. Así se obtienen, por ejemplo, $([a, b], \mathcal{B}_{[a, b]}, m)$ a partir de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$, o $(U, \mathcal{B}_U, m)$ para un abierto $U \subset \mathbb{R}^d$, donde m denota la restricción de la medida de Lebesgue.

Una construcción relacionada, que no cambia el espacio, es la *medida restringida* a $A \in \mathcal{F}$:

$$\mu_A(E) = \mu(E \cap A), \quad E \in \mathcal{F},$$

que es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$ (ya se usó en la demostración del teorema 2.17). En el capítulo 5 veremos que integrar respecto de μ_A es lo mismo que integrar sobre A .

2.8 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.28. Pruebe que la familia de la observación 2.2 es una σ -álgebra y que $\mu(A) = 0$ si A es numerable, $\mu(A) = 1$ si A^c es numerable, define una medida sobre ella.

Solución. $\mathbb{R}$ tiene complemento vacío; la condición es simétrica en A y A^c ; y si todos los A_n son numerables, su unión también lo es, mientras que si algún $A_{n_0}^c$ es numerable, entonces $(\bigcup_n A_n)^c \subset A_{n_0}^c$ también. Un conjunto no puede ser numerable y de complemento numerable a la vez (pues $\mathbb{R}$ no es numerable), así que μ está bien definida. Si los A_n son disjuntos, a lo sumo uno de ellos tiene complemento numerable (dos tales conjuntos se cortarían, pues la unión de sus complementos, numerable, no puede ser todo $\mathbb{R}$); si ninguno lo tiene, la unión es numerable y ambos lados valen 0; si $A_{n_0}^c$ es numerable, ambos lados valen 1. ■

Ejercicio 2.29. Muestre con un ejemplo que la hipótesis de finitud del teorema 2.17 no puede omitirse.

Solución. Sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ sea μ la medida de contar (restringida a los borelianos) y $\nu = 2\mu$. Ambas coinciden en el π -sistema $\mathcal{C} = \{(a, b] : a < b\} \cup \{\emptyset\}$, pues valen $+\infty$ en todo intervalo no degenerado, y $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; pero $\mu(\{0\}) = 1 \neq 2 = \nu(\{0\})$. Lo que falla es que ningún elemento *no vacío* de $\mathcal{C}$ tiene medida finita. ■

Construcción de medidas

3.1 Funciones de distribución

Definición 3.1. Sea μ una medida de Lebesgue–Stieltjes sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$, con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$. Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de distribución* de μ si

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a) \quad \text{para todos } a < b \text{ en } \mathbb{R}.$$

Proposición 3.2. Toda medida de Lebesgue–Stieltjes μ sobre $\mathbb{R}$ tiene funciones de distribución. Una de ellas es

$$F_0(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & x \geq 0, \\ -\mu((x, 0]), & x < 0, \end{cases}$$

y las funciones de distribución de μ son exactamente las de la forma $F_0 + c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante.

Demostración. Los valores de F_0 son finitos porque μ es finita sobre los acotados. Si $0 \leq a < b$, entonces $(0, b] = (0, a] \uplus (a, b]$ y $F_0(b) - F_0(a) = \mu((a, b])$; los casos $a < 0 \leq b$ y $a < b < 0$ se tratan igual, con $(a, b] = (a, 0] \uplus (0, b]$ y $(a, 0] = (a, b] \uplus (b, 0]$. Es claro que $F_0 + c$ también es función de distribución. Si F y G lo son, entonces $F(x) - F(0) = G(x) - G(0)$ para todo x (ambos lados valen $\mu((0, x])$ o $-\mu((x, 0])$), de modo que $F - G$ es constante. ■

Observación 3.3. Si μ es finita, $F(x) = \mu((-\infty, x])$ es una función de distribución, pues $(-\infty, b] = (-\infty, a] \uplus (a, b]$. Es la normalización usual en probabilidad, y satisface $F(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Si F es de clase C^1 , el teorema fundamental del cálculo da $\mu((a, b]) = \int_a^b F'(x) dx$: la derivada F' será la *densidad* de μ (sección 5.7).

Para $c \in \mathbb{R}$ escribimos $F(c^+) = \lim_{x \downarrow c} F(x)$ y $F(c^-) = \lim_{x \uparrow c} F(x)$, que existen por monotonía, y $F(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposición 3.4. Sea F una función de distribución de la medida de Lebesgue–Stieltjes μ . Entonces:

- (a) F es creciente;
- (b) F es continua por la derecha: $F(c^+) = F(c)$;
- (c) $\mu(\{c\}) = F(c) - F(c^-)$; en particular F es continua en c si y solo si $\mu(\{c\}) = 0$;

- (d) para $a < b$: $\mu([a, b]) = F(b) - F(a^-)$, $\mu((a, b)) = F(b^-) - F(a)$ y $\mu([a, b)) = F(b^-) - F(a^-)$;
 (e) $\mu(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty)$, con la convención de que el resultado es $+\infty$ si alguno de los dos límites es infinito.

Demostración. (a) $F(b) - F(a) = \mu((a, b]) \geq 0$ para $a < b$. (b) Si $x_n \downarrow c$, entonces $(c, x_n] \downarrow \emptyset$ y, por continuidad por arriba (las medidas son finitas), $F(x_n) - F(c) = \mu((c, x_n]) \rightarrow 0$. (c) Si $x_n \uparrow c$ con $x_n < c$, entonces $(x_n, c] \downarrow \{c\}$ y $F(c) - F(x_n) = \mu((x_n, c]) \rightarrow \mu(\{c\})$. (d) $[a, b] = \{a\} \uplus (a, b]$ y se usa (c); los otros dos casos son análogos. (e) $(-n, n] \uparrow \mathbb{R}$ y $\mu((-n, n]) = F(n) - F(-n)$. ■

Corolario 3.5. *Las discontinuidades de una función de distribución, es decir, los átomos $\{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ de una medida de Lebesgue–Stieltjes, forman un conjunto numerable.*

Demostración. Para cada n , si $x_1, \dots, x_k \in (-n, n]$ son átomos distintos, entonces $\sum_{i \leq k} \mu(\{x_i\}) \leq \mu((-n, n]) < \infty$. Así $\sum_{x \in (-n, n]} \mu(\{x\}) < \infty$ en el sentido de la definición 1.13, y la proposición 1.16 dice que los átomos en $(-n, n]$ son numerables. Se toma la unión sobre n . ■

El resultado principal del capítulo es el recíproco de la proposición 3.4(a)–(b).

Teorema 3.6 (Medidas de Lebesgue–Stieltjes en $\mathbb{R}$). *Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha. Existe una única medida μ_F sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tal que*

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) \quad \text{para todos } a < b.$$

Además, $\mu_F = \mu_G$ si y solo si $F - G$ es constante, y toda medida de Lebesgue–Stieltjes μ sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es de la forma $\mu = \mu_F$, con F cualquiera de sus funciones de distribución.

Demostración de la unicidad. Si μ y ν son dos medidas con esa propiedad, coinciden y son finitas sobre el π -sistema $\{(a, b] : a < b\} \cup \{\emptyset\}$, que genera $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, y $(-n, n] \uparrow \mathbb{R}$; el teorema 2.17 da $\mu = \nu$. De aquí se siguen también las dos últimas afirmaciones: $\mu_F = \mu_G$ si y solo si F y G son funciones de distribución de la misma medida, lo que por la proposición 3.2 equivale a que difieran en una constante; y si μ es de Lebesgue–Stieltjes y F es una función de distribución suya, μ y μ_F coinciden en los intervalos $(a, b]$. La existencia de μ_F ocupa el resto del capítulo (teorema 3.14). ■

3.2 La premedida sobre los intervalos

Fijemos $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha, y consideremos la familia

$$\mathcal{I} = \{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq +\infty\},$$

que contiene a $\emptyset$, a los intervalos $(a, b]$, a las semirrectas $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ y a $\mathbb{R}$. Es un π -sistema, y el complemento de un elemento de $\mathcal{I}$ es unión disjunta de a lo sumo dos elementos de $\mathcal{I}$. En consecuencia, la familia $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ de las uniones disjuntas finitas de elementos de $\mathcal{I}$ es estable por intersecciones finitas y por complementos, es decir, es un álgebra de conjuntos; en particular, $I \setminus J \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ para $I, J \in \mathcal{I}$.

Definimos $\bar{\mu} : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty]$ por $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$ y

$$\bar{\mu}((a, b] \cap \mathbb{R}) = F(b) - F(a), \quad a < b,$$

donde $F(\pm\infty) \in \bar{\mathbb{R}}$ son los límites en $\pm\infty$ (y el resultado es $+\infty$ si alguno de ellos es infinito).

Lema 3.7 (Aditividad finita). *Si $I \in \mathcal{I}$ y $I = I_1 \uplus \cdots \uplus I_m$ con $I_j \in \mathcal{I}$, entonces $\bar{\mu}(I) = \sum_{j=1}^m \bar{\mu}(I_j)$. En consecuencia, $\bar{\mu}$ se extiende de manera única a una función finitamente aditiva sobre $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, que es monótona y finitamente subaditiva.*

Demostración. Descartando los I_j vacíos y reordenando, $I_j = (a_j, b_j] \cap \mathbb{R}$ con

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \cdots = a_m < b_m = b,$$

pues los intervalos son disjuntos y su unión es el intervalo $I = (a, b] \cap \mathbb{R}$ (entre dos intervalos consecutivos no puede quedar un hueco ni un solapamiento). La suma $\sum_j (F(b_j) - F(a_j))$ es entonces telescópica y vale $F(b) - F(a)$; todos los términos son no negativos, así que la cuenta es válida en $[0, +\infty]$.

Para la extensión, si $A = \uplus_i I_i = \uplus_k J_k$ son dos representaciones de $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, aplicando lo anterior a $I_i = \uplus_k (I_i \cap J_k)$ y a $J_k = \uplus_i (I_i \cap J_k)$ se ve que $\sum_i \bar{\mu}(I_i) = \sum_{i,k} \bar{\mu}(I_i \cap J_k) = \sum_k \bar{\mu}(J_k)$, de modo que $\bar{\mu}(A) = \sum_i \bar{\mu}(I_i)$ está bien definido, y es claramente finitamente aditivo. Si $A \subset B$ en $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, entonces $B = A \uplus (B \setminus A)$ con $B \setminus A \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, luego $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$. Finalmente, si $A \subset B_1 \cup \cdots \cup B_k$, escribiendo A como unión disjunta de los $A \cap B_j \setminus \bigcup_{i < j} B_i \subset B_j$ se obtiene $\bar{\mu}(A) \leq \sum_j \bar{\mu}(B_j)$. ■

Proposición 3.8 (σ -aditividad de $\bar{\mu}$). *Si $I \in \mathcal{I}$ e $I = \uplus_{j=1}^{\infty} I_j$ con $I_j \in \mathcal{I}$, entonces $\bar{\mu}(I) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(I_j)$.*

Demostración. ($\geq$) Para cada n , $\uplus_{j \leq n} I_j \subset I$ y, por el lema 3.7, $\sum_{j \leq n} \bar{\mu}(I_j) \leq \bar{\mu}(I)$. Se hace $n \rightarrow \infty$.

($\leq$) *Caso $I = (a, b]$ con $a < b$ reales.* Fijemos $\varepsilon > 0$. Por la continuidad por la derecha de F existe $p \in (a, b)$ con $F(p) - F(a) < \varepsilon$ y, para cada j con $I_j = (a_j, b_j] \neq \emptyset$ (acotado, pues $I_j \subset I$), existe $\tilde{b}_j > b_j$ con $F(\tilde{b}_j) - F(b_j) < \varepsilon 2^{-j}$. Entonces

$$[p, b] \subset (a, b] = \bigcup_j (a_j, b_j] \subset \bigcup_j (a_j, \tilde{b}_j).$$

Como $[p, b]$ es compacto, existe k con $[p, b] \subset \bigcup_{j \leq k} (a_j, \tilde{b}_j)$, y en particular $(p, b] \subset \bigcup_{j \leq k} (a_j, \tilde{b}_j]$. La subaditividad finita (lema 3.7) da

$$F(b) - F(p) \leq \sum_{j \leq k} (F(\tilde{b}_j) - F(a_j)) \leq \sum_{j \leq k} \left(\bar{\mu}(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(I_j) + \varepsilon.$$

Así $\bar{\mu}(I) = F(b) - F(a) < F(b) - F(p) + \varepsilon \leq \sum_j \bar{\mu}(I_j) + 2\varepsilon$, y ε es arbitrario.

Caso general. Para $n \in \mathbb{N}$, $I \cap (-n, n]$ es un intervalo acotado de la forma anterior (o vacío) y es unión disjunta de los $I_j \cap (-n, n] \in \mathcal{I}$. Por el caso ya probado y la monotonía,

$$\bar{\mu}(I \cap (-n, n]) \leq \sum_j \bar{\mu}(I_j \cap (-n, n]) \leq \sum_j \bar{\mu}(I_j),$$

y $\bar{\mu}(I \cap (-n, n]) \rightarrow \bar{\mu}(I)$ por la definición de $F(\pm\infty)$. ■

Dónde se usa la continuidad por la derecha. Solo en el paso ($\leq$), y dos veces: para “agrandar” cada $(a_j, b_j]$ a un abierto $(a_j, \tilde{b}_j)$ sin aumentar mucho su medida, y para “achicar” $(a, b]$ a un compacto $[p, b]$. Sin ella el argumento de compacidad no funciona y, de hecho, $\bar{\mu}$ no sería σ -aditiva.

3.3 Medidas exteriores

Definición 3.9 (Medida exterior). Una *medida exterior* sobre un conjunto X es una función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

- (I) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (II) (*monotonía*) si $E \subset E'$, entonces $\mu^*(E) \leq \mu^*(E')$;
- (III) (σ -*subaditividad*) $\mu^*(\bigcup_n E_n) \leq \sum_n \mu^*(E_n)$ para toda sucesión (E_n) de subconjuntos de X .

Proposición 3.10. Para $E \subset \mathbb{R}$ definimos

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(I_j) : I_j \in \mathcal{I}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Entonces μ^* es una medida exterior sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. El conjunto sobre el que se toma el ínfimo es no vacío, pues $E \subset \mathbb{R} \in \mathcal{I}$. (i) $\emptyset \subset \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, luego $\mu^*(\emptyset) = 0$. (ii) Todo cubrimiento de E' lo es de E . (iii) Podemos suponer $\sum_n \mu^*(E_n) < \infty$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y, para cada n , elijamos $(I_k^n)_k$ en $\mathcal{I}$ con $E_n \subset \bigcup_k I_k^n$ y $\sum_k \bar{\mu}(I_k^n) \leq \mu^*(E_n) + \varepsilon 2^{-n}$. La familia numerable $\{I_k^n\}_{n,k}$ cubre a $\bigcup_n E_n$ y, por el corolario 1.18,

$$\mu^*\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_{n,k} \bar{\mu}(I_k^n) \leq \sum_n \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definición 3.11 (Conjuntos μ^* -medibles). Sea μ^* una medida exterior sobre X . Un conjunto $A \subset X$ es μ^* -medible si

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \text{para todo } E \subset X.$$

Denotamos $\mathcal{M}_{\mu^*}$ la familia de los conjuntos μ^* -medibles.

Por subaditividad siempre vale $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, de modo que A es μ^* -medible si y solo si $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ para todo E con $\mu^*(E) < \infty$. La idea es que A “corta bien” a cualquier conjunto de prueba E .

3.4 El teorema de Carathéodory

Teorema 3.12 (Carathéodory). Sea μ^* una medida exterior sobre X . Entonces:

- (a) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es una σ -álgebra;
- (b) la restricción $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ es una medida;

(c) si $\mu^*(N) = 0$, entonces $N \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. En particular, el espacio de medida $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$ es completo (definición 3.16).

Demostración. Escribimos $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Paso 1: $\mathcal{M}$ es un álgebra. Claramente $X \in \mathcal{M}$, y $\mathcal{M}$ es estable por complementos porque la definición es simétrica en A y A^c . Sean $A, B \in \mathcal{M}$ y $E \subset X$. Usando que $B \in \mathcal{M}$ con los conjuntos de prueba $E \cap A$ y $E \cap A^c$, y luego que $A \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap A) &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c), \\ \mu^*(E \cap A^c) &= \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c), \\ \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).\end{aligned}$$

Como $E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B)$ y $E \cap (A \cup B)^c = E \cap A^c \cap B^c$, la subaditividad y las tres identidades dan

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E).$$

Luego $A \cup B \in \mathcal{M}$.

Paso 2: aditividad sobre conjuntos de prueba. Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ disjuntos y $B_n = A_1 \uplus \dots \uplus A_n$. Para todo $E \subset X$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j). \quad (3.1)$$

En efecto, para $n = 1$ es trivial, y si vale para $n - 1$, usando que $A_n \in \mathcal{M}$ con el conjunto de prueba $E \cap B_n$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).$$

Paso 3: uniones numerables. Sean $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$. Reemplazando A_j por $A_j \setminus \bigcup_{i < j} A_i$, que está en $\mathcal{M}$ por el paso 1, podemos suponerlos disjuntos. Sea $D = \biguplus_j A_j$ y B_n como antes. Como $B_n \in \mathcal{M}$ y $D^c \subset B_n^c$, para todo E

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap D^c).$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ y usando la σ -subaditividad,

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap D^c) \geq \mu^*(E \cap D) + \mu^*(E \cap D^c) \geq \mu^*(E). \quad (3.2)$$

Todas las desigualdades son igualdades, y en particular $D \in \mathcal{M}$. Esto prueba (a).

Paso 4: σ -aditividad. Tomando $E = D$ en (3.2) se obtiene $\mu^*(D) = \sum_j \mu^*(A_j)$, lo que prueba (b).

Paso 5. Si $\mu^*(N) = 0$, para todo E la monotonía da $\mu^*(E \cap N) = 0$ y $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap N^c) = \mu^*(E \cap N) + \mu^*(E \cap N^c)$, luego $N \in \mathcal{M}$. Si $A \in \mathcal{M}$ tiene medida nula y $N \subset A$, entonces $\mu^*(N) = 0$ y $N \in \mathcal{M}$: el espacio es completo. ■

3.5 Existencia de las medidas de Lebesgue–Stieltjes

Volvamos a la medida exterior μ^* construida a partir de F en la proposición 3.10.

Proposición 3.13. *Se cumple que*

- (a) $\mu^*(I) = \bar{\mu}(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$;
- (b) $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ y, en consecuencia, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Demostración. (a) Tomando el cubrimiento $I, \emptyset, \emptyset, \dots$ se ve que $\mu^*(I) \leq \bar{\mu}(I)$. Recíprocamente, sea $I \subset \bigcup_j I_j$ con $I_j \in \mathcal{I}$. Los conjuntos $I \cap I_j \setminus \bigcup_{i < j} I_i$ son disjuntos, están en $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ y su unión es I ; escribiendo cada uno como unión disjunta finita de elementos de $\mathcal{I}$, obtenemos una partición numerable de I en elementos de $\mathcal{I}$. La proposición 3.8 y la monotonía del lema 3.7 dan

$$\bar{\mu}(I) = \sum_j \bar{\mu}\left(I \cap I_j \setminus \bigcup_{i < j} I_i\right) \leq \sum_j \bar{\mu}(I_j).$$

Tomando ínfimo sobre los cubrimientos, $\bar{\mu}(I) \leq \mu^*(I)$.

(b) Sea $J \in \mathcal{I}$ y $E \subset \mathbb{R}$ con $\mu^*(E) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $E \subset \bigcup_j I_j$ con $I_j \in \mathcal{I}$ y $\sum_j \bar{\mu}(I_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Entonces $E \cap J \subset \bigcup_j (I_j \cap J)$ y $E \cap J^c \subset \bigcup_j (I_j \setminus J)$, donde $I_j \cap J \in \mathcal{I}$ e $I_j \setminus J$ es unión disjunta de a lo sumo dos elementos de $\mathcal{I}$, digamos K_j, K'_j . Por la aditividad finita, $\bar{\mu}(I_j) = \bar{\mu}(I_j \cap J) + \bar{\mu}(K_j) + \bar{\mu}(K'_j)$, y por lo tanto

$$\mu^*(E \cap J) + \mu^*(E \cap J^c) \leq \sum_j \bar{\mu}(I_j \cap J) + \sum_j (\bar{\mu}(K_j) + \bar{\mu}(K'_j)) = \sum_j \bar{\mu}(I_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Así $J \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Como $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es una σ -álgebra que contiene a los intervalos $(a, b]$, contiene a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (proposición 2.21). ■

Teorema 3.14 (Existencia). *Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha, y μ^* la medida exterior de la proposición 3.10. Entonces $\mu_F = \mu^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ es una medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ con $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ para todos $a < b$.*

Demostración. Por el teorema 3.12, μ^* es una medida sobre $\mathcal{M}_{\mu^*} \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, y por la proposición 3.13(a), $\mu^*((a, b]) = \bar{\mu}((a, b]) = F(b) - F(a)$. ■

Esto completa la demostración del teorema 3.6. En resumen, tenemos

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_{\mu^*} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \mu_F = \mu^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}},$$

donde $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ es una medida que extiende a μ_F , mientras que sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ la función μ^* es solo una medida exterior.

Definición 3.15 (Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$). La medida $m = \mu_F$ asociada a $F(x) = x$ se llama *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$. Es la única medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ con $m((a, b]) = b - a$ para todos $a < b$.

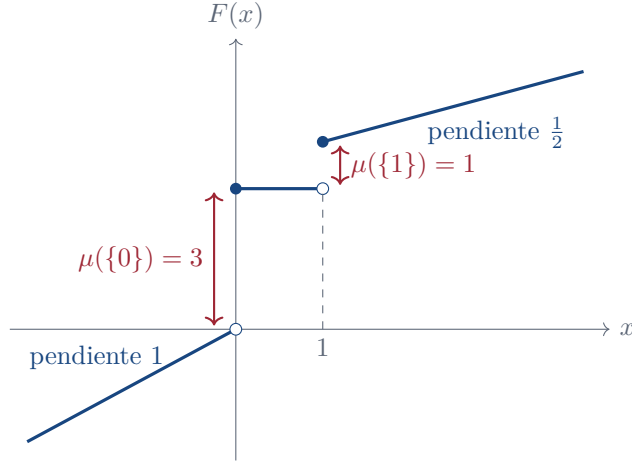


Figura 3.1: La función de distribución del ejercicio 3.22. Cada salto de F es un átomo de μ_F , cuya masa es la altura del salto; en los tramos donde F es derivable, μ_F tiene densidad F' .

