Ciclos Económicos Reales

Marcelo Gallardo

5 de junio de 2025

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

Basado en las clases del profesor Paul Castillo (Módulo 2, Macroeconomía Intermedia, PUCP).

Índice

1. Clase 1

1.1. Introducción

Definición 1. Ciclos económicos reales. Los *ciclos económicos reales* son fluctuaciones recurrentes, aunque no necesariamente periódicas, en variables macroeconómicas como el producto agregado Y, el consumo C y la inversión I. Estas fluctuaciones reflejan fases alternadas de expansión y contracción en la actividad económica a lo largo del tiempo. El análisis se realiza en términos reales, es decir, las variables han sido ajustadas por el nivel de precios, y se enmarca dentro de un modelo de corto plazo.

Observación. La producción, consumo e inversión están correlacionados. Sin embargo, la inversión es mucho más volátil. Esto se debe a que choques en el ingreso afectan más el ahorro y la inversión: la inversión absorbe la volatilidad del ingreso y suaviza el consumo, el cual es el menos volátil.

- En economías chicas y abiertas, los términos de intercambio $\frac{P_X^t}{P_M^t}$ y los flujos de capital están fuertemente correlacionados con los ciclos económicos.
- Las variables más importantes son: los términos de intercambio (índice de precio de exportación sobre los de importación)[1], tasa de interés internacional y ciclo económico global.
- Fuentes más importantes del ciclo económico: productividad A_t, política fiscal G_t o monetaria, choques externos como términos de intercambio.
- Preguntas de interés:
  - ¿Cómo se transmiten y amplifican estos ciclos en la economía?
  - ¿Cómo deben responder la política fiscal y monetaria a estos choques?
  - ¿Porqué usar modelos microfundados?
    - La **Crítica de Lucas** sostiene que los modelos macroeconómicos sin microfundamentos, como el modelo IS-LM o aquellos basados en formas reducidas, no son adecuados para evaluar cambios en la política económica. Esto se debe

[1] A mayor términos de intercambio, mayor margen como país.

a que sus parámetros no son estructurales (r, M^S, G) y, por tanto, no son invariantes frente a cambios en el régimen de política (r fija, endógena etc.). Así, las relaciones empíricas que parecen estables —como la pendiente de la curva de Phillips o de la demanda agregada— pueden alterarse cuando los agentes ajustan sus expectativas en respuesta a nuevas políticas. Por ejemplo, si el gobierno implementa una política fiscal más volátil, los hogares y empresas modificarán su comportamiento, lo que invalida las predicciones basadas en relaciones pasadas. En consecuencia, Lucas argumenta que los modelos útiles para el análisis de políticas deben derivarse de principios microeconómicos y tener en cuenta las expectativas racionales de los agentes.

- ▲ A diferencia de las ciencias físicas o matemáticas, donde se estudian leyes inmutables, la economía analiza el comportamiento de agentes que toman decisiones estratégicas y adaptativas. En este contexto, los modelos microfundamentados permiten incorporar la formación de expectativas racionales, es decir, suposiciones sobre cómo los individuos utilizan la información disponible para anticipar el futuro de manera coherente con el modelo. Este enfoque reconoce que las decisiones económicas dependen no solo del presente, sino también de cómo los agentes proyectan los efectos de las políticas y condiciones futuras, lo cual es esencial para analizar escenarios de cambio estructural o intervención gubernamental.
- ▲ Los modelos con microfundamentos no solo permiten incorporar expectativas racionales, sino que también ofrecen un criterio de optimalidad mediante la introducción de una función de bienestar agregada (eficiencia en el sentido de Pareto). Esto permite definir de manera rigurosa políticas óptimas, en lugar de analizar únicamente respuestas empíricas o relaciones observadas. Al modelar explícitamente las preferencias de los agentes y sus restricciones, se puede estudiar cómo distintas políticas afectan el bienestar social y derivar reglas de política que maximicen dicho bienestar bajo condiciones específicas. Si hay fricciones, el equilibrio competitivo no es Pareto eficiente: intervenciones monetarias como metas de inflación, o metas de agregados monetarios.

1.2. Modelo de equilibrio general estocástico con mercados perfectamente competitivo y sin fricciones

Las **familias** deciden consumo, ahorro y trabajo (oferta de trabajo). Por otro lado, las **empresas** deciden la inversión, cuánto producir y cuánto contratar (demanda de trabajo). En competencia imperfecta, las empresas también influyen sobre los precios. Se asume (porn ahora) que no hay fricciones (por ej. de crédito).

Observación. Se van a estudiar tres mercados y precios relativos:

- **Mercado de activos capitales** $\to$ Tasa de interés real.
- **Mercado de trabajo** $\to$ Salario real.
- **Mercado de bienes** $\to$ Como hablamos de un modelo sin fricción y usamos precios relativos, lo normalizamos a 1.

Basta equilibrar dos mercados por la ley de Walras.