3.6 Compleción de medidas

Definición 3.16 (Espacio de medida completo). Un espacio de medida $(X, \mathcal{H}, \nu)$ es *completo* si todo subconjunto de un conjunto de medida nula es medible: si $A \in \mathcal{H}$, $\nu(A) = 0$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathcal{H}$ (y, por monotonía, $\nu(B) = 0$).

Por el teorema 3.12(c), $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$ es siempre completo. Todo espacio de medida puede completarse de manera canónica.

Proposición 3.17 (Compleción). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y

$$\mathcal{N} = \{N \subset X : N \subset Z \text{ para algún } Z \in \mathcal{F} \text{ con } \mu(Z) = 0\},$$

$$\overline{\mathcal{F}}^\mu = \{E \cup N : E \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}.$$

Entonces $\overline{\mathcal{F}}^\mu$ es una σ -álgebra, la fórmula $\bar{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$ define sin ambigüedad una medida sobre ella que extiende a μ , y $(X, \overline{\mathcal{F}}^\mu, \bar{\mu})$ es completo. Además, si $(X, \mathcal{H}, \nu)$ es un espacio de medida completo con $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ y $\nu|_{\mathcal{F}} = \mu$, entonces $\overline{\mathcal{F}}^\mu \subset \mathcal{H}$ y $\nu|_{\overline{\mathcal{F}}^\mu} = \bar{\mu}$. El espacio $(X, \overline{\mathcal{F}}^\mu, \bar{\mu})$ se llama *compleción* de $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Demostración. Buena definición. Si $E \cup N = E' \cup N'$ con $N \subset Z$, $N' \subset Z'$ nulos, entonces $E \subset E' \cup Z'$, luego $\mu(E) \leq \mu(E') + \mu(Z') = \mu(E')$, y por simetría $\mu(E) = \mu(E')$.

σ -álgebra. Es estable por uniones numerables porque $\mathcal{F}$ lo es y una unión numerable de conjuntos nulos está contenida en un conjunto nulo. Para complementos, si $N \subset Z$,

$$(E \cup N)^c = (E \cup Z)^c \cup (Z \setminus (E \cup N)),$$

con $(E \cup Z)^c \in \mathcal{F}$ y $Z \setminus (E \cup N) \subset Z$.

Medida y completitud. Si los $E_n \cup N_n$ son disjuntos, también lo son los E_n , y $\bar{\mu}(\biguplus_n (E_n \cup N_n)) = \mu(\biguplus_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$. Si $\bar{\mu}(E \cup N) = 0$ y $B \subset E \cup N \subset E \cup Z$, entonces $B = \emptyset \cup B$ con $B \in \mathcal{N}$, pues $\mu(E \cup Z) = 0$.

Minimalidad. Si $(X, \mathcal{H}, \nu)$ es completo y extiende a μ , cada $N \in \mathcal{N}$ está contenido en un $Z \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ con $\nu(Z) = 0$, luego $N \in \mathcal{H}$ y $\nu(N) = 0$. Así $E \cup N \in \mathcal{H}$ y $\mu(E) \leq \nu(E \cup N) \leq \mu(E) + \nu(N) = \mu(E)$. ■

Ejemplo 3.18. (a) Para la medida de Dirac δ_a sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, todo subconjunto de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ es nulo, de modo que $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\delta_a} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
 (b) La σ -álgebra de Lebesgue de la recta es la completación de los borelianos respecto de la medida de Lebesgue: $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^m$. Seguimos denotando m a la medida completada.

Proposición 3.19. Sea F creciente y continua por la derecha, μ_F la medida asociada y μ^* su medida exterior. Entonces $\mathcal{M}_{\mu^*} = \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\mu_F}$. En particular, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Demostración. Como $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es completa y contiene a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la proposición 3.17 da $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\mu_F} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. Recíprocamente, observemos primero que para todo $A \subset \mathbb{R}$ con $\mu^*(A) < \infty$ existe $G \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ con $A \subset G$ y $\mu_F(G) = \mu^*(A)$: para cada n existe un cubrimiento $A \subset G_n = \bigcup_j I_j^n$ con $I_j^n \in \mathcal{I}$ y $\mu_F(G_n) \leq \sum_j \bar{\mu}(I_j^n) \leq \mu^*(A) + 1/n$, y basta tomar $G = \bigcap_n G_n$. Sea ahora $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ con $\mu^*(A) < \infty$ y G como antes. Como A y G están en $\mathcal{M}_{\mu^*}$, $\mu^*(G \setminus A) = \mu^*(G) - \mu^*(A) = 0$; aplicando la misma observación a $G \setminus A$ obtenemos un boreliano $Z \supset G \setminus A$ con $\mu_F(Z) = 0$. Así $A = (G \setminus Z) \cup (A \cap Z)$ pertenece a $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\mu_F}$. Si $\mu^*(A) = \infty$, se aplica lo anterior a $A \cap (-n, n]$, de medida finita, y se toma la unión sobre n . ■

3.7 La medida de Lebesgue en la recta

Proposición 3.20. Sean $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $A + x \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $\lambda A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y

$$m(A + x) = m(A), \quad m(\lambda A) = |\lambda| m(A).$$

Además, todo conjunto numerable es Lebesgue medible y de medida nula.

Demostración. Borelianos. Si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, entonces $A + x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (proposición 2.22), y $A \mapsto m(A + x)$ es una medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ que vale $b - a$ en $(a, b]$; por unicidad (corolario 2.24) coincide con m . Para $\lambda \neq 0$, el mismo argumento que en la proposición 2.22 (con la biyección continua $y \mapsto \lambda y$) muestra que $\lambda A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, y $A \mapsto m(\lambda A)$ es una medida que vale $|\lambda|(b - a)$ en $(a, b]$, pues $\lambda(a, b]$ es un intervalo de longitud $|\lambda|(b - a)$ (abierto o cerrado en un extremo según el signo de λ , lo que no altera su medida por la proposición 3.4); luego $m(\lambda A) = |\lambda| m(A)$.

Puntos y numerables. $m(\{x\}) = \lim_n m((x - 1/n, x]) = 0$, y un conjunto numerable es unión numerable de puntos. Esto cubre también el caso $\lambda = 0$, en que $\lambda A \subset \{0\}$.

Lebesgue medibles. Si $A = E \cup N$ con $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $N \subset Z \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $m(Z) = 0$, entonces $A + x = (E + x) \cup (N + x)$ con $N + x \subset Z + x$ y $m(Z + x) = 0$; así $A + x \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y $m(A + x) = m(E + x) = m(E) = m(A)$. El caso de λA es idéntico. ■

Corolario 3.21. Si μ es una medida de Lebesgue–Stieltjes sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ o sobre $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, invariante por traslaciones, entonces $\mu = c m$ con $c = \mu((0, 1])$.

Demostración. Sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es el teorema 2.25 con $\nu = m$. Si μ está definida en $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y $N \subset Z$ con Z boreliano y $m(Z) = 0$, entonces $\mu(N) \leq \mu(Z) = cm(Z) = 0$, de modo que $\mu(E \cup N) = \mu(E) = cm(E) = cm(E \cup N)$. ■

3.8 Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.22. Sea

$$F(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < 1, \\ 4 + \frac{x-1}{2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Verifique que F es creciente y continua por la derecha, y describa μ_F .

Solución. F es creciente y continua salvo en 0 y en 1, donde es continua por la derecha: $F(0^-) = 0 < 3 = F(0)$ y $F(1^-) = 3 < 4 = F(1)$ (figura 3.1). Por la proposición 3.4, $\mu_F(\{0\}) = 3$ y $\mu_F(\{1\}) = 1$, mientras que $\mu_F((a, b]) = b - a$ si $a < b < 0$, $\mu_F((0, 1)) = F(1^-) - F(0) = 0$ y $\mu_F((a, b]) = \frac{1}{2}(b - a)$ si $1 \leq a < b$. Por el corolario 2.24,

$$\mu_F = m|_{(-\infty, 0)} + 3\delta_0 + \delta_1 + \frac{1}{2}m|_{(1, \infty)},$$

donde $m|_B(A) = m(A \cap B)$; ambos lados coinciden en todos los intervalos $(a, b]$. Por ejemplo, $\mu_F([1, 3]) = F(3) - F(1^-) = 5 - 3 = 2$. ■

Ejercicio 3.23. Sea $q_1, q_2, \dots$ una enumeración de $\mathbb{Q}$ y $\mu = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_{q_n}$. Pruebe que μ es una probabilidad sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y que $F(x) = \mu((-\infty, x])$ es estrictamente creciente, continua en todo irracional y discontinua en todo racional.

Solución. μ es una medida por el ejemplo 2.10, y $\mu(\mathbb{R}) = \sum_n 2^{-n} = 1$. Por la observación 3.3, F es una función de distribución de μ . Si $a < b$, el intervalo $(a, b]$ contiene algún racional q_n , de modo que $F(b) - F(a) = \mu((a, b]) \geq 2^{-n} > 0$: F es estrictamente creciente. Por la proposición 3.4(c), el salto de F en x es $\mu(\{x\})$, que vale 2^{-n} si $x = q_n$ y 0 si x es irracional. ■

Ejercicio 3.24. Sea $C \subset [0, 1]$ el conjunto de Cantor, obtenido quitando sucesivamente los tercios centrales abiertos. Pruebe que C es un compacto no numerable con $m(C) = 0$.

Solución. $C = \bigcap_n C_n$, donde C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados de longitud 3^{-n} ; es cerrado y acotado, luego compacto y boreliano, y $m(C) \leq m(C_n) = (2/3)^n \rightarrow 0$. Los puntos de C son exactamente los $x \in [0, 1]$ que admiten un desarrollo ternario $x = \sum_k \epsilon_k 3^{-k}$ con $\epsilon_k \in \{0, 2\}$, y la aplicación $(\epsilon_k) \mapsto \sum_k (\epsilon_k/2) 2^{-k}$ es sobreyectiva de C en $[0, 1]$, luego C no es numerable. Así, la recíproca de la última afirmación de la proposición 3.20 es falsa: hay conjuntos no numerables de medida nula. ■

CAPÍTULO 4

Funciones medibles

4.1 Definición y criterio de los generadores

Definición 4.1 (Función medible). Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles. Una función $f : X \rightarrow Y$ es $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ -medible si $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{H}$. Cuando $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{R}^k$ sobreentendemos $\mathcal{H} = \mathcal{B}_Y$, y denotamos

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es } (\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})\text{-medible}\}.$$

Si $X \subset \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{F} = \mathcal{B}_X$, decimos que f es *boreliana*.

Es inmediato que si f es $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ -medible, $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$, entonces f es $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{H}})$ -medible. También es inmediato que la composición de funciones medibles es medible: si $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{H})$ y $g : (Y, \mathcal{H}) \rightarrow (Z, \Sigma)$ son medibles, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{F}$.

Proposición 4.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$. Entonces

$$\sigma(\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}) = \{f^{-1}(E) : E \in \sigma(\mathcal{C})\}.$$

Demostración. Denotemos $\mathcal{G}$ al miembro izquierdo. La familia $\{f^{-1}(E) : E \in \sigma(\mathcal{C})\}$ es una σ -álgebra, porque la preimagen conmuta con complementos y uniones, y contiene a $f^{-1}(C)$ para $C \in \mathcal{C}$; luego contiene a $\mathcal{G}$. Recíprocamente, sea

$$\mathcal{D} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{G}\}.$$

Por la misma razón, $\mathcal{D}$ es una σ -álgebra, y contiene a $\mathcal{C}$. Luego $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$, es decir, $f^{-1}(E) \in \mathcal{G}$ para todo $E \in \sigma(\mathcal{C})$. ■

Corolario 4.3 (Criterio de los generadores). Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ con $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{H}$. Si $f^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces f es medible.

Demostración. Por la proposición 4.2, $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{H}\} = \sigma\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{F}$. ■

Así, para verificar que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible basta ver que $\{f \leq a\} \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, o que $\{f > a\} \in \mathcal{F}$ para todo a , o que $f^{-1}(O) \in \mathcal{F}$ para todo abierto O : cada una de esas familias de conjuntos genera $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Definición 4.4. Si $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{H})$, la familia $\sigma(f) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{H}\}$ es una σ -álgebra sobre X : la menor que hace medible a f . Si $g : (Y, \mathcal{H}) \rightarrow (Z, \Sigma)$ es medible, entonces $\sigma(g \circ f) \subset \sigma(f)$.

Ejemplo 4.5 (Borelianos de un subconjunto). Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ con la topología relativa $\tau_E = \{E \cap O : O \text{ abierto de } \mathbb{R}^d\}$. Aplicando la proposición 4.2 a la inclusión $\iota : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ y a $\mathcal{C} = \{\text{abiertos de } \mathbb{R}^d\}$, como $\iota^{-1}(A) = E \cap A$,

$$\sigma(\tau_E) = \{E \cap A : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\} = \mathcal{B}_E.$$

Es decir, la σ -álgebra traza de los borelianos coincide con la σ -álgebra de Borel de E como espacio topológico. Si $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ (por ejemplo, si E es abierto), entonces $\mathcal{B}_E = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} : A \subset E\}$.

4.2 Funciones borelianas en $\mathbb{R}^d$

Proposición 4.6. Sean $D \subset \mathbb{R}^d$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$.

- (a) Si f es continua, entonces f es boreliana.
- (b) Si existe $E \subset D$ numerable tal que f es continua en todo punto de $D \setminus E$, entonces f es boreliana.

Demostración. (a) Si O es abierto en $\mathbb{R}^k$, $f^{-1}(O)$ es abierto relativo de D , luego está en $\mathcal{B}_D$ (ejemplo 4.5); se aplica el corolario 4.3.

(b) Sea $O \subset \mathbb{R}^k$ abierto. La restricción $g = f|_{D \setminus E}$ es continua en todo punto de su dominio, luego $g^{-1}(O)$ es un abierto relativo de $D \setminus E$ y, en particular, pertenece a $\mathcal{B}_{D \setminus E} \subset \mathcal{B}_D$ (pues $D \setminus E$ difiere de D en un conjunto numerable, que es boreliano). Así

$$f^{-1}(O) = g^{-1}(O) \cup (E \cap f^{-1}(O))$$

es unión de un elemento de $\mathcal{B}_D$ y de un conjunto numerable. ■

Proposición 4.7 (Componentes). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f = (f_1, \dots, f_k) : X \rightarrow \mathbb{R}^k$. Entonces f es medible si y solo si cada $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible.

Demostración. $(\Rightarrow)$ $f_i = \pi_i \circ f$, con $\pi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección, que es continua. $(\Leftarrow)$ Las cajas cerradas generan $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ (proposición 2.21) y

$$f^{-1}\left(\prod_{i=1}^k [a_i, b_i]\right) = \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}([a_i, b_i]) \in \mathcal{F}. \quad \blacksquare$$

Corolario 4.8 (Operaciones). Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ y $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es boreliana, entonces $\varphi(f, g) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. En particular $f + g$, fg , af ($a \in \mathbb{R}$), $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$, $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(-f, 0)$ son medibles, y $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un espacio vectorial.

Demostración. $\varphi(f, g) = \varphi \circ (f, g)$ es composición de funciones medibles, por la proposición 4.7; las funciones $(x, y) \mapsto x + y$, xy , $\max(x, y), \dots$ son continuas. ■

4.3 Funciones con valores en la recta extendida

Supremos, ínfimos y límites de funciones reales pueden tomar los valores $\pm\infty$, de modo que conviene permitirlos desde el principio.

Definición 4.9. La σ -álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ es

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

Una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible si es $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ -medible. Denotamos $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ al conjunto de las funciones medibles $f : X \rightarrow [0, +\infty]$.

Es fácil ver que $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ es una σ -álgebra y que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{B \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} : B \subset \mathbb{R}\}$. En consecuencia, una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -medible si y solo si lo es como función a valores en $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposición 4.10. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} = \sigma\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} = \sigma\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$. En particular, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y solo si $\{f \leq a\} \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (o $\{f \geq a\} \in \mathcal{F}$, o $\{f < a\} \in \mathcal{F}$).

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \sigma\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$. Cada $[-\infty, a] = \{-\infty\} \cup (-\infty, a]$ está en $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, luego $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Recíprocamente, $\mathcal{G}$ contiene a $(a, b] = [-\infty, b] \setminus [-\infty, a]$, luego a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (proposición 2.21); contiene a $\{-\infty\} = \bigcap_n [-\infty, -n]$ y a $\{+\infty\} = (\bigcup_n [-\infty, n])^c$; así contiene a todos los elementos de $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Las otras dos familias se tratan igual, usando $[a, +\infty] = [-\infty, a)^c$ y $[-\infty, a] = \bigcap_n [-\infty, a + \frac{1}{n}]$. ■

Proposición 4.11. Sean $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, medibles. Entonces las funciones

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n$$

(definidas punto a punto) son medibles.

Demostración. Sean $\varphi = \sup_n f_n$ y $\psi = \inf_n f_n$. Para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\{\varphi \leq a\} = \bigcap_n \{f_n \leq a\} \in \mathcal{F}, \quad \{\psi \geq a\} = \bigcap_n \{f_n \geq a\} \in \mathcal{F},$$

y la proposición 4.10 da la medibilidad de φ y ψ . Luego $\varphi_k = \sup_{n \geq k} f_n$ es medible para cada k , y también $\limsup_n f_n = \inf_k \varphi_k$; el caso del $\liminf$ es análogo. ■

Corolario 4.12. Si $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ y $f_n(x) \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$, entonces $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Lo mismo vale para funciones a valores en $\overline{\mathbb{R}}$.

Demostración. $f = \limsup_n f_n$. ■

Proposición 4.13. Si $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son medibles, los conjuntos $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$ y $\{f = g\}$ son medibles. Si además $f, g \geq 0$, entonces $f + g$ es medible.

Demostración. Por la densidad de $\mathbb{Q}$,

$$\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{r < g\}) \in \mathcal{F},$$

y entonces $\{f \leq g\} = \{g < f\}^c$ y $\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{g \leq f\}$. Si $f, g \geq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{g < a - r\}) :$$

si $f(x) + g(x) < a$ ambos valores son finitos y basta tomar $r \in \mathbb{Q}$ con $f(x) < r < a - g(x)$. Se aplica la proposición 4.10. ■

4.4 Funciones simples

Definición 4.14 (Funciones simples). Una función $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *simple* si es medible y toma finitos valores. Denotamos $\mathcal{S}(X, \mathcal{F})$ al conjunto de las funciones simples y $\mathcal{S}_+(X, \mathcal{F})$ al de las simples no negativas.

Si s toma los valores distintos $a_1, \dots, a_m$, entonces

$$s = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad A_i = \{s = a_i\} \in \mathcal{F}, \quad (4.1)$$

con $X = A_1 \uplus \dots \uplus A_m$; es la *representación canónica* de s . Recíprocamente, toda combinación lineal finita $\sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$ con $A_i \in \mathcal{F}$ es simple. Recordemos que $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ y $\mathbf{1}_{A_1 \uplus \dots \uplus A_n} = \sum_i \mathbf{1}_{A_i}$.

Proposición 4.15 (Aproximación por funciones simples). Para toda $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ existe una sucesión (s_n) en $\mathcal{S}_+(X, \mathcal{F})$ con $s_n \uparrow f$ puntualmente. Más precisamente, se puede tomar

$$s_n = \varphi_n \circ f, \quad \varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbf{1}_{[i2^{-n}, (i+1)2^{-n})}(t) + n \mathbf{1}_{[n, +\infty)}(t), \quad t \in [0, +\infty],$$

y entonces $0 \leq f - s_n \leq 2^{-n}$ sobre $\{f < n\}$. En particular, si f es acotada, la convergencia es uniforme.

Demostración. Cada $\varphi_n : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ es boreliana y toma finitos valores, de modo que s_n es simple. Si $t < n$, $\varphi_n(t)$ es el mayor múltiplo de 2^{-n} menor o igual que t , y $0 \leq t - \varphi_n(t) < 2^{-n}$. Además $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$: si $t < n$, el mayor múltiplo de $2^{-(n+1)}$ que no supera a t es al menos el mayor múltiplo de 2^{-n} que no lo supera; si $t \geq n$, $\varphi_{n+1}(t) \geq n = \varphi_n(t)$. Así $\varphi_n(t) \uparrow t$ para $t \in [0, \infty)$, y $\varphi_n(+\infty) = n \uparrow +\infty$. ■

Corolario 4.16. Para toda $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ existe una sucesión (s_n) en $\mathcal{S}(X, \mathcal{F})$ con $s_n \rightarrow f$ puntualmente y $|s_n| \leq |f|$ para todo n .

Demostración. Tomar $s_n = \varphi_n \circ f^+ - \varphi_n \circ f^-$. Como f^+ y f^- no se anulan simultáneamente, en cada punto s_n es $\varphi_n(f^+) \leq f^+$ o $-\varphi_n(f^-)$, con $\varphi_n(f^-) \leq f^-$; así $|s_n| \leq |f|$, y $s_n \rightarrow f^+ - f^- = f$. ■

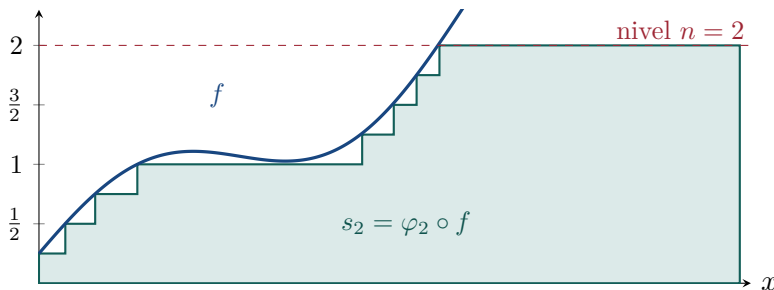


Figura 4.1: La aproximación de la proposición 4.15 con $n = 2$: se redondea f hacia abajo al múltiplo de 2^{-2} más cercano y se trunca a la altura 2. La partición se hace en el *conjunto de llegada*, no en el dominio.

4.5 Propiedades en casi todo punto

Definición 4.17. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Una propiedad $P(x)$ vale en *casi todo punto* (μ -c.t.p.) si el conjunto de los x donde $P(x)$ es falsa está contenido en un conjunto $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$.

Por ejemplo, para f, g medibles, $f = g$ μ -c.t.p. significa $\mu\{f \neq g\} = 0$, y $f \leq g$ μ -c.t.p. significa $\mu\{f > g\} = 0$ (estos conjuntos son medibles por la proposición 4.13). Si f_n y f son medibles, el conjunto

$$\{f_n \rightarrow f\} = \{\liminf_n f_n = f\} \cap \{\limsup_n f_n = f\}$$

es medible, y $f_n \rightarrow f$ μ -c.t.p. significa $\mu(\{f_n \rightarrow f\}^c) = 0$. Análogamente, $f_n \uparrow f$ μ -c.t.p. significa que el conjunto medible $\bigcap_n \{f_n \leq f_{n+1}\} \cap \{f_n \rightarrow f\}$ tiene complemento nulo.

Observación 4.18. En un espacio de medida completo, si f es medible y $g = f$ μ -c.t.p., entonces g es medible: para todo boreliano B , $g^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \cap \{f = g\}) \cup (g^{-1}(B) \cap \{f \neq g\})$, donde el segundo conjunto es subconjunto de un conjunto nulo. Sin completitud esto es falso.

4.6 Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.19. Sean $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles. Pruebe que el conjunto $\{x \in X : (f_n(x)) \text{ converge a un número real}\}$ es medible, y también el conjunto $\{\sum_n |f_n| < \infty\}$.

Solución. Sean $\varphi = \limsup_n f_n$ y $\theta = \liminf_n f_n$, medibles a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ (proposición 4.11). Por la proposición 1.9, $(f_n(x))$ converge a un real si y solo si $\varphi(x) = \theta(x) \in \mathbb{R}$, de modo que el conjunto buscado es $\{\varphi = \theta\} \cap \varphi^{-1}(\mathbb{R})$, medible por la proposición 4.13. (No conviene escribirlo como $\{\varphi - \theta = 0\}$, porque $\varphi - \theta$ puede no estar definido cuando ambos valen $+\infty$.) Para el segundo conjunto, $g = \sum_n |f_n| = \sup_m \sum_{n \leq m} |f_n|$ es medible por las Proposiciones 4.11 y 4.13, y $\{g < \infty\} = g^{-1}(\mathbb{R})$. ■

Ejercicio 4.20. Sean $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ borelianas, con $D \subset \mathbb{R}^m$. Pruebe que $\varphi = f \cdot g + h$ es boreliana.

Solución. $\varphi = \psi \circ (f, g, h)$ con $\psi(x, y, z) = xy + z$ continua de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. La aplicación $(f, g, h) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ es boreliana por la proposición 4.7, y ψ lo es por la proposición 4.6; la composición de medibles es medible. ■

CAPÍTULO 5

La integral de Lebesgue

A lo largo del capítulo fijamos un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

5.1 Integral de funciones simples no negativas

Definición 5.1. Para $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{F})$ con representación canónica $s = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}$ ((4.1)) definimos

$$\int s \, d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \in [0, +\infty],$$

con la convención $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Lema 5.2. Si $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{D_j}$ con $\alpha_j \geq 0$ y $X = D_1 \uplus \dots \uplus D_k$, $D_j \in \mathcal{F}$, donde los α_j pueden repetirse, entonces $\int s \, d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(D_j)$.

Demostración. Agrupemos los índices según el valor: $\{1, \dots, k\} = J_1 \uplus \dots \uplus J_m$ con $\alpha_j = a_i$ para $j \in J_i$ y $a_1, \dots, a_m$ distintos. Entonces $A_i = \{s = a_i\} = \biguplus_{j \in J_i} D_j$ y, por la aditividad finita de μ ,

$$\int s \, d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j \in J_i} \mu(D_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in J_i} \alpha_j \mu(D_j) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(D_j). \quad \blacksquare$$

Proposición 5.3. Sean $s, t \in \mathcal{S}_+$ y $c \geq 0$. Entonces

$$\int (s + t) \, d\mu = \int s \, d\mu + \int t \, d\mu, \quad \int cs \, d\mu = c \int s \, d\mu,$$

y si $s \leq t$, entonces $\int s \, d\mu \leq \int t \, d\mu$. Además, $\int \mathbf{1}_A \, d\mu = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Demostración. Sean $s = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$ y $t = \sum_j b_j \mathbf{1}_{B_j}$ canónicas. Como $X = \biguplus_{i,j} (A_i \cap B_j)$ y $s + t = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$, el lema 5.2 da

$$\int (s + t) \, d\mu = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_i a_i \mu(A_i) + \sum_j b_j \mu(B_j).$$

La homogeneidad es inmediata. Si $s \leq t$, entonces $h = t - s \in \mathcal{S}_+$ y $\int t = \int s + \int h \geq \int s$. ■

Por la aditividad, $\int \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i} \, d\mu = \sum_i a_i \mu(A_i)$ para cualquier representación con $a_i \geq 0$ y $A_i \in \mathcal{F}$, no necesariamente disjuntos.

Ejemplo 5.4. Si $X = \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ y μ es la medida de contar, toda $a : X \rightarrow [0, \infty)$ es simple y $\int a d\mu = \sum_{i=1}^k a(i) \mu(\{i\}) = \sum_{i=1}^k a(i)$.

Ejemplo 5.5 (La función de Dirichlet). Sea $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [a, b]}$ sobre $[a, b]$. Toda partición de $[a, b]$ tiene subintervalos que contienen racionales e irracionales, de modo que las sumas superiores de Riemann valen $b - a$ y las inferiores 0: f no es Riemann integrable. En cambio f es simple y

$$\int_{[a, b]} f d\mu = m(\mathbb{Q} \cap [a, b]) = 0,$$

pues $\mathbb{Q}$ es numerable (proposición 3.20).

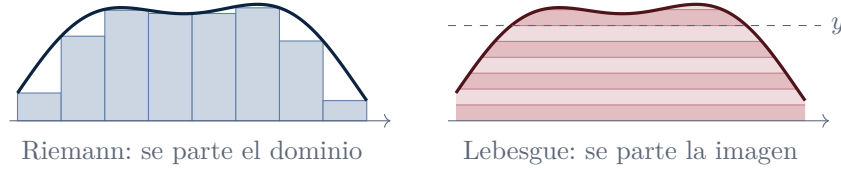


Figura 5.1: Riemann aproxima el área bajo la gráfica con rectángulos verticales sobre una partición del dominio. Lebesgue la corta en franjas horizontales: la franja a la altura y tiene “ancho” $\mu\{f > y\}$, que tiene sentido para cualquier función medible, por irregular que sea su dominio.

5.2 Integral de funciones medibles positivas

Definición 5.6. Para $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ definimos

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{F}), s \leq f \right\} \in [0, +\infty].$$

También escribimos $\int_X f d\mu$ o $\int f(x) \mu(dx)$, y $\int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu$ para $A \in \mathcal{F}$.

Por la monotonía de la proposición 5.3, esta definición coincide con la anterior cuando $f \in \mathcal{S}_+$. Es claro que si $0 \leq f \leq g$ entonces $\int f \leq \int g$ (todo $s \leq f$ satisface $s \leq g$), y que $\int cf = c \int f$ para $c \geq 0$ (si $c > 0$, $s \leq f$ si y solo si $cs \leq cf$).

Ejemplo 5.7. Sea $A \in \mathcal{F}$ y $f = +\infty \cdot \mathbf{1}_A$. Si $\mu(A) = 0$, toda $s \in \mathcal{S}_+$ con $s \leq f$ está acotada por una constante K y se anula fuera de A , luego $\int s \leq K\mu(A) = 0$ y $\int f = 0$. Si $\mu(A) > 0$, para todo $K > 0$ la función $K\mathbf{1}_A \leq f$ da $\int f \geq K\mu(A)$, luego $\int f = +\infty$.

Teorema 5.8 (Convergencia monótona). Sean $f_n \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ con $f_n \uparrow f$ puntualmente. Entonces $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ y

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu.$$

Demostración. $f = \sup_n f_n$ es medible (proposición 4.11). Por monotonía, $\int f_n$ es creciente y acotada por $\int f$, luego converge a un $L \leq \int f$. Para la otra desigualdad, sea $s = \sum_j a_j \mathbf{1}_{A_j} \in \mathcal{S}_+$ con $s \leq f$, y fijemos $\lambda \in (0, 1)$. Los conjuntos

$$X_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \lambda s(x)\}$$

son medibles (proposición 4.13), crecientes, y $X_n \uparrow X$: si $s(x) = 0$, entonces $x \in X_1$; si $s(x) > 0$, entonces $\lambda s(x) < s(x) \leq f(x)$ y, como $f_n(x) \uparrow f(x)$, se tiene $f_n(x) \geq \lambda s(x)$ para n grande. Como $f_n \geq \lambda s \mathbf{1}_{X_n}$,

$$\int f_n d\mu \geq \int \lambda s \mathbf{1}_{X_n} d\mu = \lambda \sum_j a_j \mu(A_j \cap X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \sum_j a_j \mu(A_j) = \lambda \int s d\mu,$$

por la continuidad por abajo de μ . Así $L \geq \lambda \int s$ para todo $\lambda < 1$, es decir $L \geq \int s$, y tomando supremo sobre s , $L \geq \int f$. ■

Corolario 5.9. Sean $f, g, f_n \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$.

- (a) Si $s_n \in \mathcal{S}_+$ y $s_n \uparrow f$, entonces $\int f d\mu = \lim_n \int s_n d\mu$.
- (b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
- (c) $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.
- (d) Si $A_n \uparrow B$ en $\mathcal{F}$, entonces $\int_{A_n} f d\mu \uparrow \int_B f d\mu$; y si $D = \bigsqcup_j A_j$ con $A_j \in \mathcal{F}$, entonces $\int_D f d\mu = \sum_j \int_{A_j} f d\mu$.

Demostración. (a) es el teorema 5.8. (b) Si $s_n \uparrow f$ y $t_n \uparrow g$ son simples (proposición 4.15), entonces $s_n + t_n \uparrow f + g$ y, por (a) y la proposición 5.3, $\int (f + g) = \lim_n (\int s_n + \int t_n) = \int f + \int g$. (c) Por (b) e inducción, $\int \sum_{n \leq k} f_n = \sum_{n \leq k} \int f_n$, y $\sum_{n \leq k} f_n \uparrow \sum_n f_n$ cuando $k \rightarrow \infty$. (d) $f \mathbf{1}_{A_n} \uparrow f \mathbf{1}_B$, y $f \mathbf{1}_D = \sum_j f \mathbf{1}_{A_j}$; se aplica el teorema 5.8 y (c). ■

En particular, por (d), para toda $\rho \in \mathcal{M}_+$ la función $A \mapsto \int_A \rho d\mu$ es una medida (sección 5.7).

Proposición 5.10 (Desigualdad de Markov). Si $f \in \mathcal{M}_+$ y $t > 0$, entonces $\mu\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int f d\mu$.

Demostración. $t \mathbf{1}_{\{f \geq t\}} \leq f$. ■

Proposición 5.11. Sean $f, g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$.

- (a) Si $\int f d\mu < \infty$, entonces $\mu\{f = +\infty\} = 0$.
- (b) $\int f d\mu = 0$ si y solo si $f = 0$ μ -c.t.p.
- (c) Si $f = g$ μ -c.t.p., entonces $\int f d\mu = \int g d\mu$; si $f \leq g$ μ -c.t.p., entonces $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
- (d) (Convergencia monótona c.t.p.) Si $f_n \in \mathcal{M}_+$ y $f_n \uparrow f$ μ -c.t.p., con f medible, entonces $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Demostración. (a) Por Markov, $\mu\{f = \infty\} \leq \mu\{f \geq n\} \leq \frac{1}{n} \int f \rightarrow 0$.

(b) Si $\int f = 0$, Markov da $\mu\{f \geq 1/n\} = 0$ para todo n , y $\{f > 0\} = \bigcup_n \{f \geq 1/n\}$. Si $f = 0$ fuera de un conjunto nulo N , entonces $f \leq +\infty \cdot \mathbf{1}_N$ y el ejemplo 5.7 da $\int f = 0$.

(c) Sea $N = \{f \neq g\}$, nulo. Por (d) del corolario 5.9 y por (b), $\int f = \int_{N^c} f + \int_N f = \int_{N^c} g + \int_N g = \int g$. Si $f \leq g$ fuera de $N = \{f > g\}$, entonces $\int f = \int_{N^c} f \leq \int_{N^c} g \leq \int g$.

(d) Sea $G = \bigcap_n \{f_n \leq f_{n+1}\} \cap \{f_n \rightarrow f\}$, cuyo complemento es nulo. Las funciones $f_n \mathbf{1}_G \uparrow f \mathbf{1}_G$ en todo punto, y por (c) y el teorema 5.8, $\int f_n = \int f_n \mathbf{1}_G \rightarrow \int f \mathbf{1}_G = \int f$. ■

Lema 5.12 (Fatou). Si $f_n \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ para todo n , entonces

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demostración. Sea $g_k = \inf_{n \geq k} f_n \in \mathcal{M}_+$. Entonces $g_k \uparrow \liminf_n f_n$ y, como $g_k \leq f_n$ para $n \geq k$, se tiene $\int g_k \leq \inf_{n \geq k} \int f_n$. Por el teorema 5.8,

$$\int \liminf_n f_n = \lim_k \int g_k \leq \lim_k \inf_{n \geq k} \int f_n = \liminf_n \int f_n. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 5.13 (La masa se escapa). Sobre $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, m)$ sea $f_n = n \mathbf{1}_{(0, 1/n]}$. Entonces $f_n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in (0, 1]$, pero $\int f_n dm = 1$ para todo n . La desigualdad de Fatou es estricta ($0 < 1$), y no se puede intercambiar el límite con la integral: toda la masa se concentra en un intervalo cada vez más pequeño (figura 5.2). La hipótesis de no negatividad en Fatou tampoco puede omitirse: $-f_n$ da $\int \liminf(-f_n) = 0 > -1$.

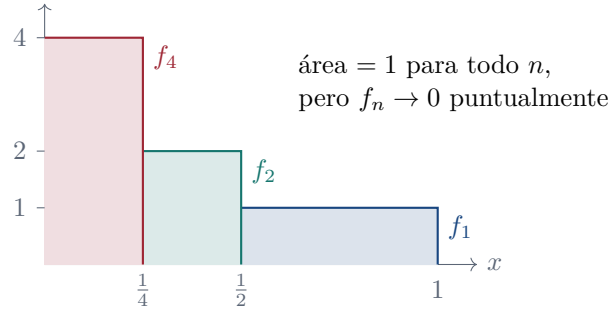


Figura 5.2: Las funciones $f_n = n \mathbf{1}_{(0, 1/n]}$ del ejemplo 5.13.

5.3 Funciones integrables

Definición 5.14. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible, y $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$, de modo que

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Si al menos una de las integrales $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ es finita, definimos

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}};$$

si ambas son infinitas, $\int f d\mu$ no está definida. Decimos que f es *integrable* si ambas son finitas, lo que equivale a $\int |f| d\mu < \infty$ (pues $f^\pm \leq |f| = f^+ + f^-$).

Proposición 5.15. Sean f, g integrables y $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f + g$ y cf son integrables, y

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu, \quad \int cf d\mu = c \int f d\mu, \quad \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Demostración. Por la desigualdad triangular, $\int |f + g| \leq \int |f| + \int |g| < \infty$, y $\int |cf| = |c| \int |f|$. Sea $h = f + g$. De $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ se obtiene

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+,$$

una igualdad entre funciones de $\mathcal{M}_+$. Integrando (corolario 5.9(b)) y usando que todos los términos son finitos, $\int h = \int f + \int g$. Si $c \geq 0$, $(cf)^\pm = cf^\pm$; si $c < 0$, $(cf)^+ = -cf^-$ y $(cf)^- = -cf^+$; en ambos casos $\int cf = c \int f$. Finalmente, $|\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$. ■

Proposición 5.16. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles.

- (a) Si $\mu(A) = 0$ y $\int f$ está definida, entonces $\int_A f d\mu = 0$.
- (b) Si $f = g$ μ -c.t.p. y $\int f$ está definida, entonces $\int g$ también y coinciden.
- (c) Si $f \leq g$ μ -c.t.p. y ambas integrales están definidas, entonces $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Demostración. (a) $(f\mathbf{1}_A)^\pm = f^\pm \mathbf{1}_A$ tiene integral nula por la proposición 5.11(b). (b) $f^\pm = g^\pm$ c.t.p.; se aplica la proposición 5.11(c). (c) Por (b) podemos suponer $f \leq g$ en todo punto. Entonces $f^+ \leq g^+$ y $g^- \leq f^-$, luego $\int f^+ \leq \int g^+$ e $\int g^- \leq \int f^-$, y restando (las cuentas son válidas en $\mathbb{R}$ porque ambas integrales están definidas) resulta $\int f \leq \int g$. ■

Funciones definidas c.t.p.. Si $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible y $\int |f| < \infty$, entonces $|f| < \infty$ c.t.p. (proposición 5.11(a)); redefiniendo f como 0 en el conjunto nulo $\{|f| = \infty\}$ se obtiene una función real con la misma integral. Del mismo modo, una función definida solo fuera de un conjunto nulo se extiende por 0. Por eso no distinguiremos entre estas situaciones.

Definición 5.17 (El espacio L^1). Para f integrable ponemos $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Se tiene $\|cf\|_1 = |c| \|f\|_1$ y $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$, y $\|f\|_1 = 0$ si y solo si $f = 0$ μ -c.t.p. Así, $\|\cdot\|_1$ es una seminorma sobre el espacio vectorial de las funciones integrables, y es una norma sobre el cociente

$$L^1(X, \mathcal{F}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrable}\} / \sim, \quad f \sim g \iff f = g \text{ } \mu\text{-c.t.p.}$$

Decimos que $f_n \rightarrow f$ en L^1 si $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

5.4 El teorema de la convergencia dominada

Teorema 5.18 (Convergencia dominada, forma general). Sean $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles con $f_n \rightarrow f$ μ -c.t.p. Supongamos que existen $g_n, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrables con $|f_n| \leq g_n$ μ -c.t.p., $g_n \rightarrow g$ μ -c.t.p. y $\int g_n d\mu \rightarrow \int g d\mu$. Entonces f es integrable,

$$\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad y \quad \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

Demostración. Modificando todas las funciones en una unión numerable de conjuntos nulos (lo que no altera las integrales) podemos suponer que las hipótesis valen en todo

punto. Entonces $|f| \leq g$, de modo que f es integrable. Las funciones $g_n + f_n$ y $g_n - f_n$ son no negativas, y el lema 5.12 da

$$\begin{aligned}\int (g + f) &\leq \liminf_n \int (g_n + f_n) = \int g + \liminf_n \int f_n, \\ \int (g - f) &\leq \liminf_n \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_n \int f_n,\end{aligned}$$

donde usamos $\int g_n \rightarrow \int g \in \mathbb{R}$. Restando $\int g$, finito,

$$\limsup_n \int f_n \leq \int f \leq \liminf_n \int f_n,$$

es decir, $\int f_n \rightarrow \int f$. Para la convergencia en L^1 , aplicamos lo ya probado a $h_n = |f_n - f| \rightarrow 0$, dominadas por $G_n = g_n + g$, que son integrables, convergen a $2g$ y cumplen $\int G_n \rightarrow 2 \int g$: resulta $\int |f_n - f| \rightarrow 0$. ■

Corolario 5.19 (Convergencia dominada). Sean $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles con $f_n \rightarrow f$ μ -c.t.p. Si existe g integrable con $|f_n| \leq g$ μ -c.t.p. para todo n , entonces f es integrable, $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ y $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Demostración. Tomar $g_n = g$ en el teorema 5.18. ■

El ejemplo 5.13 muestra que la hipótesis de dominación no puede omitirse: allí $\sup_n f_n$ no es integrable, pues vale k en $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ y $\sum_k k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_k \frac{1}{k+1} = \infty$.

Corolario 5.20 (Continuidad de la integral respecto del dominio). Sea f integrable.

- (a) Si $E_n \uparrow E$ o $E_n \downarrow E$ en $\mathcal{F}$, entonces $\int_{E_n} f d\mu \rightarrow \int_E f d\mu$.
- (b) Si $D = \bigsqcup_j A_j$ con $A_j \in \mathcal{F}$, entonces $\int_D f d\mu = \sum_j \int_{A_j} f d\mu$, y la serie converge absolutamente.

Demostración. (a) $f \mathbf{1}_{E_n} \rightarrow f \mathbf{1}_E$ en todo punto y $|f \mathbf{1}_{E_n}| \leq |f|$. (b) Por (a), $\int_D f = \lim_n \int_{\bigcup_{j \leq n} A_j} f = \lim_n \sum_{j \leq n} \int_{A_j} f$, y $\sum_j |\int_{A_j} f| \leq \sum_j \int_{A_j} |f| = \int_D |f| < \infty$. ■

Proposición 5.21 (Integración término a término). Sean f_n integrables con $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$. Entonces:

- (a) la serie $\sum_n f_n(x)$ converge absolutamente para μ -casi todo x ;
- (b) la función $S = \sum_n f_n$, definida como 0 donde la serie no converge absolutamente, es integrable;
- (c) $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$, y esta última serie converge absolutamente.

Demostración. Sea $G = \sum_n |f_n| \in \mathcal{M}_+$. Por el corolario 5.9(c), $\int G = \sum_n \int |f_n| < \infty$, de modo que $X^* = \{G < \infty\}$ tiene complemento nulo: esto es (a). Las sumas parciales $S_k = \mathbf{1}_{X^*} \sum_{n \leq k} f_n$ son medibles, $S_k \rightarrow S$ en todo punto y $|S_k| \leq G \mathbf{1}_{X^*}$, integrable y finita. Por el corolario 5.19, S es integrable y

$$\int S = \lim_k \int S_k = \lim_k \sum_{n \leq k} \int f_n,$$

donde se usó que X^* tiene complemento nulo. Finalmente, $\sum_n |f f_n| \leq \sum_n |f| |f_n| < \infty$. ■

La hipótesis correcta. La hipótesis es $\sum_n \int |f_n| < \infty$, que no es lo mismo que pedir $\sum_n |f_n(x)| < \infty$ para todo x : las funciones $f_n = \mathbf{1}_{(n, n+1]} - \mathbf{1}_{(n+1, n+2]}$ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ satisfacen $\sum_n |f_n(x)| \leq 2$ en todo punto y la suma es telescópica, $\sum_n f_n = \mathbf{1}_{(1, 2]}$; luego $\int \sum_n f_n = 1$, mientras que $\sum_n \int f_n = 0$. Aquí $\sum_n \int |f_n| = \infty$.

5.5 Integración sobre subconjuntos

Hay dos maneras de integrar “sobre A ”: restringir la medida a A sin cambiar el espacio, o cambiar el espacio por A . Ambas dan lo mismo.

Proposición 5.22. Sea $A \in \mathcal{F}$ y $\mu_A(E) = \mu(E \cap A)$. Para $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$,

$$\int_A f d\mu = \int f d\mu_A,$$

y una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es μ_A -integrable si y solo si $f \mathbf{1}_A$ es μ -integrable, en cuyo caso vale la misma igualdad.

Demostración. Para $f = \mathbf{1}_E$, ambos lados valen $\mu(E \cap A)$. Por linealidad vale para $f \in \mathcal{S}_+$, y si $s_n \uparrow f$ son simples, entonces $s_n \mathbf{1}_A \uparrow f \mathbf{1}_A$ y el teorema 5.8 aplicado a ambos lados da la igualdad para $f \in \mathcal{M}_+$. El caso general se obtiene aplicando lo anterior a $f^\pm$, pues $(f \mathbf{1}_A)^\pm = f^\pm \mathbf{1}_A$. ■

Proposición 5.23. Sea $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{F} : E \subset A\}$ y $\mu|_A = \mu|_{\mathcal{F}_A}$. Dada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, sea $f^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ su extensión por cero ($f^* = f$ en A y $f^* = 0$ en A^c). Entonces f es $\mathcal{F}_A$ -medible si y solo si f^* es $\mathcal{F}$ -medible; f es $\mu|_A$ -integrable si y solo si f^* es μ -integrable; y en ese caso (o si $f \geq 0$)

$$\int_A f d\mu|_A = \int_X f^* d\mu = \int_A f^* d\mu.$$

Demostración. Para $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\{f^* \in B\} = \{f \in B\} \cup A^c$ si $0 \in B$ y $\{f^* \in B\} = \{f \in B\}$ si $0 \notin B$, mientras que $\{f \in B\} = A \cap \{f^* \in B\}$; esto da la equivalencia de medibilidad. Si $f = \mathbf{1}_E$ con $E \in \mathcal{F}_A$, ambos lados valen $\mu(E)$; por linealidad y convergencia monótona se pasa a $f \geq 0$ medible, y aplicando esto a $f^\pm$ al caso integrable. ■

Así, por ejemplo, para $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es lo mismo calcular $\int_{[-1, 1]} \arcsin dm$ en el espacio $([-1, 1], \mathcal{L}_{[-1, 1]}, m)$ que calcular $\int_{\mathbb{R}} \arcsin^* dm$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$. En adelante, para $A \in \mathcal{F}$ y f definida en A , escribimos simplemente $\int_A f d\mu$.

5.6 Medida imagen

Proposición 5.24 (Medida imagen). Sea $T : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ medible y μ una medida sobre $(X, \mathcal{F})$. Entonces

$$(\mu \circ T^{-1})(E) = \mu(T^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{G},$$

es una medida sobre $(Y, \mathcal{G})$, llamada medida imagen (o pushforward) de μ por T . Para toda $f \in \mathcal{M}_+(Y, \mathcal{G})$,

$$\int_Y f d(\mu \circ T^{-1}) = \int_X f \circ T d\mu,$$

y una función medible $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mu \circ T^{-1}$ -integrable si y solo si $f \circ T$ es μ -integrable, en cuyo caso vale la misma igualdad.

Demostración. Las preimágenes de conjuntos disjuntos son disjuntas y $T^{-1}(\bigcup_n E_n) = \bigcup_n T^{-1}(E_n)$, de modo que $\mu \circ T^{-1}$ es una medida. La fórmula se prueba con el *procedimiento estándar*: para $f = \mathbf{1}_E$ se tiene $\mathbf{1}_E \circ T = \mathbf{1}_{T^{-1}(E)}$ y ambos lados valen $\mu(T^{-1}(E))$; por linealidad vale para $f \in \mathcal{S}_+$; si $s_n \uparrow f$ son simples, entonces $s_n \circ T \uparrow f \circ T$ y el teorema 5.8 da el caso $f \in \mathcal{M}_+$; finalmente se aplica a $|f|$ y a $f^\pm$, usando $(f \circ T)^\pm = f^\pm \circ T$. ■

Ejemplo 5.25 (Series como integrales). Sea μ la medida de contar en $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Toda sucesión $a = (a_n)$ es una función medible $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $a_n \geq 0$, entonces $\int a d\mu = \sum_{n=1}^\infty a_n$ (por la definición 1.13, o por convergencia monótona aplicada a $a\mathbf{1}_{\{1, \dots, k\}} \uparrow a$). En general, a es integrable si y solo si $\sum_n |a_n| < \infty$, y entonces $\int a d\mu = \sum_n a_n$.

Reordenamientos. Si $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es biyectiva, la medida de contar es invariante: $\mu \circ \pi^{-1} = \mu$. Por la proposición 5.24, para $\sum_n |a_n| < \infty$,

$$\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)} = \int a \circ \pi d\mu = \int a d(\mu \circ \pi^{-1}) = \int a d\mu = \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

Series dobles. Si $\sum_n \sum_k |a(n, k)| < \infty$, aplicando la proposición 5.21 a las funciones $f_n(k) = a(n, k)$ se obtiene

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a(n, k) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a(n, k),$$

y para $a(n, k) \geq 0$ la igualdad vale siempre (corolario 1.18). Es el germen de los teoremas de Tonelli y Fubini del capítulo 6.

5.7 Medidas con densidad

Proposición 5.26. Sea $\rho \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$. Entonces

$$\nu(A) = \int_A \rho d\mu, \quad A \in \mathcal{F},$$

es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$, que denotamos $d\nu = \rho d\mu$; la función ρ se llama densidad de ν respecto de μ . Para toda $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$,

$$\int f d\nu = \int f \rho d\mu,$$

y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible es ν -integrable si y solo si $f\rho$ es μ -integrable, en cuyo caso vale la misma igualdad.

Demostración. ν es una medida por el corolario 5.9(d). Para $f = \mathbf{1}_A$ la fórmula es la definición de ν ; se extiende a $\mathcal{S}_+$ por linealidad y a $\mathcal{M}_+$ por convergencia monótona ($s_n \uparrow f$ implica $s_n \rho \uparrow f \rho$). Para el caso integrable se usa $(f\rho)^\pm = f^\pm \rho$, pues $\rho \geq 0$. ■

Definición 5.27 (Continuidad absoluta). Sean μ, ν medidas sobre $(X, \mathcal{F})$. Decimos que ν es *absolutamente continua* respecto de μ , y escribimos $\nu \ll \mu$, si $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$.

Si $d\nu = \rho d\mu$, entonces $\nu \ll \mu$: si $\mu(A) = 0$, entonces $\rho \mathbf{1}_A = 0$ μ -c.t.p. y $\nu(A) = \int \rho \mathbf{1}_A d\mu = 0$ por la proposición 5.11(b). El recíproco es el teorema de Radon–Nikodym:

Observación 5.28 (Teorema de Radon–Nikodym). Si μ y ν son σ -finitas y $\nu \ll \mu$, existe $\rho \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$, única μ -c.t.p., con $d\nu = \rho d\mu$. Se escribe $\rho = d\nu/d\mu$. Véase Folland [1, teorema 3.8].

Ejemplo 5.29. Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y creciente, entonces $d\mu_F = F' dm$: ambas medidas valen $F(b) - F(a) = \int_a^b F'$ en cada $(a, b]$ (observación 3.3); esta integral de Riemann coincide con la de Lebesgue $\int_{(a,b]} F' dm$ por el teorema 8.11, que no depende de este ejemplo. El teorema 3.6 da la igualdad. En cambio, la medida del ejercicio 3.22 no tiene densidad respecto de m : $m(\{0\}) = 0$ pero $\mu_F(\{0\}) = 3$.

5.8 Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.30. Pruebe que si $f_n \rightarrow f$ en L^1 , entonces $\int f_n \rightarrow \int f$ y $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$.

Solución. Por la proposición 5.15, $|\int f_n - \int f| = |\int (f_n - f)| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0$. Por la desigualdad triangular inversa $||a| - |b|| \leq |a - b|$,

$$|\|f_n\|_1 - \|f\|_1| = \left| \int (|f_n| - |f|) \right| \leq \int ||f_n| - |f|| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.31. Pruebe que $\int f d\delta_a = f(a)$ para toda $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{P}(X))$, y que si $p_j \geq 0$ y $a_j \in X$, entonces $\int f d(\sum_j p_j \delta_{a_j}) = \sum_j p_j f(a_j)$.

Solución. Para $f = \mathbf{1}_E$, $\int \mathbf{1}_E d\delta_a = \delta_a(E) = \mathbf{1}_E(a)$; por linealidad vale para funciones simples y por convergencia monótona para $f \in \mathcal{M}_+$. La segunda afirmación es consecuencia de la primera y del ejercicio siguiente. ■

Ejercicio 5.32. Sean $\mu_1, \mu_2, \dots$ medidas sobre $(X, \mathcal{F})$ y $\nu = \sum_j \mu_j$ (ejemplo 2.10). Pruebe que

- (a) $\int f d\nu = \sum_j \int f d\mu_j$ para toda $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$;
- (b) una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es ν -integrable si y solo si $\sum_j \int |f| d\mu_j < \infty$, y en ese caso $\int f d\nu = \sum_j \int f d\mu_j$, donde la serie converge absolutamente.

Solución. (a) Para $f = \mathbf{1}_E$ es la definición de ν . Por linealidad (las series de términos no negativos se suman término a término) vale para $f \in \mathcal{S}_+$. Si $s_n \uparrow f$ son simples, $\int s_n d\nu \uparrow \int f d\nu$, mientras que $\sum_j \int s_n d\mu_j \uparrow \sum_j \int f d\mu_j$: esto último es el teorema de convergencia monótona para la medida de contar en $\mathbb{N}$ aplicado a las funciones $j \mapsto \int s_n d\mu_j$, que crecen hacia $j \mapsto \int f d\mu_j$.

(b) Por (a) aplicado a $|f|$, $\int |f| d\nu = \sum_j \int |f| d\mu_j$. Si es finito, cada $\int f^\pm d\mu_j$ es finito y, por (a), $\int f d\nu = \sum_j \int f^+ d\mu_j - \sum_j \int f^- d\mu_j = \sum_j \int f d\mu_j$, con $\sum_j |\int f d\mu_j| \leq \sum_j \int |f| d\mu_j < \infty$. ■

Medida producto: los teoremas de Tonelli y Fubini

6.1 La σ -álgebra producto

Sean $X_1, \dots, X_k$ conjuntos no vacíos, $\mathcal{X} = X_1 \times \dots \times X_k$ su producto cartesiano y $\pi_j : \mathcal{X} \rightarrow X_j$, $\pi_j(a_1, \dots, a_k) = a_j$, las proyecciones. Toda función $f : Z \rightarrow \mathcal{X}$ se escribe $f = (f_1, \dots, f_k)$ con $f_j = \pi_j \circ f : Z \rightarrow X_j$; recíprocamente, funciones $f_j : Z \rightarrow X_j$ definen el *acoplamiento* $f = (f_1, \dots, f_k)$. Por ejemplo, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, y

$$(0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1} = \{(r, u) : r > 0, u \in \mathbb{R}^d, \|u\| = 1\}.$$

Definición 6.1 (σ -álgebra producto). Dados espacios medibles $(X_j, \mathcal{F}_j)$, $j = 1, \dots, k$, la σ -álgebra producto $\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k$ sobre $\mathcal{X}$ es la menor σ -álgebra que hace medibles a todas las proyecciones:

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k = \sigma(\{\pi_j^{-1}(A_j) : A_j \in \mathcal{F}_j, j = 1, \dots, k\}).$$

Proposición 6.2. $\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k$ es la σ -álgebra generada por los rectángulos medibles $A_1 \times \dots \times A_k$, $A_j \in \mathcal{F}_j$, que forman un π -sistema.

Demostración. Cada $\pi_j^{-1}(A_j) = X_1 \times \dots \times A_j \times \dots \times X_k$ es un rectángulo, y cada rectángulo es la intersección finita $\bigcap_j \pi_j^{-1}(A_j)$; así ambas familias generan la misma σ -álgebra. Finalmente, $(A_1 \times \dots \times A_k) \cap (B_1 \times \dots \times B_k) = (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_k \cap B_k)$. ■

La notación $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ recuerda que *no* se trata del producto cartesiano $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ (una familia de pares de conjuntos), sino de una σ -álgebra de subconjuntos de $X_1 \times X_2$, que contiene a muchos conjuntos que no son rectángulos.

Proposición 6.3. Sea $(Z, \mathcal{H})$ un espacio medible y $f = (f_1, \dots, f_k) : Z \rightarrow \mathcal{X}$. Entonces f es $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k)$ -medible si y solo si cada $f_j : Z \rightarrow X_j$ es $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_j)$ -medible.

Demostración. $(\Rightarrow)$ $f_j = \pi_j \circ f$ es composición de medibles. $(\Leftarrow)$ Por el corolario 4.3 basta verificar en los rectángulos: $f^{-1}(A_1 \times \dots \times A_k) = \bigcap_j f_j^{-1}(A_j) \in \mathcal{H}$. ■

Proposición 6.4 (Asociatividad). Si $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times X_3$, entonces, identificando $\mathcal{X}$ con $(X_1 \times X_2) \times X_3$,

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3 = (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3,$$

y lo mismo para cualquier agrupación de cualquier número de factores.

Demostración. Basta ver que la identidad es medible en ambos sentidos, y por la proposición 6.3 basta mirar componentes. Con $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3$ en el dominio, las proyecciones sobre X_1 y X_2 son composición de las proyecciones $\mathcal{X} \rightarrow X_1 \times X_2 \rightarrow X_j$, y la proyección sobre X_3 es medible; luego la identidad es medible hacia $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3$. Con $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3$ en el dominio, la aplicación $(a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_1, a_2)$ es medible hacia $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ (sus componentes lo son) y la proyección sobre X_3 también. ■

Proposición 6.5. Para $m, n \geq 1$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$. En particular $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (d factores).

Demostración. Las proyecciones $\mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas, luego borelianas, de modo que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$. Recíprocamente, toda caja abierta de $\mathbb{R}^{m+n}$ es producto de una caja abierta de $\mathbb{R}^m$ y una de $\mathbb{R}^n$, luego es un rectángulo medible, y las cajas abiertas generan $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$ (proposición 2.21). La segunda afirmación sigue por inducción y asociatividad. ■

6.2 Medidas producto

Definición 6.6. Sean $(X_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, k$, espacios de medida. Una medida θ sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_k)$ es una *medida producto* de $\mu_1, \dots, \mu_k$ si

$$\theta(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_k(A_k) \quad \text{para todos } A_j \in \mathcal{F}_j,$$

con la convención $0 \cdot \infty = 0$.

Proposición 6.7. Si cada μ_j es σ -finita, existe a lo sumo una medida producto de $\mu_1, \dots, \mu_k$.

Demostración. Dos medidas producto coinciden en el π -sistema de los rectángulos, que genera la σ -álgebra producto. Por la proposición 2.7, existen $A_j^{(n)} \in \mathcal{F}_j$ con $A_j^{(n)} \uparrow X_j$ y $\mu_j(A_j^{(n)}) < \infty$; los rectángulos $E^{(n)} = A_1^{(n)} \times \cdots \times A_k^{(n)}$ satisfacen $E^{(n)} \uparrow \mathcal{X}$ y ambas medidas les asignan el valor finito $\prod_j \mu_j(A_j^{(n)})$. Se aplica el teorema 2.17. ■

Sin σ -finitud la teoría se degrada: la unicidad puede fallar y, como muestra el ejercicio 6.19, las dos integrales iteradas de una misma función pueden ser distintas. Si θ es una medida producto de probabilidades, entonces sus *marginales* son las μ_j : $\theta \circ \pi_1^{-1}(A) = \theta(A \times X_2 \times \cdots \times X_k) = \mu_1(A)$; para medidas arbitrarias esto es falso, pues el factor $\mu_2(X_2) \cdots \mu_k(X_k)$ no tiene por qué valer 1.

6.3 La integral como funcional

Para construir la medida producto conviene caracterizar las medidas a través de sus integrales.

Definición 6.8. Una función $I : \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F}) \rightarrow [0, +\infty]$ es una *integral* si

- (I) $I(0) = 0$;
- (II) $I(cf + g) = cI(f) + I(g)$ para todos $f, g \in \mathcal{M}_+$ y $c \geq 0$;

(III) si $f_n \uparrow f$ en $\mathcal{M}_+$, entonces $I(f_n) \uparrow I(f)$.

Por los resultados del capítulo 5, $I_\mu(f) = \int f d\mu$ es una integral para toda medida μ . El recíproco también es cierto.

Teorema 6.9. *Si $I : \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F}) \rightarrow [0, +\infty]$ es una integral, existe una única medida μ sobre $(X, \mathcal{F})$ tal que $I(f) = \int f d\mu$ para toda $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$; a saber, $\mu(A) = I(\mathbf{1}_A)$.*

Demostración. La unicidad es clara, pues necesariamente $\mu(A) = \int \mathbf{1}_A d\mu = I(\mathbf{1}_A)$. Veamos que $\mu(A) = I(\mathbf{1}_A)$ es una medida: $\mu(\emptyset) = I(0) = 0$, y si $A = \bigsqcup_n A_n$, entonces $\sum_{n \leq k} \mathbf{1}_{A_n} \uparrow \mathbf{1}_A$ y, por (ii) y (iii),

$$\mu(A) = \lim_k I\left(\sum_{n \leq k} \mathbf{1}_{A_n}\right) = \lim_k \sum_{n \leq k} \mu(A_n) = \sum_n \mu(A_n).$$

Por definición $I(\mathbf{1}_A) = \int \mathbf{1}_A d\mu$; por (ii) la igualdad se extiende a $\mathcal{S}_+$, y por (iii), la proposición 4.15 y el teorema 5.8, a todo $\mathcal{M}_+$. ■

6.4 Secciones e integrales iteradas

Fijemos espacios de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$. Para $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ y $x \in X$, la *sección* $f_x : Y \rightarrow [0, +\infty]$ es $f_x(y) = f(x, y)$; análogamente $f^y(x) = f(x, y)$. Para $E \subset X \times Y$, $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$, de modo que $(\mathbf{1}_E)_x = \mathbf{1}_{E_x}$.

Lema 6.10. *Si $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -medible, entonces f_x es $\mathcal{G}$ -medible para todo $x \in X$ y f^y es $\mathcal{F}$ -medible para todo $y \in Y$. En particular, si $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, entonces $E_x \in \mathcal{G}$ y $E^y \in \mathcal{F}$.*

Demostración. $f_x = f \circ \iota_x$, donde $\iota_x : Y \rightarrow X \times Y$, $\iota_x(y) = (x, y)$, es medible por la proposición 6.3 (sus componentes son una constante y la identidad). ■

Por ejemplo, si $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, cada sección $D_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}$ es un boreliano de $\mathbb{R}$.

Proposición 6.11. *Si ν es σ -finita y $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -medible, entonces la función*

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) \nu(dy)$$

es $\mathcal{F}$ -medible (a valores en $[0, +\infty]$). Simétricamente, si μ es σ -finita, $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu(dx)$ es $\mathcal{G}$ -medible.

Demostración. Paso 1: ν finita y $f = \mathbf{1}_D$. Sea

$$\mathcal{H} = \left\{ D \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} : x \mapsto \nu(D_x) = \int_Y \mathbf{1}_D(x, y) \nu(dy) \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible} \right\}.$$

Si $D = A \times B$ es un rectángulo, $\nu(D_x) = \mathbf{1}_A(x) \nu(B)$ es medible, luego $\mathcal{H}$ contiene al π -sistema de los rectángulos. Además $\mathcal{H}$ es un λ -sistema: $X \times Y \in \mathcal{H}$; si $D \subset E$ están en $\mathcal{H}$, entonces $\nu((E \setminus D)_x) = \nu(E_x) - \nu(D_x)$ es diferencia de funciones medibles

finitas; y si $D_n \uparrow D$ con $D_n \in \mathcal{H}$, entonces $(D_n)_x \uparrow D_x$ y $\nu(D_x) = \lim_n \nu((D_n)_x)$ es límite de medibles. Por el teorema 2.15, $\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Paso 2: ν finita y f general. Por linealidad el resultado vale para $f \in \mathcal{S}_+$. Si $s_n \uparrow f$ son simples, para cada x se tiene $(s_n)_x \uparrow f_x$ y, por convergencia monótona, $\int (s_n)_x d\nu \uparrow \int f_x d\nu$: la función buscada es límite de medibles.

Paso 3: ν σ -finita. Sean $B_n \uparrow Y$ con $\nu(B_n) < \infty$ y $\nu_n(E) = \nu(E \cap B_n)$, que son medidas finitas. Por el paso 2, $x \mapsto \int f_x d\nu_n = \int f_x \mathbf{1}_{B_n} d\nu$ es medible, y por convergencia monótona converge a $\int f_x d\nu$ cuando $n \rightarrow \infty$. ■

6.5 El teorema de Tonelli

Teorema 6.12 (Tonelli). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos. Entonces:

- (a) existe una única medida producto $\mu \otimes \nu$ sobre $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$;
- (b) para toda $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ medible,

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Demostración. Por la proposición 6.11, las integrales iteradas

$$I_1(f) = \int_X \left(\int_Y f d\nu \right) d\mu, \quad I_2(f) = \int_Y \left(\int_X f d\mu \right) d\nu$$

están bien definidas para $f \in \mathcal{M}_+(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$. Ambas son integrales en el sentido de la definición 6.8: $I_j(0) = 0$, la linealidad se sigue de la linealidad de cada integral interior y exterior, y si $f_n \uparrow f$, dos aplicaciones del teorema 5.8 dan $I_j(f_n) \uparrow I_j(f)$. Por el teorema 6.9 existen medidas θ_1, θ_2 con $I_j(f) = \int f d\theta_j$. Para un rectángulo,

$$\theta_1(A \times B) = \int_X \mathbf{1}_A(x) \nu(B) \mu(dx) = \mu(A) \nu(B) = \theta_2(A \times B),$$

de modo que ambas son medidas producto. Por la proposición 6.7, $\theta_1 = \theta_2 =: \mu \otimes \nu$, lo que prueba (a) y (b). ■

Observación 6.13. (a) Por la asociatividad (proposición 6.4) y la unicidad, para medidas σ -finitas $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$, y el teorema se extiende a cualquier número finito de factores: la integral respecto de $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ se calcula integrando sucesivamente en cada variable, en cualquier orden.

- (b) Para f a valores en $[0, +\infty]$ no hace falta suponer f finita: las funciones $f \wedge n \uparrow f$ son medibles y el teorema 5.8 permite pasar al límite en cada miembro.

6.6 El teorema de Fubini

Teorema 6.14 (Fubini). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -medible con $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < \infty$. Entonces:

- (a) para μ -casi todo x , la sección f_x es ν -integrable; para ν -casi todo y , la sección f_y es μ -integrable;

- (b) las funciones $x \mapsto \int_Y f(x, y) \nu(dy)$ e $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu(dx)$, definidas como 0 en los conjuntos nulos donde las secciones no son integrables, son medibles e integrables;
- (c) se tiene

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Demostración. Por Tonelli aplicado a $|f|$, $\int_X (\int_Y |f_x| d\nu) d\mu = \int |f| d(\mu \otimes \nu) < \infty$, de modo que el conjunto medible $X_0 = \{x : \int_Y |f_x| d\nu < \infty\}$ tiene complemento μ -nulo (proposición 5.11(a)); esto es (a) para x . Sobre X_0 ,

$$F(x) = \int_Y f(x, y) \nu(dy) = \int_Y f^+(x, y) \nu(dy) - \int_Y f^-(x, y) \nu(dy)$$

es diferencia de dos funciones medibles finitas (proposición 6.11), y $F = 0$ fuera de X_0 ; luego F es medible, y $|F| \leq \int_Y |f_x| d\nu$ es integrable. Por Tonelli aplicado a f^+ y f^- , y como X_0^c es nulo,

$$\begin{aligned} \int_X F d\mu &= \int_{X_0} \int_Y f^+ d\nu d\mu - \int_{X_0} \int_Y f^- d\nu d\mu \\ &= \int f^+ d(\mu \otimes \nu) - \int f^- d(\mu \otimes \nu) = \int f d(\mu \otimes \nu). \end{aligned}$$

El razonamiento para la otra variable es simétrico. ■

Cómo se usan Tonelli y Fubini

Para intercambiar el orden de integración en $\int \int f d\nu d\mu$:

1. si $f \geq 0$, se puede siempre (Tonelli), aunque el resultado sea $+\infty$;
2. si f cambia de signo, se calcula primero, con Tonelli, alguna integral iterada de $|f|$; si es finita, Fubini autoriza el intercambio para f .

En ambos casos las medidas deben ser σ -finitas.

6.7 La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$

Definición 6.15 (Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$). La *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}^d$ es la medida producto

$$m_d = m \otimes \cdots \otimes m \quad (d \text{ factores})$$

sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, que existe y es única por el teorema 6.12, pues m es σ -finita. Cuando la dimensión es clara escribimos m en lugar de m_d , y $\int f(x) dx$ en lugar de $\int f dm_d$.

Proposición 6.16. (a) m_d es la única medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tal que $m_d(\prod_j (a_j, b_j]) = \prod_j (b_j - a_j)$, y también es la única que asigna a cada caja cerrada $\prod_j [a_j, b_j]$ el valor $\prod_j (b_j - a_j)$.

(b) m_d es invariante por traslaciones, y es la única medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ invariante por traslaciones con $m_d((0, 1]^d) = 1$. Toda medida de Lebesgue–Stieltjes sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ invariante por traslaciones es de la forma $c m_d$, $c \geq 0$.

(c) Si $d = d_1 + d_2$, entonces $m_d = m_{d_1} \otimes m_{d_2}$; en particular $m_d(A \times B) = m_{d_1}(A) m_{d_2}(B)$ para $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_1}}$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_2}}$.

Demostración. (a) m_d es una medida producto y m no carga puntos, de modo que el valor en cajas cerradas o semiabiertas es el producto de las longitudes; la unicidad es el corolario 2.24. (b) Para $x \in \mathbb{R}^d$, $A \mapsto m_d(A + x)$ es una medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ (proposición 2.22) que vale $\prod_j (b_j - a_j)$ en cada caja semiabierta; por (a) coincide con m_d . El resto es el teorema 2.25. (c) Por asociatividad, $m_{d_1} \otimes m_{d_2}$ es una medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_1}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_2}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ que vale $\prod_j (b_j - a_j)$ en las cajas semiabiertas; por (a) es m_d . ■

Así, por ejemplo, si $d = d_1 + d_2 + d_3$ y A, B, C son borelianos de $\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2}, \mathbb{R}^{d_3}$, entonces $A \times B \times C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y, por Tonelli,

$$m_d(A \times B \times C) = \int \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(y) \mathbf{1}_C(z) dx dy dz = m_{d_1}(A) m_{d_2}(B) m_{d_3}(C).$$

Definición 6.17 (σ -álgebra de Lebesgue). La σ -álgebra de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ es la completación $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d} = \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}}^{m_d}$ (proposición 3.17); sus elementos son los conjuntos *Lebesgue medibles*, y seguimos denotando m_d (o m) a la medida completada. Para $D \subset \mathbb{R}^d$ ponemos $\mathcal{L}_D = \{E \cap D : E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}\}$; si $D \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$, entonces $\mathcal{L}_D = \{E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d} : E \subset D\}$.

6.8 Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.18. Sean $D \subset \mathbb{R}^m$ y $E \subset \mathbb{R}^k$. Pruebe que $\mathcal{B}_D \otimes \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{D \times E}$. Deduzca que la aplicación $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\Phi(r, u) = ru$, es una biyección medible con inversa medible cuando se consideran las σ -álgebras $\mathcal{B}_{(0, \infty)} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}}$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}$.

Solución. Por la proposición 6.2, $\mathcal{B}_D \otimes \mathcal{B}_E$ está generada por los rectángulos $(D \cap A) \times (E \cap B) = (D \times E) \cap (A \times B)$, con $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$. Aplicando la proposición 4.2 a la inclusión $D \times E \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ y al π -sistema $\mathcal{C}$ de los rectángulos $A \times B$,

$$\mathcal{B}_D \otimes \mathcal{B}_E = \sigma\{(D \times E) \cap R : R \in \mathcal{C}\} = \{(D \times E) \cap G : G \in \sigma(\mathcal{C})\}.$$

Por la proposición 6.5, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+k}}$, y el miembro derecho es $\mathcal{B}_{D \times E}$. Para la segunda parte, Φ es continua con inversa continua $x \mapsto (\|x\|, x/\|x\|)$, de modo que es boreliana en ambos sentidos (proposición 4.6) respecto de $\mathcal{B}_{(0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1}}$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}$; por lo ya probado, $\mathcal{B}_{(0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1}} = \mathcal{B}_{(0, \infty)} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}}$. ■

Ejercicio 6.19. Sean $X = Y = [0, 1]$ con los borelianos, $\mu = m$ y ν la medida de contar, y sea $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ la diagonal. Pruebe que $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y que las dos integrales iteradas de $\mathbf{1}_D$ son distintas. ¿Qué hipótesis de Tonelli falla?

Solución. D es cerrado en $[0, 1]^2$, luego boreliano, y $\mathcal{B}_{[0, 1]^2} = \mathcal{B}_{[0, 1]} \otimes \mathcal{B}_{[0, 1]}$ por el ejercicio anterior. Para cada x , $D_x = \{x\}$, de modo que $\int_Y \mathbf{1}_D(x, y) \nu(dy) = \nu(\{x\}) = 1$ y la primera iterada vale $\int_0^1 1 dx = 1$. Para cada y , $D^y = \{y\}$ y $\int_X \mathbf{1}_D(x, y) m(dx) = m(\{y\}) = 0$, de modo que la segunda iterada vale 0. Falla la σ -finitud de ν (ejemplo 2.9): la demostración de Tonelli la usa tanto en el argumento de λ -sistemas de la proposición 6.11 (donde se restan medidas finitas) como en la unicidad de la medida producto, y aquí la conclusión es falsa. ■

Ejercicio 6.20. Sea $a(n, k) = 1$ si $k = n$, $a(n, k) = -1$ si $k = n + 1$ y $a(n, k) = 0$ en otro caso ($n, k \in \mathbb{N}$). Pruebe que $\sum_n \sum_k a(n, k) \neq \sum_k \sum_n a(n, k)$ y explique por qué no contradice el teorema de Fubini.

Solución. Para cada n , $\sum_k a(n, k) = 1 - 1 = 0$, de modo que $\sum_n \sum_k a(n, k) = 0$. Para $k = 1$, $\sum_n a(n, 1) = a(1, 1) = 1$, y para $k \geq 2$, $\sum_n a(n, k) = a(k, k) + a(k - 1, k) = 0$; luego $\sum_k \sum_n a(n, k) = 1$. Con la medida de contar en $\mathbb{N}$ (que es σ -finita) y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene $\sum_{n,k} |a(n, k)| = \infty$: la función no es integrable respecto de la medida producto, y Fubini no se aplica. ■

Ejercicio 6.21. Pruebe que $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^m} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{m+n}}$.

Solución. Basta ver que $A \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{m+n}}$ para todo $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$ (y lo análogo en la otra variable), pues los rectángulos $A \times B = (A \times \mathbb{R}^n) \cap (\mathbb{R}^m \times B)$ generan la σ -álgebra producto. Escribamos $A = E \cup N$ con $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ y $N \subset Z$, $Z \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$, $m_m(Z) = 0$. Entonces $A \times \mathbb{R}^n = (E \times \mathbb{R}^n) \cup (N \times \mathbb{R}^n)$, donde $E \times \mathbb{R}^n$ es boreliano y $N \times \mathbb{R}^n \subset Z \times \mathbb{R}^n$, que es boreliano con $m_{m+n}(Z \times \mathbb{R}^n) = m_m(Z) m_n(\mathbb{R}^n) = 0 \cdot \infty = 0$. ■

CAPÍTULO 7

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$

Salvo mención en contrario, m denota a m_d .

7.1 Conjuntos y funciones Lebesgue medibles

Por definición (definición 6.17), $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ si y solo si $A = E \cup N$ con $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y $N \subset Z$ para algún boreliano Z con $m(Z) = 0$. Tomando complementos se ve que también $A = E' \setminus N'$ con $E' = E \cup Z$ boreliano y $N' = Z \setminus A \subset Z$. Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es *Lebesgue medible* si es $(\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -medible.

Lema 7.1. *Toda función Lebesgue medible $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ coincide m-c.t.p. con una función boreliana $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demostración. Si $f = \mathbf{1}_A$ con $A = E \cup N$ como arriba, basta tomar $g = \mathbf{1}_E$, pues $\{f \neq g\} \subset Z$. Por linealidad, toda función simple Lebesgue medible coincide c.t.p. con una simple boreliana. En general, sea s_n simple Lebesgue medible con $s_n \rightarrow f$ (corolario 4.16), y t_n simple boreliana con $s_n = t_n$ fuera de un boreliano nulo Z_n . Sea $Z = \bigcup_n Z_n$, boreliano nulo. La función $g = \mathbf{1}_{Z^c} \limsup_n t_n$ (con la convención de tomar $g = 0$ donde el $\limsup$ no es finito) es boreliana, y fuera de Z vale $\lim_n s_n = f$. ■

Observación 7.2. El lema vale también para $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue medible, con $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Se extiende f por 0 fuera de D y se compone con el homeomorfismo creciente $\arctan : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ (con $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$). La función real $\arctan \circ f$ coincide c.t.p. con una boreliana $\tilde{g}$, que podemos suponer con valores en $[-\pi/2, \pi/2]$ truncándola. Entonces $g = \arctan^{-1} \circ \tilde{g}$, restringida a D , es boreliana y coincide c.t.p. con f .

7.2 Regularidad

Teorema 7.3 (Regularidad). *Sea μ una medida de Lebesgue–Stieltjes sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Para todo $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y todo $\varepsilon > 0$ existen un cerrado F y un abierto U con*

$$F \subset A \subset U, \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon, \quad \mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Demostración. Paso 1: μ finita. Sea $\mathcal{H}$ la familia de los $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ que cumplen la conclusión para todo $\varepsilon > 0$.

Los cerrados están en $\mathcal{H}$. Si A es cerrado, tomamos $F = A$ y $U_n = \{x : \text{dist}(x, A) < 1/n\}$, que es abierto. Como A es cerrado, $U_n \downarrow A$, y por continuidad por arriba (μ es finita) $\mu(U_n \setminus A) \rightarrow 0$.

$\mathcal{H}$ es un λ -sistema. Claramente $\mathbb{R}^d \in \mathcal{H}$. Sean $A \subset D$ en $\mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$; elijamos $F \subset A \subset U$ y $G \subset D \subset O$ (F, G cerrados, U, O abiertos) con errores menores que $\varepsilon/2$. Entonces $G \setminus U$ es cerrado, $O \setminus F$ es abierto,

$$G \setminus U \subset D \setminus A \subset O \setminus F,$$

y

$$\begin{aligned} (D \setminus A) \setminus (G \setminus U) &\subset (D \setminus G) \cup (U \setminus A), \\ (O \setminus F) \setminus (D \setminus A) &\subset (O \setminus D) \cup (A \setminus F), \end{aligned}$$

de modo que ambos errores son menores que ε : $D \setminus A \in \mathcal{H}$. Por último, sea $A_n \uparrow A$ con $A_n \in \mathcal{H}$, y elijamos $F_n \subset A_n \subset U_n$ con errores menores que $\varepsilon 2^{-n-1}$. El abierto $U = \bigcup_n U_n$ contiene a A y $\mu(U \setminus A) \leq \sum_n \mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon$. Además, por continuidad por abajo existe n_0 con $\mu(A \setminus A_{n_0}) < \varepsilon/2$, y el cerrado $F = F_{n_0}$ cumple $\mu(A \setminus F) \leq \mu(A \setminus A_{n_0}) + \mu(A_{n_0} \setminus F_{n_0}) < \varepsilon$.

Los cerrados forman un π -sistema que genera $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, luego $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{H}$ por el teorema 2.15.

Paso 2: aproximación por abiertos, μ de Lebesgue–Stieltjes. Sea $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y $A_n = A \cap B(0, n)$. La medida $\mu_n(E) = \mu(E \cap B(0, n))$ es finita, de modo que por el paso 1 existe un abierto $V_n \supset A_n$ con $\mu_n(V_n \setminus A_n) < \varepsilon 2^{-n}$. El abierto $U_n = V_n \cap B(0, n)$ contiene a A_n y $\mu(U_n \setminus A_n) = \mu_n(V_n \setminus A_n) < \varepsilon 2^{-n}$. Así $U = \bigcup_n U_n$ es un abierto que contiene a A con $\mu(U \setminus A) \leq \sum_n \mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon$.

Paso 3: aproximación por cerrados. Aplicando el paso 2 a A^c , existe un abierto $O \supset A^c$ con $\mu(O \setminus A^c) < \varepsilon$; el cerrado $F = O^c$ está contenido en A y $A \setminus F = O \setminus A^c$. ■

Corolario 7.4. Sea μ una medida de Lebesgue–Stieltjes sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Para todo $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\mu(U) : U \supset A \text{ abierto}\} \\ &= \sup\{\mu(F) : F \subset A \text{ cerrado}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ compacto}\}. \end{aligned}$$

En particular, si $\mu(A) < \infty$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subset A$ con $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Todo lo anterior vale también para la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$.

Demostración. Las dos primeras igualdades son consecuencia inmediata del teorema. Para la tercera, si $F \subset A$ es cerrado, los compactos $F \cap \overline{B(0, n)}$ crecen hacia F y $\mu(F \cap \overline{B(0, n)}) \rightarrow \mu(F)$.

Para $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$, escribamos $A = E \cup N$ con E boreliano y $N \subset Z$, Z boreliano nulo. Aplicando el teorema a $E \cup Z$ y a E obtenemos un abierto $U \supset E \cup Z \supset A$ y un cerrado $F \subset E \subset A$ con $m(U \setminus (E \cup Z)) < \varepsilon$ y $m(E \setminus F) < \varepsilon$; entonces $m(U \setminus A) \leq m(U \setminus (E \cup Z)) + m(Z) < \varepsilon$ y $m(A \setminus F) \leq m(E \setminus F) + m(Z) < \varepsilon$. ■

Corolario 7.5. $A \subset \mathbb{R}^d$ es Lebesgue medible si y solo si existen G , intersección numerable de abiertos, y F , unión numerable de cerrados, con $F \subset A \subset G$ y $m(G \setminus F) = 0$.

Demostración. Si $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$, por el corolario 7.4 existen abiertos $U_n \supset A$ y cerrados $F_n \subset A$ con $m(U_n \setminus A) < 1/n$ y $m(A \setminus F_n) < 1/n$. Basta tomar $G = \bigcap_n U_n$ y $F = \bigcup_n F_n$. El recíproco es claro: $A = F \cup (A \setminus F)$ con $A \setminus F \subset G \setminus F$ nulo. ■

7.3 Conjuntos de medida nula

La noción de conjunto de medida nula es anterior a la de medida: puede formularse solo con volúmenes de cajas, y es la que aparece en el criterio de integrabilidad de Riemann (capítulo 8).

Definición 7.6. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ tiene *medida nula* si para todo $\varepsilon > 0$ existen cajas $R_1, R_2, \dots$ con

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) < \varepsilon.$$

Proposición 7.7. Para $A \subset \mathbb{R}^d$, son equivalentes:

- (I) A tiene medida nula en el sentido de la definición 7.6;
- (II) $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ y $m(A) = 0$;
- (III) para todo $\varepsilon > 0$ existen cubos $C_1, C_2, \dots$ con $A \subset \bigcup_j C_j$ y $\sum_j \text{vol}(C_j) < \varepsilon$.

En (i) y (iii) es indiferente que las cajas o los cubos sean abiertos, cerrados o semiabiertos.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Para cada k sea $B^k = \bigcup_j R_j^k \supset A$ un cubrimiento por cajas con $\sum_j \text{vol}(R_j^k) < 1/k$. Como $m(R) = \text{vol}(R)$ para toda caja (proposición 6.16), $m(B^k) < 1/k$. El boreliano $D = \bigcap_k B^k$ contiene a A y tiene medida nula, luego $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ y $m(A) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Por el corolario 7.4 existe un abierto $U \supset A$ con $m(U) < \varepsilon$. Por el lema 2.20, U es unión disjunta numerable de cubos diádicos Q_j , y $\sum_j \text{vol}(Q_j) = \sum_j m(Q_j) = m(U) < \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) es trivial. Finalmente, toda caja R está contenida en una caja abierta de volumen menor que $\text{vol}(R) + \varepsilon 2^{-j}$, y contenida en su clausura, del mismo volumen; esto permite cambiar el tipo de cajas o cubos a voluntad. ■

Observación 7.8. En consecuencia: todo punto y todo conjunto numerable de $\mathbb{R}^d$ tiene medida nula; todo subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula; y una unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula (por la σ -subaditividad de m , o directamente, cubriendo el j -ésimo conjunto con cajas de volumen total menor que $\varepsilon 2^{-j}$).

Proposición 7.9. Una caja acotada $R = \prod_j [a_j, b_j]$ tiene medida nula si y solo si es degenerada, es decir, $a_j = b_j$ para algún j . Más generalmente, si $X \subset \mathbb{R}^{d_1}$ y $p \in \mathbb{R}^{d_2}$, entonces $X \times \{p\}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$.

Demostración. $m(R) = \prod_j (b_j - a_j)$. Para la segunda afirmación, $X \times \{p\} \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \{p\}$ y $m_{d_1+d_2}(\mathbb{R}^{d_1} \times \{p\}) = m_{d_1}(\mathbb{R}^{d_1}) m_{d_2}(\{p\}) = \infty \cdot 0 = 0$ (proposición 6.16(c)). ■

7.3.1 Imágenes de conjuntos de medida nula

En esta subsección usamos en $\mathbb{R}^d$ la norma del máximo, para la cual las bolas cerradas son cubos. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ es *lipschitziana* si existe $L > 0$ con $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty$ para todos $x, y \in A$; como todas las normas de $\mathbb{R}^d$ son equivalentes, la noción no depende de la norma (solo la constante).

Proposición 7.10. *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ de medida nula y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ lipschitziana, con $k \geq d$. Entonces $f(A)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^k$.*

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < 1$ y $C_1, C_2, \dots$ cubos cerrados que cubren A con $\sum_j \text{vol}(C_j) < \varepsilon$; si ℓ_j es el lado de C_j , entonces $\ell_j^d = \text{vol}(C_j) < 1$. Si $x, y \in A \cap C_j$, entonces $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\ell_j$, de modo que $f(A \cap C_j)$ está contenido en un cubo cerrado $D_j \subset \mathbb{R}^k$ de lado $L\ell_j$. Así $f(A) \subset \bigcup_j D_j$ y, como $k \geq d$ y $\ell_j < 1$,

$$\sum_j \text{vol}(D_j) = L^k \sum_j \ell_j^k \leq L^k \sum_j \ell_j^d < L^k \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ es *localmente lipschitziana* si todo $x \in A$ tiene un entorno abierto V_x (relativo a A) tal que $f|_{V_x}$ es lipschitziana.

Corolario 7.11. *La proposición 7.10 vale también para f localmente lipschitziana.*

Demostración. Por la propiedad de Lindelöf de $\mathbb{R}^d$ (sección A.1), del cubrimiento $A \subset \bigcup_{x \in A} V_x$ se extrae un subcubrimiento numerable $A \subset \bigcup_i V_{x_i}$. Cada $f(A \cap V_{x_i})$ tiene medida nula, y $f(A) = \bigcup_i f(A \cap V_{x_i})$ es unión numerable de conjuntos de medida nula. ■

Corolario 7.12. *Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$. Si $A \subset U$ tiene medida nula, entonces $f(A)$ tiene medida nula. En particular, si $\varphi : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo de clase C^1 entre abiertos de $\mathbb{R}^d$, entonces $\varphi(A)$ tiene medida nula para todo $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ con $A \subset U$.*

Demostración. Basta ver que f es localmente lipschitziana. Dado $x \in U$, sea $r > 0$ con $\overline{B(x, r)} \subset U$ y $K_x = \max\{\|Df(y)\| : y \in \overline{B(x, r)}\} < \infty$, que existe por continuidad de Df y compacidad. Por la desigualdad del valor medio sobre la bola convexa $B(x, r)$, $\|f(y) - f(z)\| \leq K_x\|y - z\|$ para $y, z \in B(x, r)$. Para la segunda afirmación, escribamos $A = E \cup N$ con E boreliano y N de medida nula: $\varphi(E)$ es boreliano porque $\varphi(E) = (\varphi^{-1})^{-1}(E)$ con φ^{-1} continua, y $\varphi(N)$ tiene medida nula. ■

Proposición 7.13. *Sea $U \subset \mathbb{R}^{d_1}$ abierto y $f \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ con $d_1 < d$. Entonces $f(U)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Sea $W = U \times \mathbb{R}^{d-d_1}$, abierto de $\mathbb{R}^d$, y $g : W \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g(x, y) = f(x)$, que es de clase C^1 . Entonces $f(U) = g(U \times \{0\})$, y $U \times \{0\}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^d$ (proposición 7.9); se aplica el corolario 7.12. ■

Por ejemplo, las curvas C^1 en $\mathbb{R}^2$ y las superficies C^1 en $\mathbb{R}^3$ (imágenes de abiertos de dimensión menor) tienen medida de Lebesgue nula.

7.4 Transformaciones lineales

Teorema 7.14. Sea $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ lineal y $v \in \mathbb{R}^d$. Para todo $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$, el conjunto $v + T(A)$ es Lebesgue medible y

$$m(v + T(A)) = |\det T| m(A).$$

Si T es invertible y $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, entonces $v + T(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

La demostración ocupa el resto de la sección. Por la invariancia por traslaciones (proposición 6.16) basta tratar el caso $v = 0$.

Lema 7.15. Sea T invertible. Entonces $T(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ para todo $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, y existe $c_T \in (0, \infty)$ tal que $m(T(A)) = c_T m(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Además $c_{ST} = c_S c_T$ para S, T invertibles.

Demostración. $T(A) = (T^{-1})^{-1}(A)$ es boreliano porque T^{-1} es continua. La función $\nu(A) = m(T(A))$ es una medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ (T es biyectiva), invariante por traslaciones, pues $T(A+x) = T(A) + Tx$, y de Lebesgue–Stieltjes, pues T lleva acotados en acotados. Por la proposición 6.16(b), $\nu = c_T m$ con $c_T = m(T((0, 1]^d))$, que es positivo porque $\nu \neq 0$. Finalmente, $c_{ST}m(A) = m(S(T(A))) = c_S m(T(A)) = c_S c_T m(A)$. ■

Lema 7.16. (a) Si D es diagonal con entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ no nulas, $c_D = |\lambda_1 \cdots \lambda_d| = |\det D|$.

(b) Si Q es ortogonal (una isometría lineal), $c_Q = 1$.

(c) Si P es autoadjunta y definida positiva, $c_P = \det P$.

Demostración. (a) $D((0, 1]^d)$ es una caja de lados $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|$. (b) Q preserva la norma euclídea, luego $Q(B(0, 1)) = B(0, 1)$ para la bola euclídea y $m(B(0, 1)) = c_Q m(B(0, 1))$; como $0 < m(B(0, 1)) < \infty$, $c_Q = 1$. (c) Por el teorema espectral (sección A.2), $P = Q^{-1}DQ$ con Q ortogonal y D diagonal con entradas $\lambda_i > 0$; por (a), (b) y el lema 7.15, $c_P = c_{Q^{-1}} c_D c_Q = \lambda_1 \cdots \lambda_d = \det P$. ■

Demostración del teorema 7.14. T invertible y A boreliano. Por la descomposición polar (sección A.2), $T = QP$ con $P = \sqrt{T^*T}$ autoadjunta definida positiva y $Q = TP^{-1}$ ortogonal. Por los dos lemas,

$$c_T = c_Q c_P = \det P = \sqrt{\det(T^*T)} = \sqrt{(\det T)^2} = |\det T|.$$

T invertible y A Lebesgue medible. Si $A = E \cup N$ con $N \subset Z$ boreliano nulo, entonces $T(A) = T(E) \cup T(N)$ con $T(N) \subset T(Z)$ y $m(T(Z)) = |\det T| m(Z) = 0$; luego $T(A) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ y $m(T(A)) = m(T(E)) = |\det T| m(A)$.

T no invertible. Entonces $\det T = 0$ y $T(\mathbb{R}^d)$ está contenido en un hiperplano W . Si Q es una isometría lineal que lleva W en $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, entonces $m(W) = m(Q(W)) \leq m(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = 0$ (proposición 7.9), de modo que $T(A)$, subconjunto de un conjunto nulo, es Lebesgue medible y $m(T(A)) = 0 = |\det T| m(A)$. ■

Corolario 7.17. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$, $m(\lambda A) = |\lambda|^d m(A)$. En particular, $m(B(x, r)) = r^d m(B(0, 1))$, y todo subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^d$ tiene medida nula.

Por qué la descomposición polar. El análogo en dimensión uno es la forma polar $z = e^{i\theta}|z|$ de un complejo no nulo: todo isomorfismo es una transformación ortogonal (rotación o reflexión, que no cambia volúmenes) compuesta con una “dilatación positiva” P (que multiplica volúmenes por $\det P$). Así, la fórmula $m(T(A)) = |\det T|m(A)$ se reduce a los dos casos en que es evidente.

7.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.18. Pruebe directamente, sin usar la fórmula del determinante, que todo subespacio $W \subset \mathbb{R}^d$ con $\dim W < d$ tiene medida nula.

Solución. Sea $e_1, \dots, e_k$ una base ortonormal de W ($k < d$), completada a una base ortonormal $e_1, \dots, e_d$ de $\mathbb{R}^d$, y sea Q la isometría lineal con $Q(e_j)$ igual al j -ésimo vector canónico. Entonces $Q(W) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, que tiene medida nula (proposición 7.9), y por el lema 7.16(b), $m(W) = m(Q(W)) = 0$. Alternativamente, W es la imagen de $\mathbb{R}^k$ por una aplicación lineal, que es C^1 , y se aplica la proposición 7.13. ■

Ejercicio 7.19. Sea T invertible y $P = \sqrt{T^*T}$. Pruebe que $Q = TP^{-1}$ es una isometría lineal. (Observe que, en cambio, $P^{-1}T$ no tiene por qué serlo.)

Solución. P es autoadjunta e invertible, luego $Q^*Q = (P^{-1})^*T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I$. En cambio, $(P^{-1}T)^*(P^{-1}T) = T^*P^{-2}T = T^*(T^*T)^{-1}T = T^*T^{-1}(T^*)^{-1}T$, que en general no es la identidad (tómese, por ejemplo, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). ■

Las integrales de Riemann y de Lebesgue

8.1 Funciones semicontinuas

Trabajamos sobre un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ con la topología relativa: $U \subset X$ es abierto en X si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ con $B(x, r) \cap X \subset U$.

Definición 8.1. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$. Decimos que f es *semicontinua inferiormente* (s.c.i.) en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \ni x_0$ de X con

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad \text{para todo } x \in U,$$

y *semicontinua superiormente* (s.c.s.) en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $V \ni x_0$ con $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ para todo $x \in V$. Decimos que f es s.c.i. (resp. s.c.s.) si lo es en todo punto de X .

Es claro que f es continua en x_0 si y solo si es s.c.i. y s.c.s. en x_0 , y que f es s.c.i. si y solo si $-f$ es s.c.s.

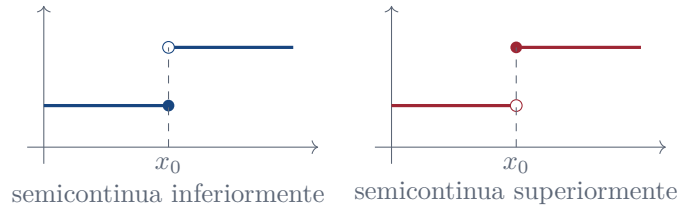


Figura 8.1: En un salto, una función s.c.i. toma el valor de abajo: cerca de x_0 no puede caer mucho por debajo de $f(x_0)$, aunque sí puede subir. Una función s.c.s. toma el valor de arriba.

Proposición 8.2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es s.c.i. si y solo si $\{f > \alpha\}$ es abierto en X para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y es s.c.s. si y solo si $\{f < \alpha\}$ es abierto para todo α . En particular, las funciones semicontinuas son borelianas.

Demostración. Si f es s.c.i. y $f(x_0) > \alpha$, tomando $\varepsilon = f(x_0) - \alpha$ obtenemos un abierto $U \ni x_0$ con $f > \alpha$ en U : $\{f > \alpha\}$ es abierto. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, $U = \{f > f(x_0) - \varepsilon\}$ es un abierto que contiene a x_0 . El caso s.c.s. es análogo, y la medibilidad se sigue de la proposición 4.10. ■

Para $x_0 \in X$ punto de acumulación de X definimos

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{r > 0} \inf_{x \in B(x_0, r) \cap X \setminus \{x_0\}} f(x), \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{r > 0} \sup_{x \in B(x_0, r) \cap X \setminus \{x_0\}} f(x).$$

Como en el capítulo 1, $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$ es el menor valor límite de $f(x_n)$ sobre las sucesiones $x_n \rightarrow x_0$ con $x_n \in X \setminus \{x_0\}$: para toda tal sucesión, $\liminf_n f(x_n) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$, y existe una tal sucesión con $f(x_n) \rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Definición 8.3 (Envolventes semicontinuas). Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos $\underline{f}, \bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\underline{f}(x) = \sup_{r > 0} \inf_{z \in B(x, r) \cap X} f(z), \quad \bar{f}(x) = \inf_{r > 0} \sup_{z \in B(x, r) \cap X} f(z).$$

Nótese que aquí, a diferencia del $\liminf$, se incluye el punto x ; en particular $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$.

Proposición 8.4. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces:

- (a) $\underline{f}$ es s.c.i. y $\bar{f}$ es s.c.s.; en particular ambas son borelianas;
- (b) $f(x) = \underline{f}(x)$ si y solo si f es s.c.i. en x , y $f(x) = \bar{f}(x)$ si y solo si f es s.c.s. en x ;
- (c) f es continua en x si y solo si $\underline{f}(x) = \bar{f}(x)$.

Demostración. (a) Sea $\underline{f}(x) > \alpha$. Existe $r > 0$ con $\inf_{B(x, r) \cap X} f > \alpha$. Si $y \in B(x, r/2) \cap X$, entonces $B(y, r/2) \subset B(x, r)$ y $\underline{f}(y) \geq \inf_{B(y, r/2) \cap X} f \geq \inf_{B(x, r) \cap X} f > \alpha$. Así $\{\underline{f} > \alpha\}$ es abierto. El caso de $\bar{f}$ es simétrico.

(b) $f(x) = \underline{f}(x)$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ con $\inf_{B(x, r) \cap X} f > f(x) - \varepsilon$, que es la definición de s.c.i. en x con $U = B(x, r) \cap X$.

(c) Por (b), $\underline{f}(x) = \bar{f}(x)$ equivale a que f sea s.c.i. y s.c.s. en x , pues $\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x)$. ■

8.2 La integral de Riemann en una caja

Sea $R = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$ una caja con $a_j < b_j$. Una *partición* de $[a, b]$ es un conjunto finito $P = \{t_0, \dots, t_k\}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, y una partición de R es un producto $P = P_1 \times \dots \times P_d$ de particiones de los lados. Denotamos por $\bar{P}$ la familia de las subcajas $I^1 \times \dots \times I^d$, donde cada I^j es uno de los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de P_j , y por $\|P\|$ la mayor longitud de esos intervalos. Para particiones P, Q de R ponemos $P + Q = (P_1 \cup Q_1) \times \dots \times (P_d \cup Q_d)$, que refina a ambas, y $\text{card}(Q) = \sum_j \text{card}(Q_j)$.

Definición 8.5 (Integral de Riemann). Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Para una partición P de R definimos las sumas superior e inferior

$$U(f, P) = \sum_{B \in \bar{P}} \left(\sup_B f \right) \text{vol}(B), \quad L(f, P) = \sum_{B \in \bar{P}} \left(\inf_B f \right) \text{vol}(B),$$

y las integrales superior e inferior

$$\int_R f = \inf_P U(f, P), \quad \int_{-R} f = \sup_P L(f, P).$$

Decimos que f es *Riemann integrable* si $\int_R f = \bar{\int}_R f$, y a ese valor común lo llamamos *integral de Riemann* de f , denotada $\int_R f(x) dx$.

Si Q refina a P , entonces $L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P)$, pues al partir una caja el supremo sobre cada pedazo no supera al supremo sobre la caja y el ínfimo no baja. Tomando el refinamiento común $P + Q$ se obtiene $L(f, P) \leq U(f, Q)$ para todo par de particiones, luego $\int_R f \leq \bar{\int}_R f$. Además $L(f, P) = -U(-f, P)$, de modo que $\int_R f = -\bar{\int}_R(-f)$.

Lema 8.6. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, $M = \sup_R |f|$ y $V = \max_j \prod_{l \neq j} (b_l - a_l)$. Para todo par de particiones P, Q de R ,

$$0 \leq U(f, P) - U(f, P + Q) \leq 2MV \text{card}(Q) \|P\|.$$

Demostración. Supongamos primero que P' se obtiene de P agregando un punto s a la partición del j -ésimo lado, con $t_{i-1} < s < t_i$ (si s ya estaba, $P' = P$). Las únicas subcajas afectadas son las de la forma $B = I^1 \times \cdots \times [t_{i-1}, t_i] \times \cdots \times I^d$, que se parten en dos, B' y B'' , y para cada una

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\sup_B f \right) \text{vol}(B) - \left(\sup_{B'} f \right) \text{vol}(B') - \left(\sup_{B''} f \right) \text{vol}(B'') \\ &= \sum_{C \in \{B', B''\}} \left(\sup_B f - \sup_C f \right) \text{vol}(C) \leq 2M \text{vol}(B). \end{aligned}$$

Sumando sobre las cajas afectadas, cuyos volúmenes suman $(t_i - t_{i-1}) \prod_{l \neq j} (b_l - a_l) \leq \|P\| V$, resulta $0 \leq U(f, P) - U(f, P') \leq 2MV \|P\|$. Se agregan uno a uno los puntos de Q ; como cada partición intermedia refina a P , su norma es a lo sumo $\|P\|$, y se suman las $\text{card}(Q)$ estimaciones. ■

Proposición 8.7. Si (P_n) son particiones de R con $\|P_n\| \rightarrow 0$, entonces $U(f, P_n) \rightarrow \bar{\int}_R f$ y $L(f, P_n) \rightarrow \int_R f$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y Q una partición con $U(f, Q) < \bar{\int}_R f + \varepsilon$. Por el lema 8.6 y porque $P_n + Q$ refina a Q ,

$$\bar{\int}_R f \leq U(f, P_n) \leq U(f, P_n + Q) + 2MV \text{card}(Q) \|P_n\| \leq U(f, Q) + 2MV \text{card}(Q) \|P_n\|,$$

de modo que $\bar{\int}_R f \leq \liminf_n U(f, P_n) \leq \limsup_n U(f, P_n) \leq \bar{\int}_R f + \varepsilon$. La afirmación sobre L se obtiene aplicando la anterior a $-f$. ■

Observación 8.8 (Sumas diádicas). Un caso particular importante son las particiones por cubos diádicos de lado 2^{-k} . Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y de soporte acotado, las sumas

$$\bar{S}(f, k) = \sum_{\ell \in 2^{-k} \mathbb{Z}^d} \left(\sup_{\ell + [0, 2^{-k}]^d} f \right) 2^{-kd}, \quad \underline{S}(f, k) = \sum_{\ell \in 2^{-k} \mathbb{Z}^d} \left(\inf_{\ell + [0, 2^{-k}]^d} f \right) 2^{-kd}$$

tienen finitos términos no nulos, y por la proposición 8.7 (aplicada en una caja diádica que contenga al soporte con holgura) $\bar{S}(f, k) \rightarrow \bar{\int} f$ y $\underline{S}(f, k) \rightarrow \int f$. Así, definir la integral de Riemann con sumas diádicas, como en Salamon [5, sección 2.2], es equivalente a la definición 8.5.

8.3 Riemann y Lebesgue

Teorema 8.9. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$\overline{\int}_R f = \int_R \overline{f} \, dm \quad y \quad \underline{\int}_R f = \int_R \underline{f} \, dm,$$

donde las envolventes se toman respecto de $X = R$ y las integrales de la derecha son de Lebesgue (las funciones son borelianas y acotadas, luego integrables sobre R).

Demostración. Para una partición P sea $\varphi_P = \sum_{B \in \overline{P}} (\sup_B f) \mathbf{1}_{B^\circ}$. Como las fronteras de las subcajas tienen medida nula (proposición 7.9), $\int_R \varphi_P \, dm = U(f, P)$. Sea (P_n) una sucesión de particiones con $\|P_n\| \rightarrow 0$, y sea N la unión de las fronteras de todas las subcajas de todas las P_n , que es un conjunto nulo. Fijemos $x \in R \setminus N$. Para cada n existe una única $B_n \in \overline{P}_n$ con $x \in B_n^\circ$, y $\varphi_{P_n}(x) = \sup_{B_n} f$. Por un lado, existe $r_n > 0$ con $B(x, r_n) \subset B_n$, de modo que $\sup_{B_n} f \geq \sup_{B(x, r_n) \cap R} f \geq \overline{f}(x)$. Por otro lado, dado $r > 0$, como $\text{diam}(B_n) \leq \sqrt{d} \|P_n\| \rightarrow 0$, se tiene $B_n \subset B(x, r)$ para n grande, y $\limsup_n \sup_{B_n} f \leq \sup_{B(x, r) \cap R} f$; tomando ínfimo en r , $\limsup_n \varphi_{P_n}(x) \leq \overline{f}(x)$. Así $\varphi_{P_n} \rightarrow \overline{f}$ en casi todo punto de R , con $|\varphi_{P_n}| \leq M$ y $m(R) < \infty$. Por la proposición 8.7 y convergencia dominada,

$$\overline{\int}_R f = \lim_n U(f, P_n) = \lim_n \int_R \varphi_{P_n} \, dm = \int_R \overline{f} \, dm.$$

La otra igualdad se obtiene aplicando esta a $-f$, pues $\underline{f} = -(\overline{-f})$. ■

Teorema 8.10 (Criterio de Lebesgue). Una función acotada $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable si y solo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida nula.

Demostración. Por la proposición 8.4(c), el conjunto de discontinuidades es $\{\underline{f} < \overline{f}\}$. Por el teorema 8.9, f es Riemann integrable si y solo si $\int_R (\overline{f} - \underline{f}) \, dm = 0$, y como $\overline{f} - \underline{f} \geq 0$, esto equivale a $m\{\underline{f} < \overline{f}\} = 0$ (proposición 5.11(b)). ■

Teorema 8.11. Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable, entonces f es Lebesgue medible y

$$\int_R f(x) \, dx = \int_R f \, dm.$$

Demostración. Sea $Z = \{\underline{f} < \overline{f}\}$, boreliano de medida nula por el criterio de Lebesgue. Fuera de Z se tiene $f = \overline{f}$, de modo que, para todo $B \in \mathcal{B}_R$,

$$\{f \in B\} = (\{\overline{f} \in B\} \cap Z^c) \cup (\{f \in B\} \cap Z),$$

unión de un boreliano y de un subconjunto de un conjunto nulo: $\{f \in B\} \in \mathcal{L}_R$. Como $f = \overline{f}$ c.t.p., el teorema 8.9 da $\int_R f \, dm = \int_R \overline{f} \, dm = \int_R \overline{f} = \int_R f(x) \, dx$. ■

La idea en una frase

Riemann ve a f a través de sus envolventes $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$: integra la mejor aproximación semicontinua por abajo y por arriba. Ambas coinciden c.t.p. exactamente cuando

f es continua c.t.p.; la integral de Lebesgue, en cambio, no necesita ninguna regularidad de f .

8.4 Conjuntos Jordan medibles

Para $A \subset \mathbb{R}^d$ y una caja R , las envolventes de $\mathbf{1}_A : R \rightarrow \mathbb{R}$ son

$$\overline{\mathbf{1}}_A = \mathbf{1}_{\overline{A}}, \quad \underline{\mathbf{1}}_A = \mathbf{1}_{A^\circ}$$

(interior y clausura relativos a R), y $\mathbf{1}_A$ es discontinua exactamente en ∂A : si $x \in \partial A$, toda bola centrada en x corta a A y a su complemento, mientras que $\mathbf{1}_A$ es constante en los abiertos A° y $(\overline{A})^c$.

Definición 8.12 (Conjuntos Jordan medibles). Un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^d$ es *Jordan medible* si $\mathbf{1}_A$ es Riemann integrable sobre una caja R cuyo interior contiene a $\overline{A}$. Su *medida de Jordan* (o contenido) es $c(A) = \int_R \mathbf{1}_A(x) dx$. Más generalmente, llamamos *contenido exterior* e *interior* de A a $\overline{c}(A) = \int_R \overline{\mathbf{1}}_A$ y $\underline{c}(A) = \int_R \underline{\mathbf{1}}_A$.

Proposición 8.13. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ acotado y R una caja con $\overline{A} \subset R^\circ$. Entonces

$$\overline{c}(A) = m(\overline{A}), \quad \underline{c}(A) = m(A^\circ),$$

y en particular estos valores no dependen de R . En consecuencia:

- (a) A es Jordan medible si y solo si $m(\partial A) = 0$;
- (b) si A es Jordan medible, entonces $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ y $c(A) = m(A)$;
- (c) uniones, intersecciones y diferencias finitas de conjuntos Jordan medibles son Jordan medibles.

Demostración. La primera afirmación es el teorema 8.9 aplicado a $\mathbf{1}_A$. (a) Por lo anterior, $\overline{c}(A) - \underline{c}(A) = m(\overline{A} \setminus A^\circ) = m(\partial A)$. (b) Es el teorema 8.11. (c) Se sigue de (a), pues $\partial(A \cup B)$, $\partial(A \cap B)$ y $\partial(A \setminus B)$ están contenidos en $\partial A \cup \partial B$. ■

Observación 8.14. Si A es Jordan medible y tiene interior vacío, entonces $m(A) = c(A) = \underline{c}(A) = m(A^\circ) = 0$. El recíproco del apartado (b) es falso: el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es Lebesgue medible (de medida nula), pero su frontera es $[0, 1]$, de modo que no es Jordan medible. La medida de Jordan solo “ve” interiores y clausuras.

Ejemplo 8.15 (Un compacto de interior vacío y medida positiva). Sea $q_1, q_2, \dots$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, y

$$K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \geq 1} (q_n - \varepsilon 2^{-n}, q_n + \varepsilon 2^{-n}).$$

K es cerrado y acotado, luego compacto; no contiene ningún racional, luego tiene interior vacío; y $m(K) \geq 1 - \sum_n 2\varepsilon 2^{-n} = 1 - 2\varepsilon > 0$. Como $\partial K = K$, el conjunto K no es Jordan medible, y $\mathbf{1}_K$ es una función que no es Riemann integrable pese a ser nula salvo en un conjunto sin interior. Nótese que $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ tiene interior vacío y medida 1, pero no sirve como ejemplo porque no es cerrado. Construcciones del tipo “Cantor gordo”, en las que se quitan en cada paso intervalos centrales cada vez más cortos, dan otros ejemplos.

8.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 8.16. Sea $X \subset \mathbb{R}^d$, $x_0 \in X$ punto de acumulación de X y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que f es s.c.i. en x_0 si y solo si $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$, y s.c.s. en x_0 si y solo si $f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Solución. Si f es s.c.i. en x_0 y $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ con $f > f(x_0) - \varepsilon$ en $B(x_0, r) \cap X$; luego $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$, y ε es arbitrario. Recíprocamente, si $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ con $\inf_{B(x_0, r) \cap X \setminus \{x_0\}} f > f(x_0) - \varepsilon$, y como el propio x_0 también satisface la desigualdad, $f > f(x_0) - \varepsilon$ en $B(x_0, r) \cap X$. El caso s.c.s. se obtiene aplicando lo anterior a $-f$. ■

Ejercicio 8.17. Pruebe que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^d$ es Jordan medible si y solo si su frontera tiene contenido exterior nulo, es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existen *finitas* cajas que cubren a ∂A con volumen total menor que ε .

Solución. Por la proposición 8.13, A es Jordan medible si y solo si $m(\partial A) = 0$. Si ∂A está cubierto por finitas cajas de volumen total menor que ε para todo ε , entonces tiene medida nula (proposición 7.7). Recíprocamente, si $m(\partial A) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existen cajas abiertas $R_1, R_2, \dots$ que cubren a ∂A con volumen total menor que ε ; como ∂A es cerrado y acotado, es compacto, y finitas de esas cajas bastan para cubirlo. En general, un compacto tiene medida nula si y solo si tiene contenido exterior nulo; para conjuntos no compactos esto es falso ($\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tiene medida nula y contenido exterior 1). ■

Ejercicio 8.18. Pruebe que toda función monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable.

Solución. Supongamos f creciente (si no, se considera $-f$); es acotada, por $f(a)$ y $f(b)$. En cada punto existen los límites laterales, y f es discontinua en x si y solo si $f(x^-) < f(x^+)$ (con las convenciones $f(a^-) = f(a)$ y $f(b^+) = f(b)$). Los intervalos $(f(x^-), f(x^+))$ asociados a los puntos de discontinuidad son disjuntos dos a dos y están contenidos en $[f(a), f(b)]$; cada uno contiene un racional distinto, de modo que las discontinuidades son numerables, luego de medida nula. Se aplica el teorema 8.10. (Compárese con el corolario 3.5.) ■

Cambio de variable

9.1 El enunciado

Para $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de clase C^1 escribimos

$$J_\varphi(x) = |\det D\varphi(x)|, \quad x \in U,$$

para el jacobiano de φ . Recordemos que $\mathcal{B}_U = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} : A \subset U\}$ (ejemplo 4.5).

Teorema 9.1 (Cambio de variable). Sean $U, V \subset \mathbb{R}^d$ abiertos y $\varphi : U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase C^1 . Para toda $f : V \rightarrow [0, +\infty]$ medible (boreliana o Lebesgue medible),

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx.$$

Una función medible $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y solo si $(f \circ \varphi)J_\varphi$ lo es sobre U , y en ese caso vale la misma igualdad.

Proposición 9.2 (Reducción). El teorema 9.1 es consecuencia de la igualdad

$$m(\varphi(Q)) = \int_Q J_\varphi dm \quad \text{para todo cubo diádico } Q \text{ con } \overline{Q} \subset U. \quad (9.1)$$

Demostración. De cubos a borelianos. Como φ es un homeomorfismo, $\varphi(A) \in \mathcal{B}_V$ para todo $A \in \mathcal{B}_U$, y $A \mapsto m(\varphi(A))$ es una medida sobre $(U, \mathcal{B}_U)$; también lo es $\nu(A) = \int_A J_\varphi dm$ (proposición 5.26). La familia $\mathcal{A}_U$ de los cubos diádicos cuya clausura está en U , junto con $\emptyset$, es un π -sistema que genera $\mathcal{B}_U$, y por el lema 2.20 U es unión disjunta numerable de elementos de $\mathcal{A}_U$. Para $Q \in \mathcal{A}_U$ ambas medidas son finitas: $\varphi(\overline{Q})$ es compacto y J_φ es continua en el compacto $\overline{Q}$. Por el teorema 2.17(ii), (9.1) implica

$$m(\varphi(A)) = \int_A J_\varphi dm \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}_U,$$

es decir, $\nu \circ \varphi^{-1} = m$ sobre $\mathcal{B}_V$.

De conjuntos a funciones. Por la proposición 5.24 y la proposición 5.26, para $f : V \rightarrow [0, +\infty]$ boreliana,

$$\int_V f dm = \int_V f d(\nu \circ \varphi^{-1}) = \int_U f \circ \varphi d\nu = \int_U (f \circ \varphi) J_\varphi dm,$$

y lo mismo para f integrable. Si f es solo Lebesgue medible, coincide c.t.p. con una boreliana g (lema 7.1 y observación 7.2), y $f \circ \varphi = g \circ \varphi$ fuera de $\varphi^{-1}(\{f \neq g\})$, que tiene medida nula por el corolario 7.12 aplicado a φ^{-1} ; además $f \circ \varphi$ es Lebesgue medible por el mismo corolario. Así ambos lados no cambian al reemplazar f por g . ■

9.2 Dos lemas de aproximación

En esta sección usamos la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^d$ y la correspondiente norma de operadores, $\|T\| = \sup\{\|Tv\|_\infty : \|v\|_\infty \leq 1\}$. Las bolas cerradas son los cubos $C_r(a) = \{x : \|x - a\|_\infty \leq r\}$, y $m(C_r(a)) = (2r)^d$.

Lema 9.3 (Diferenciabilidad uniforme). *Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de clase C^1 y $K \subset U$ compacto. Para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $a \in K$, se tiene $C_\delta(a) \subset U$ y*

$$\|\varphi(x) - \varphi(a) - D\varphi(a)(x - a)\|_\infty \leq \eta\|x - a\|_\infty \quad \text{para todo } x \in C_\delta(a).$$

Demostración. Sea $\delta_0 > 0$ tal que el compacto $K' = \{z : \text{dist}_\infty(z, K) \leq \delta_0\}$ está contenido en U . Como $D\varphi$ es uniformemente continua en K' , existe $\delta \in (0, \delta_0]$ con $\|D\varphi(z) - D\varphi(a)\| \leq \eta$ si $z, a \in K'$ y $\|z - a\|_\infty \leq \delta$. Si $a \in K$ y $x \in C_\delta(a)$, el segmento de a a x está en el cubo convexo $C_\delta(a) \subset K'$, y el teorema fundamental del cálculo, aplicado componente a componente, da

$$\varphi(x) - \varphi(a) - D\varphi(a)(x - a) = \int_0^1 (D\varphi(a + t(x - a)) - D\varphi(a))(x - a) dt,$$

cuya norma es a lo sumo $\eta\|x - a\|_\infty$. ■

Lema 9.4 (Estimación local). *Sea $\varphi : U \rightarrow V$ un difeomorfismo C^1 , $K \subset U$ compacto y $0 < \varepsilon < 1$. Existe $r_0 > 0$ tal que, para todo $a \in K$ y todo $0 < r \leq r_0$,*

$$(1 - \varepsilon) J_\varphi(a) m(C_r(a)) \leq m(\varphi(C_r(a))) \leq (1 + \varepsilon) J_\varphi(a) m(C_r(a)).$$

Demostración. Sea $\psi = \varphi^{-1} : V \rightarrow U$, también de clase C^1 , y $\tilde{K} = \varphi(K)$, compacto. Por continuidad existe $M \geq 1$ con $\|D\varphi(a)\| \leq M$ para $a \in K$ y $\|D\psi(b)\| \leq M$ para $b \in \tilde{K}$; recordemos que $D\psi(\varphi(a)) = D\varphi(a)^{-1}$. Elijamos $\eta > 0$ con

$$(1 + \eta M)^d < 1 + \varepsilon \quad \text{y} \quad (1 + \eta M)^{-d} > 1 - \varepsilon,$$

y sean δ_1 y δ_2 los dados por el lema 9.3 para (φ, K, η) y para $(\psi, \tilde{K}, \eta)$. Tomemos $r_0 > 0$ con $r_0 \leq \delta_1$ y $Mr_0 \leq \delta_2$. Fijemos $a \in K$, $b = \varphi(a)$, $L = D\varphi(a)$ y $0 < r \leq r_0$.

Cota superior. Para $x \in C_r(a)$ escribimos $\varphi(x) = b + L(x - a) + \rho(x)$ con $\|\rho(x)\|_\infty \leq \eta r$. Entonces

$$\varphi(x) = b + L((x - a) + L^{-1}\rho(x)), \quad \|L^{-1}\rho(x)\|_\infty \leq M\eta r,$$

de modo que $\varphi(C_r(a)) \subset b + L(C_{(1+M\eta)r}(0))$. Por el teorema 7.14,

$$m(\varphi(C_r(a))) \leq |\det L| (1 + M\eta)^d m(C_r(a)) \leq (1 + \varepsilon) J_\varphi(a) m(C_r(a)).$$

Cota inferior. Sea $s = r/(1 + \eta M)$ y $w \in C_s(0)$. El punto $y = b + Lw$ cumple $\|y - b\|_\infty \leq Ms \leq \delta_2$, luego $y \in V$ y, por el lema 9.3 para ψ ,

$$\psi(y) = a + D\psi(b)(y - b) + q = a + w + q, \quad \|q\|_\infty \leq \eta\|y - b\|_\infty \leq \eta Ms.$$

Así $\|\psi(y) - a\|_\infty \leq s + \eta Ms = r$, es decir $\psi(y) \in C_r(a)$ e $y \in \varphi(C_r(a))$. Hemos probado que $b + L(C_s(0)) \subset \varphi(C_r(a))$, y por lo tanto

$$m(\varphi(C_r(a))) \geq |\det L| (1 + \eta M)^{-d} m(C_r(a)) \geq (1 - \varepsilon) J_\varphi(a) m(C_r(a)). \quad \blacksquare$$

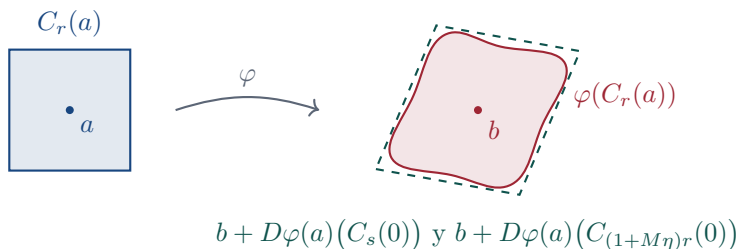


Figura 9.1: La estimación local: a escala pequeña, la imagen curvilínea de un cubo queda atrapada entre dos paralelepípedos casi iguales, imágenes de cubos por la aproximación afín $b + D\varphi(a)(\cdot - a)$. Sus volúmenes son $J_\varphi(a)$ veces los de los cubos.

9.3 Demostración del teorema

Demostración de (9.1). Sea Q un cubo diádico con $K = \overline{Q} \subset U$ y fijemos $0 < \varepsilon < 1$. La función J_φ es continua y positiva en el compacto K , luego $c = \min_K J_\varphi > 0$ y J_φ es uniformemente continua en K : existe $r_1 > 0$ con $|J_\varphi(x) - J_\varphi(y)| \leq \varepsilon c$ si $x, y \in K$ y $\|x - y\|_\infty \leq r_1$. En particular, en ese caso

$$(1 - \varepsilon)J_\varphi(y) \leq J_\varphi(x) \leq (1 + \varepsilon)J_\varphi(y). \quad (9.2)$$

Sea r_0 el del lema 9.4 para K y ε . Partimos Q en los cubos diádicos $Q_1, \dots, Q_p$ de un orden N tan grande que su semilado $r = 2^{-N-1}$ cumple $r \leq \min(r_0, r_1)$; así $\overline{Q_i} = C_r(a_i)$, con a_i el centro de Q_i . Como $\overline{Q_i} \setminus Q_i$ está en la frontera de Q_i , que tiene medida nula, el corolario 7.12 da $m(\varphi(Q_i)) = m(\varphi(C_r(a_i)))$. Como φ es inyectiva, $\varphi(Q) = \bigsqcup_i \varphi(Q_i)$, y por el lema 9.4 y (9.2),

$$\begin{aligned} m(\varphi(Q)) &= \sum_i m(\varphi(C_r(a_i))) \leq (1 + \varepsilon) \sum_i J_\varphi(a_i) m(Q_i) \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \sum_i \int_{Q_i} J_\varphi dm = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \int_Q J_\varphi dm. \end{aligned}$$

Del mismo modo, $m(\varphi(Q)) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \int_Q J_\varphi dm$. Como ε es arbitrario, vale (9.1), y por la proposición 9.2 queda probado el teorema 9.1. ■

La idea en una frase

$m(\varphi(A)) = \int_A J_\varphi dm$: la medida $A \mapsto m(\varphi(A))$ tiene densidad J_φ respecto de m . Localmente, φ multiplica volúmenes por $|\det D\varphi|$; globalmente, se suman esos factores con una integral.

9.4 Coordenadas polares en el plano

La aplicación

$$\varphi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}, \quad \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

es un difeomorfismo C^1 con $D\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ y $J_\varphi(r, \theta) = r$. Como la semirrecta $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ tiene medida nula, para toda $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty]$ medible (o integrable) el teorema 9.1 y Tonelli dan

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (9.3)$$

Por ejemplo, $m(B(0, R)) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \pi R^2$.

Proposición 9.5 (Integral gaussiana). Para $a > 0$ y $d \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad y \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a\|x\|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2}.$$

Demostración. Sea $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$. Por Tonelli, $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = I^2$. Por otro lado, por (9.3), Tonelli y convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^t = \pi,$$

donde la integral de Lebesgue sobre $[0, t]$ se calculó como integral de Riemann (teorema 8.11). Así $I = \sqrt{\pi}$. Por el teorema 9.1 con $u = \sqrt{a}x$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$, y por Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-a\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d e^{-ax_j^2} dx_1 \cdots dx_d = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt \right)^d = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{d/2}. \quad \blacksquare$$

9.5 Coordenadas polares en $\mathbb{R}^d$

Todo $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ se escribe de manera única como $x = ru$ con $r = \|x\| > 0$ y $u = x/\|x\| \in \mathbb{S}^{d-1}$. Por el ejercicio 6.18, la aplicación $\Phi(x) = (\|x\|, x/\|x\|)$ es un isomorfismo medible entre $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathcal{B})$ y $((0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{B}_{(0, \infty)} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}})$, con inversa $\Phi^{-1}(r, u) = ru$. Sea ρ la medida sobre $(0, \infty)$ con densidad r^{d-1} , $\rho(E) = \int_E r^{d-1} dr$.

Teorema 9.6 (Medida de superficie). Existe una única medida de Borel $\sigma = \sigma_{d-1}$ sobre $\mathbb{S}^{d-1}$ tal que $m \circ \Phi^{-1} = \rho \otimes \sigma$; explícitamente,

$$\sigma(E) = d \cdot m(E_1), \quad E_1 = \{ru : 0 < r \leq 1, u \in E\}, \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}}.$$

En consecuencia, para toda $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ boreliana, y para toda f integrable,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(ru) r^{d-1} \sigma(du) dr.$$

Demostración. σ es una medida. $E \mapsto E_1 = \Phi^{-1}((0, 1] \times E)$ transforma uniones disjuntas en uniones disjuntas, y $\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = d m(B(0, 1) \setminus \{0\}) < \infty$.

Valor en rectángulos. Para $a > 0$ sea $E_a = \{ru : 0 < r \leq a, u \in E\} = aE_1$; por el corolario 7.17, $m(E_a) = a^d m(E_1)$. Para $0 \leq a < b$,

$$(m \circ \Phi^{-1})((a, b] \times E) = m(E_b \setminus E_a) = \frac{b^d - a^d}{d} \sigma(E) = \rho((a, b]) \sigma(E).$$

Unicidad. La familia $\mathcal{P} = \{(a, b] \times E : 0 \leq a < b, E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}}\} \cup \{\emptyset\}$ es un π -sistema. Genera la σ -álgebra producto: para E fijo, la familia de los $A \in \mathcal{B}_{(0, \infty)}$ con $A \times E \in \sigma(\mathcal{P})$ es una σ -álgebra (pues $(0, \infty) \times E = \bigcup_n (0, n] \times E$) que contiene a los intervalos $(a, b]$, luego a todos los borelianos de $(0, \infty)$; así $\sigma(\mathcal{P})$ contiene a todos los rectángulos medibles. Además $(0, n] \times \mathbb{S}^{d-1} \uparrow (0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1}$ con medida finita $m(B(0, n))$. El teorema 2.17 da $m \circ \Phi^{-1} = \rho \otimes \sigma$. Si σ' es otra medida con la misma propiedad, evaluando en $(0, 1] \times E$ se obtiene $\sigma'(E)/d = m(E_1)$, luego $\sigma' = \sigma$.

La fórmula. Como $m(\{0\}) = 0$, por la proposición 5.24, Tonelli (o Fubini) y la proposición 5.26,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dm = \int f \circ \Phi^{-1} \, d(\rho \otimes \sigma) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(ru) \, \sigma(du) \, r^{d-1} \, dr. \quad \blacksquare$$

Corolario 9.7 (Funciones radiales). Si $f(x) = g(\|x\|)$ con $g : (0, \infty) \rightarrow [0, +\infty]$ boreliana (o con f integrable), entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^\infty g(r) \, r^{d-1} \, dr.$$

Proposición 9.8. $\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ y $m(B(0, 1)) = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})}{d} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)}$, donde $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \, dt$.

Demostración. Por la proposición 9.5 y el corolario 9.7,

$$\begin{aligned} \pi^{d/2} &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2} \, dx = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} \, dr \\ &= \frac{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})}{2} \int_0^\infty t^{d/2-1} e^{-t} \, dt = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \end{aligned}$$

con el cambio de variable $t = r^2$ en $(0, \infty)$. La segunda fórmula es la definición de σ con $E = \mathbb{S}^{d-1}$, junto con $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$. $\blacksquare$

Así $\sigma(\mathbb{S}^1) = 2\pi$, $\sigma(\mathbb{S}^2) = 4\pi$ y $m(B(0, 1)) = \frac{4}{3}\pi$ en $\mathbb{R}^3$, como debe ser.

Observación 9.9 (Medidas sobre superficies). Una parametrización $r : W \rightarrow S$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ ($W \subset \mathbb{R}^2$ abierto) induce la medida imagen $m \circ r^{-1}$ sobre S , pero esta depende de la parametrización. Para el cilindro $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$, la parametrización $r(\theta, h) = (\cos \theta, \sin \theta, h)$ es una isometría local y $m \circ r^{-1}$ es la medida de área natural; en cambio, sobre la mitad $\{y > 0\}$, la parametrización $(u, v) \mapsto (u, \sqrt{1-u^2}, v)$, $u \in (-1, 1)$, induce otra medida, cuya densidad respecto de la anterior es $\sqrt{1-u^2}$ en el punto (x, y, z) . La medida de área natural se obtiene incluyendo el factor $\sqrt{\det(Dr^\top Dr)}$, y en el caso de la esfera coincide con la σ del teorema 9.6.

9.6 Ejercicios resueltos

Ejercicio 9.10. Pruebe que σ es invariante por transformaciones ortogonales: $\sigma(Q(E)) = \sigma(E)$ para toda Q ortogonal y todo $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}}$.

Solución. Q preserva la norma, de modo que Q lleva $\mathbb{S}^{d-1}$ en sí misma y $(Q(E))_1 = \{rQu : 0 < r \leq 1, u \in E\} = Q(E_1)$. Por el lema 7.16(b), $\sigma(Q(E)) = dm(Q(E_1)) = dm(E_1) = \sigma(E)$. (Se puede probar además que toda medida finita sobre $\mathbb{S}^{d-1}$ invariante por rotaciones es un múltiplo de σ .) ■

Ejercicio 9.11. ¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ es integrable la función $f(x) = \|x\|^a |\ln\|x\||^b$ sobre $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < \frac{1}{2}\}$? ¿Y sobre $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| > 2\}$?

Solución. Por el corolario 9.7, sobre la bola $\{\|x\| < \frac{1}{2}\}$ hay que estudiar

$$\int_0^{1/2} r^{a+d-1} |\ln r|^b dr = \int_{\ln 2}^{\infty} e^{-(a+d)t} t^b dt,$$

con el cambio $r = e^{-t}$. Si $a + d > 0$ la integral converge para todo b , pues $t^b e^{-(a+d)t/2}$ está acotada en $[\ln 2, \infty)$ y queda $\int e^{-(a+d)t/2} dt < \infty$. Si $a + d < 0$ el integrando tiende a $+\infty$ y la integral diverge. Si $a + d = 0$ queda $\int_{\ln 2}^{\infty} t^b dt$, finita si y solo si $b < -1$. Así, f es integrable cerca del origen si y solo si

$$a > -d, \quad \text{o bien} \quad a = -d \text{ y } b < -1.$$

Sobre $\{\|x\| > 2\}$, con $r = e^t$, $\int_2^{\infty} r^{a+d-1} (\ln r)^b dr = \int_{\ln 2}^{\infty} e^{(a+d)t} t^b dt$, y el mismo análisis muestra que f es integrable si y solo si $a < -d$, o bien $a = -d$ y $b < -1$. ■

Convolución y aproximación en L^1

Trabajamos en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}, m)$ y escribimos $L^1 = L^1(\mathbb{R}^d, m)$, $\|f\|_1 = \int |f| dm$.

10.1 Motivación: suma de vectores aleatorios

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un *vector aleatorio* es una función medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, y su *ley* es la medida imagen $\mu_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$, es decir, $\mu_X(A) = \mathbb{P}\{X \in A\}$ para $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Dos vectores aleatorios $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$ son *independientes* si

$$\mathbb{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in A\} \mathbb{P}\{Y \in B\} \quad \text{para todos } A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_1}}, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_2}}.$$

Como $\mu_{(X,Y)}(A \times B) = \mathbb{P}\{X \in A, Y \in B\}$ y los rectángulos forman un π -sistema que genera $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}}$ (proposición 6.5), X e Y son independientes si y solo si $\mu_{(X,Y)} = \mu_X \otimes \mu_Y$. Decimos que X tiene *densidad* $\rho_X \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ si $d\mu_X = \rho_X dm$, es decir, $\mathbb{P}\{X \in A\} = \int_A \rho_X(x) dx$.

Proposición 10.1. Si $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ son independientes con densidades ρ_X y ρ_Y , entonces $X + Y$ tiene densidad

$$\rho_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_X(u-y) \rho_Y(y) dy = (\rho_X * \rho_Y)(u).$$

Demostración. $X+Y = \alpha \circ (X, Y)$ con $\alpha(x, y) = x+y$, de modo que $\mu_{X+Y} = \mu_{(X,Y)} \circ \alpha^{-1}$. Para $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, por la proposición 5.24, la independencia, Tonelli y la invariancia por traslaciones ($x = u - y$),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X + Y \in A\} &= \int \mathbf{1}_A(x+y) \mu_X(dx) \mu_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x+y) \rho_X(x) dx \right) \rho_Y(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(u) \rho_X(u-y) du \right) \rho_Y(y) dy \\ &= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_X(u-y) \rho_Y(y) dy \right) du. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

10.2 La convolución en L^1

Lema 10.2. Si $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ son borelianas, la función $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ es boreliana en $\mathbb{R}^{2d}$. Si f es Lebesgue medible, para cada $x \in \mathbb{R}^d$ la función $y \mapsto f(x - y)$ es Lebesgue medible.

Demostración. $G(u, y) = f(u)g(y)$ es boreliana en $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (producto de funciones borelianas de cada variable, proposición 6.3), y $F = G \circ \Psi$ con $\Psi(x, y) = (x - y, y)$ lineal. Para la segunda afirmación, si $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, entonces $\{y : f(x - y) \in B\} = x - f^{-1}(B)$, que es Lebesgue medible por el teorema 7.14 aplicado a $y \mapsto x - y$. ■

Para $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue medibles consideremos el conjunto

$$\mathcal{E}(f, g) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| |g(y)| dy < \infty \right\},$$

bien definido por el lema anterior.

Definición 10.3 (Convolución). Sean $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue medibles. La *convolución* de f y g es la función

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy, & x \in \mathcal{E}(f, g), \\ 0, & x \notin \mathcal{E}(f, g). \end{cases}$$

Teorema 10.4. Sean f, g, h Lebesgue medibles.

- (a) Si $f' = f$ y $g' = g$ m-c.t.p., entonces $\mathcal{E}(f', g') = \mathcal{E}(f, g)$ y $f' * g' = f * g$.
- (b) $\mathcal{E}(g, f) = \mathcal{E}(f, g)$ y $g * f = f * g$.
- (c) Si f, g son borelianas, $\mathcal{E}(f, g)$ es boreliano y $f * g$ es boreliana. En general, $f * g$ es Lebesgue medible.
- (d) Si $f, g \in L^1$, entonces $\mathcal{E}(f, g)^c$ tiene medida nula, $f * g \in L^1$ y

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

- (e) Si $f, g, h \in L^1$, entonces $f * (g * h) = (f * g) * h$ m-c.t.p.

Demostración. (a) Sean $A = \{f \neq f'\}$ y $B = \{g \neq g'\}$, nulos. Para cada x , las funciones $y \mapsto f(x - y)g(y)$ e $y \mapsto f'(x - y)g'(y)$ coinciden fuera de $(x - A) \cup B$, que es nulo (teorema 7.14). Luego ambas son integrables o ninguna lo es, y en el primer caso sus integrales coinciden.

(b) El cambio de variable $y \mapsto x - y$, de jacobiano 1, transforma $f(x - y)g(y)$ en $g(x - y)f(y)$ (teorema 9.1).

(c) Con F como en el lema 10.2, $x \mapsto \int |F(x, y)| dy$ es boreliana (proposición 6.11), luego $\mathcal{E}(f, g)$ es boreliano, y en él $(f * g)(x) = \int F^+(x, y) dy - \int F^-(x, y) dy$ es diferencia de funciones borelianas finitas. En general, por el lema 7.1 existen $\tilde{f}, \tilde{g}$ borelianas iguales c.t.p. a f, g , y por (a), $f * g = \tilde{f} * \tilde{g}$ es boreliana.

(d) Por (a) y (c) podemos suponer f, g borelianas. Por Tonelli y la invariancia de m por traslaciones y por $x \mapsto -x$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| |g(y)| dy dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Así la función interior es finita c.t.p., es decir, $m(\mathcal{E}(f, g)^c) = 0$, y $\int |f * g| \leq \int \int |f(x - y)| |g(y)| dy dx = \|f\|_1 \|g\|_1$.

(e) Podemos suponer f, g, h borelianas. Por Tonelli, como en (d), $\int \int \int |f(x - y - z)| |g(z)| |h(y)| dz dy dx = \|f\|_1 \|g\|_1 \|h\|_1 < \infty$, de modo que para casi todo x la función $(y, z) \mapsto f(x - y - z)g(z)h(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^{2d}$. Para tales x , Fubini y el cambio $z = w - y$ en la integral interior dan

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int \left(\int f(x - y - z)g(z) dz \right) h(y) dy \\ &= \int \int f(x - w)g(w - y)h(y) dw dy \\ &= \int f(x - w) \left(\int g(w - y)h(y) dy \right) dw = (f * (g * h))(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En resumen, la convolución $*$: $L^1 \times L^1 \rightarrow L^1$ está bien definida, es bilineal, conmutativa, asociativa y cumple $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$: $(L^1, +, *, \|\cdot\|_1)$ es un álgebra normada conmutativa.

Ejemplo 10.5 (Convolución de gaussianas). Sean $a, b > 0$, $f(x) = e^{-a\|x\|^2/2}$ y $g(x) = e^{-b\|x\|^2/2}$. Completando el cuadrado,

$$a\|x - y\|^2 + b\|y\|^2 = \frac{ab}{a+b}\|x\|^2 + (a+b)\left\|y - \frac{a}{a+b}x\right\|^2,$$

de modo que, por la invariancia por traslaciones y la proposición 9.5,

$$(f * g)(x) = e^{-\frac{ab}{2(a+b)}\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{a+b}{2}\|z\|^2} dz = \left(\frac{2\pi}{a+b}\right)^{d/2} e^{-\frac{ab}{2(a+b)}\|x\|^2}.$$

La convolución de dos gaussianas centradas es otra gaussiana centrada; en términos probabilísticos, la suma de dos vectores gaussianos independientes de varianzas $1/a$ y $1/b$ es gaussiana de varianza $1/a + 1/b = (a+b)/(ab)$.

10.3 Aproximación en L^1

Denotamos $C_c(\mathbb{R}^d)$ al espacio de las funciones continuas $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de soporte compacto, donde $\text{supp } h = \overline{\{h \neq 0\}}$.

Proposición 10.6. Para toda $f \in L^1$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $s = \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{1}_{A_j}$ simple, con $m(A_j) < \infty$ para todo j , tal que $\|f - s\|_1 < \varepsilon$.

Demostración. Sea $s_n = \varphi_n \circ f^+ - \varphi_n \circ f^-$ como en el corolario 4.16: $s_n \rightarrow f$ en todo punto y $|f - s_n| \leq |f|$, que es integrable. Por convergencia dominada, $\|f - s_n\|_1 \rightarrow 0$. Cada conjunto de nivel $\{s_n = c\}$ con $c \neq 0$ está contenido en $\{|f| \geq |c|\}$, que tiene medida finita por la desigualdad de Markov. $\blacksquare$

Lema 10.7. Si $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$, $m(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ con $0 \leq h \leq 1$ y $\|h - \mathbf{1}_A\|_1 < \varepsilon$.

Demostración. Por el corolario 7.4 existen un compacto $K \subset A$ y un abierto $U \supset A$ con $m(A \setminus K) < \varepsilon/2$ y $m(U \setminus A) < \varepsilon/2$. Como A puede no ser acotado, no achicamos U , sino solo el soporte de h : sea $R > 0$ con $K \subset B(0, R)$ y $U' = U \cap B(0, R)$, abierto acotado que contiene a K . Sea $\delta > 0$ menor que la distancia de K a $(U')^c$ (que es positiva, pues K es compacto y $(U')^c$ cerrado) y

$$h(x) = 1 - \min \left\{ \frac{\text{dist}(x, K)}{\delta}, 1 \right\}.$$

Entonces h es continua, $0 \leq h \leq 1$, $h = 1$ en K y $h = 0$ fuera de $\{\text{dist}(\cdot, K) < \delta\} \subset U'$; en particular $\text{supp } h \subset \overline{U'}$ es compacto. Así $h = \mathbf{1}_A = 1$ en K y $h = \mathbf{1}_A = 0$ fuera de U (pues $U' \subset U$ y $A \subset U$): h e $\mathbf{1}_A$ coinciden fuera de $U \setminus K$ y ahí difieren a lo sumo en 1, luego $\|h - \mathbf{1}_A\|_1 \leq m(U \setminus K) = m(U \setminus A) + m(A \setminus K) < \varepsilon$. ■

Teorema 10.8. $C_c(\mathbb{R}^d)$ es denso en L^1 : para toda $f \in L^1$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ con $\|f - h\|_1 < \varepsilon$.

Demostración. Por la proposición 10.6 existe $s = \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{1}_{A_j}$, con $m(A_j) < \infty$, tal que $\|f - s\|_1 < \varepsilon/2$. Por el lema 10.7, para cada j existe $h_j \in C_c$ con $\|h_j - \mathbf{1}_{A_j}\|_1 < \varepsilon/(2k(|a_j| + 1))$. Entonces $h = \sum_j a_j h_j \in C_c$ y $\|s - h\|_1 \leq \sum_j |a_j| \|\mathbf{1}_{A_j} - h_j\|_1 < \varepsilon/2$. ■

Para $v \in \mathbb{R}^d$ denotamos $(\tau_v f)(x) = f(x + v)$. Por la invariancia por traslaciones, $\|\tau_v f\|_1 = \|f\|_1$.

Proposición 10.9 (Continuidad de las traslaciones). Para toda $f \in L^1$, $\|\tau_v f - f\|_1 \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow 0$.

Demostración. Si $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$, sea $K = \{x : \text{dist}(x, \text{supp } h) \leq 1\}$, compacto. Como h es uniformemente continua, dado $\eta > 0$ existe $\delta \in (0, 1)$ con $|h(x + v) - h(x)| < \eta$ para $\|v\| < \delta$; y para $\|v\| < 1$ la función $h(\cdot + v) - h$ se anula fuera de K . Así $\|\tau_v h - h\|_1 \leq \eta m(K)$ para $\|v\| < \delta$. Para $f \in L^1$ y $\varepsilon > 0$, sea $h \in C_c$ con $\|f - h\|_1 < \varepsilon/3$ (teorema 10.8). Entonces

$$\|\tau_v f - f\|_1 \leq \|\tau_v(f - h)\|_1 + \|\tau_v h - h\|_1 + \|h - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} + \|\tau_v h - h\|_1 + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

para v suficientemente pequeño. ■

10.4 Regularización por convolución

Una función Lebesgue medible f es *localmente integrable* si $\int_K |f| dm < \infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^d$. Para g Lebesgue medible definimos

$$\|g\|_\infty = \inf \{ \lambda \geq 0 : |g| \leq \lambda \text{ m-c.t.p.} \},$$

el *supremo esencial* de $|g|$. El ínfimo se alcanza, pues $\{|g| > \|g\|_\infty\} = \bigcup_n \{|g| > \|g\|_\infty + 1/n\}$ es nulo; así $|g| \leq \|g\|_\infty$ c.t.p. El conjunto L^∞ de las g con $\|g\|_\infty < \infty$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ es una seminorma, que es norma sobre el cociente por la igualdad c.t.p. Si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, entonces $fg \in L^1$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty. \quad (10.1)$$

Proposición 10.10. Sea f localmente integrable y $g \in L^\infty$ nula fuera de un compacto S . Entonces $\mathcal{E}(f, g) = \mathbb{R}^d$ y $f * g$ es continua.

Demostración. Para todo x , con el cambio $z = x - y$,

$$\int |f(x - y)g(y)| dy \leq \|g\|_\infty \int_S |f(x - y)| dy = \|g\|_\infty \int_{x-S} |f(z)| dz < \infty,$$

pues $x - S$ es compacto. Para la continuidad en x_0 , sea $K = \{z : \text{dist}(z, x_0 - S) \leq 2\}$, compacto, y $\hat{f} = f\mathbf{1}_K \in L^1$. Para $\|x - x_0\| \leq 1$ y $\|v\| \leq 1$, los puntos $x - y$ y $x + v - y$ con $y \in S$ están en K , de modo que

$$|(f * g)(x + v) - (f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \int_S |f(x + v - y) - f(x - y)| dy \leq \|g\|_\infty \|\tau_v \hat{f} - \hat{f}\|_1,$$

que tiende a 0 cuando $v \rightarrow 0$ por la proposición 10.9, uniformemente en $x \in \overline{B(x_0, 1)}$. ■

Proposición 10.11. Si f es localmente integrable y $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ tiene soporte compacto, entonces $f * g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ y $\partial_j(f * g) = f * \partial_j g$ para $j = 1, \dots, d$.

Demostración. Escribamos $(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int g(x - y)f(y) dy$ y fijemos x_0 y j . Para $0 < |t| \leq 1$,

$$\frac{(f * g)(x_0 + te_j) - (f * g)(x_0)}{t} = \int \frac{g(x_0 + te_j - y) - g(x_0 - y)}{t} f(y) dy.$$

Por el teorema del valor medio, el cociente del integrando está acotado por $\|\partial_j g\|_\infty$, y se anula salvo si $y \in K = \{y : \text{dist}(x_0 - y, \text{supp } g) \leq 1\}$, compacto. Así el integrando está dominado por $\|\partial_j g\|_\infty |f|\mathbf{1}_K$, integrable, y converge a $\partial_j g(x_0 - y)f(y)$ cuando $t \rightarrow 0$. Por convergencia dominada (aplicada a cualquier sucesión $t_n \rightarrow 0$), $\partial_j(f * g)(x_0) = (\partial_j g * f)(x_0) = (f * \partial_j g)(x_0)$. Como $\partial_j g$ es continua de soporte compacto, $f * \partial_j g$ es continua por la proposición 10.10. ■

Por inducción, si $g \in C^k$ con soporte compacto, entonces $f * g \in C^k$: la convolución hereda la regularidad del factor más regular.

Ejemplo 10.12. Sean $f = \mathbf{1}_{[0, \infty)}$, que es discontinua en 0, y $g = \mathbf{1}_{[0, 1]}$. Entonces

$$(f * g)(x) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x - y) dy = m([0, 1] \cap (-\infty, x]) = \min\{\max\{x, 0\}, 1\},$$

que es continua (figura 10.1). Si g es la densidad de una variable aleatoria Y , entonces $(f * g)(x) = \int f(x - y) \mu_Y(dy) = \mathbb{E}[f(x - Y)]$: convolucionar es promediar los trasladados de f según la ley de Y .

10.5 Convolución de medidas

Definición 10.13. Sean μ, ν medidas finitas sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ y $\alpha(x, y) = x + y$. La *convolución* de μ y ν es la medida imagen

$$\mu * \nu = (\mu \otimes \nu) \circ \alpha^{-1}, \quad \text{es decir,} \quad (\mu * \nu)(E) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x + y) \mu(dx) \nu(dy).$$

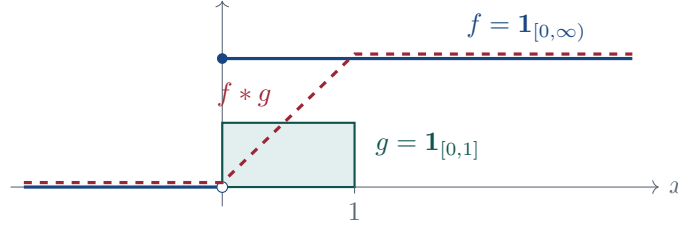


Figura 10.1: Regularización: la convolución del escalón $\mathbf{1}_{[0, \infty)}$ con $\mathbf{1}_{[0, 1]}$ es una rampa continua. (El factor g se dibuja a media altura para no superponerlo.)

Proposición 10.14. Sean μ, ν, λ medidas finitas sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

(a) Para toda $h : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ boreliana, y para toda h boreliana acotada,

$$\int h d(\mu * \nu) = \iint h(x + y) \mu(dx) \nu(dy).$$

(b) $\mu * \nu = \nu * \mu$ y $(\lambda * \mu) * \nu = \lambda * (\mu * \nu)$.

(c) $(\mu * \nu)(\mathbb{R}^d) = \mu(\mathbb{R}^d) \nu(\mathbb{R}^d)$.

(d) Si $d\mu = f dm$ y $d\nu = g dm$ con $f, g \geq 0$ integrables, entonces $d(\mu * \nu) = (f * g) dm$.

(e) $\mu * \delta_0 = \mu$ y $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Demostración. (a) Es la proposición 5.24 junto con el teorema de Tonelli (o Fubini, para h acotada: $\mu \otimes \nu$ es finita). (b) La conmutatividad se sigue de (a) y de Tonelli, que permite intercambiar el orden de integración. Para la asociatividad, por (a) ambas medidas asignan a E el valor $\iiint \mathbf{1}_E(x + y + z) \lambda(dx) \mu(dy) \nu(dz)$. (c) Tomar $h = 1$ en (a). (d) Por (a), Tonelli y el cambio $x \mapsto x - y$, para $h \geq 0$ boreliana,

$$\int h d(\mu * \nu) = \iint h(x + y) f(x) g(y) dx dy = \iint h(x) f(x - y) g(y) dx dy = \int h(f * g) dm.$$

(e) $\int h d(\mu * \delta_0) = \int h(x + 0) \mu(dx)$ y $\int h d(\delta_a * \delta_b) = h(a + b)$. ■

Por el razonamiento de la proposición 10.1, la ley de la suma de dos vectores aleatorios independientes es la convolución de sus leyes: $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$, tengan o no densidad. La convolución se extiende a medidas con signo finitas, con $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$ para la norma de variación total; véase Folland [1, sección 8.2]. A diferencia de L^1 , el espacio de las medidas finitas sí tiene unidad para la convolución: δ_0 .

Resumen del capítulo

- $f * g(x) = \int f(x - y)g(y) dy$ está definida c.t.p. para $f, g \in L^1$, y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$; la convolución es conmutativa y asociativa.
- $C_c(\mathbb{R}^d)$ es denso en L^1 , y las traslaciones son continuas en L^1 .
- $f * g$ es tan regular como el más regular de los factores: continua si $g \in L^\infty$ tiene soporte compacto, C^k si $g \in C_c^k$.
- Si X, Y son independientes, $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$, y con densidades, $\rho_{X+Y} = \rho_X * \rho_Y$.

Resultados auxiliares

A.1 Topología de $\mathbb{R}^d$ y cálculo

Teorema A.1 (Heine–Borel). *Un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Todo cubrimiento abierto de un compacto admite un subcubrimiento finito.*

Teorema A.2 (Propiedad de Lindelöf). *Todo cubrimiento abierto de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ admite un subcubrimiento numerable. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ son abiertos (relativos a A), existe $I \subset \Lambda$ numerable con $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.*

Idea. La familia de las bolas $B(q, r)$ con $q \in \mathbb{Q}^d$ y $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ es numerable, y todo abierto es unión de las bolas de esa familia que contiene. Para cada tal bola contenida en algún U_α se elige uno de esos α . ■

Teorema A.3 (Continuidad uniforme). *Toda función continua sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^d$ es uniformemente continua y alcanza su máximo y su mínimo en K .*

Teorema A.4 (Desigualdad del valor medio). *Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ y $x, y \in U$ tales que el segmento $[x, y]$ está contenido en U . Entonces*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{z \in [x, y]} \|Df(z)\| \|y - x\|,$$

para cualquier par de normas en $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{R}^k$, con la norma de operadores correspondiente. Además $f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x) dt$.

A.2 Álgebra lineal

En $\mathbb{R}^d$ con el producto interno usual, la *adjunta* de $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ lineal es la única T^* lineal con $\langle u, Tv \rangle = \langle T^*u, v \rangle$ para todos u, v ; en la base canónica, su matriz es la traspuesta. T es *autoadjunta* si $T^* = T$, y (*semidefinida*) *positiva* si además $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ para todo v (*definida positiva* si la desigualdad es estricta para $v \neq 0$). Q es *ortogonal* (una isometría lineal) si $Q^*Q = I$, lo que equivale a $\|Qv\| = \|v\|$ para todo v ; entonces $|\det Q| = 1$.

Teorema A.5 (Teorema espectral). *Si T es autoadjunta, existen Q ortogonal y D diagonal con $T = Q^{-1}DQ$. Si T es positiva (resp. definida positiva), las entradas de D son ≥ 0 (resp. > 0).*

Proposición A.6 (Raíz cuadrada). Si T es positiva, existe una única $\sqrt{T}$ positiva con $\sqrt{T} \circ \sqrt{T} = T$; si $T = Q^{-1}DQ$ como arriba, $\sqrt{T} = Q^{-1}\sqrt{D}Q$, donde $\sqrt{D}$ toma la raíz de cada entrada.

Teorema A.7 (Descomposición polar). Si $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es invertible, entonces T^*T es definida positiva, $P = \sqrt{T^*T}$ es invertible, y $Q = TP^{-1}$ es ortogonal. Así $T = QP$, con $\det P = \sqrt{\det(T^*T)} = |\det T|$.

Demostración. $\langle T^*Tv, v \rangle = \|Tv\|^2 > 0$ para $v \neq 0$, y $Q^*Q = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I$ (véase también el ejercicio 7.19). ■

A.3 La función Gamma

Para $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t} dt$ es finita (la integral converge en 0 porque $s-1 > -1$ y en ∞ por el decaimiento exponencial). Integrando por partes, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, y $\Gamma(1) = 1$, de modo que $\Gamma(n+1) = n!$. Con el cambio $t = u^2$ y la proposición 9.5, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Bibliografía

- [1] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2.^a ed. Wiley, 1999.
- [2] H. L. Royden. *Real Analysis*, 3.^a ed. Macmillan, 1988.
- [3] P. J. Fernández. *Medida e Integração*, 2.^a ed. IMPA, 2002.
- [4] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, 3.^a ed. McGraw-Hill, 1987.
- [5] D. A. Salamon. *Measure and Integration*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2016.
- [6] E. M. Stein, R. Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.