1.2.1. Las familias

Definición 2. Preferencias de las familias. Las familias tienen preferencias sobre consumo y ocio dadas por

$$\boxed{V_t = \mathbb{E}_t\left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\nu}}{1+\nu}\right)\right]},$$

en donde

- $\beta \in (0,1)$ es el factor de descuento subjetivo (pues descuenta utilidad algo subjetivo),[2]
- ν es la inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo N_t,[3]

[2] $\beta = \frac{1}{1+\delta}$, donde $\delta > 0$ es la tasa de impaciencia. Una tasa muy alta implica que el individuo es muy impaciente.

[3] La elasticidad de la oferta de trabajo mide la sensibilidad de la cantidad ofrecida de trabajo, N_t, ante cambios en el salario real w_t, y se define como $\varepsilon = \frac{\partial N_t}{\partial w_t} \cdot \frac{w_t}{N_t}$. En modelos macroeconómicos con preferencias separables de la forma $u(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1+\nu}$, la condición de primer orden para la elección óptima intratemporal implica que la tasa marginal de sustitución entre consumo y ocio se iguala al salario, es decir, $\frac{\partial u/\partial N_t}{\partial u/\partial C_t} = w_t$, lo que conlleva que $C_t^{-\sigma} \cdot N_t^{\nu} = w_t$. Despejando N_t, se obtiene $N_t = C_t^{\sigma/\nu} \cdot w_t^{1/\nu}$, y diferenciando respecto a w_t se halla que la elasticidad de la oferta de trabajo respecto al salario real es $\varepsilon = \frac{1}{\nu}$. Por lo tanto, ν representa la inversa de dicha elasticidad: a mayor ν, menor es la sensibilidad de la oferta de trabajo ante variaciones en el salario.

- $\sigma > 1$ es el coeficiente de aversión al riesgo,
- C_t es el consumo. La función de utilidad en el consumo en este caso es una CRRA. En general, u es una función diferenciable, clase C^2 en casi todo punto donde $u_C > 0$, $u_{CC} < 0$, $u_N < 0$ y $u_{NN} > 0$,
- las preferencias son separables,
- $\mathbb{E}_t[(\cdot)]$ es la esperanza condicional dado el conjunto de información en t.

Observación. Note que a diferencia de los modelos de microeconomía clásicos, se considera un único bien, que tiene la característica de poder usado como consumo o inversión.

Las familias tienen infinitas restricciones, una para cada periodo.[4]

$$\boxed{C_t + B_t = \underbrace{W_t N_t}_{\text{Renta del trabajo.}} + \underbrace{\Pi_t}_{\text{Participación en las firmas.}} - \underbrace{T_t}_{\text{Impuestos.}} + \underbrace{(1 + r_{t-1})B_{t-1}}_{\text{Rendimiento de los activos.}} .} \tag{1}$$

Observación. Note que en (1), el salario real es, por ejemplo, 2kg de trigo por hora (si C es trigo), y que las familias son propietarias de las empresas. Además, se usa la tasa de interés real. En el anexo A se presenta el caso nominal.

Observación. Se define

$$1 + r_t \simeq \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}$$

donde i_t es la tasa de interés nominal y π_t la tasa de inflación.

Proposición 1.1. *Las condiciones de primer orden (formulando un Lagrangiano infinito o ecuación de Bellman) de las familias están dadas por*

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t[C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t)] \tag{2}$$

$$C_t^{-\sigma} W_t = N_t^{\nu}. \tag{3}$$

Demostración. Formamos el Lagrangiano, cuya convergencia se asegura vía β:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left[\frac{C_{t+k}^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\nu}}{1 + \nu} + \lambda_{t+k} \left(W_{t+k} N_{t+k} + \Pi_{t+k} - T_{t+k} + (1 + r_{t+k-1}) B_{t+k-1} - C_{t+k} - B_{t+k} \right) \right].$$

[4]El supuesto es fuerte: probabilidad de muerte, herencias etc.

Las condiciones de primer orden son ($k = 0$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0: &\quad C_t^{-\sigma} = \lambda_t \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0: &\quad \lambda_t W_t = N_t^{\nu} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = 0: &\quad \lambda_t = \beta \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}(1 + r_t)].
\end{aligned}$$

Sustituyendo $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$, se obtienen las condiciones óptimas:

$$\begin{aligned}
\text{(Euler)} &\quad C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left[C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t) \right] \\
\text{(Trabajo)} &\quad C_t^{-\sigma} W_t = N_t^{\nu}.
\end{aligned}$$

□

Observación. Respecto a la ecuación de Bellman, se define:

$$V(B_{t-1}) = \max_{C_t, N_t, B_t} \left\{ \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1 + \nu} + \beta \mathbb{E}_t \left[V(B_t) \right] \right\}$$

sujeto a:

$$C_t + B_t = W_t N_t + \Pi_t - T_t + (1 + r_{t-1}) B_{t-1}.$$

Sustituyendo la restricción en la función objetivo:

$$V(B_{t-1}) = \max_{N_t, B_t} \left\{ \frac{(W_t N_t + \Pi_t - T_t + (1 + r_{t-1}) B_{t-1} - B_t)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1 + \nu} + \beta \mathbb{E}_t \left[V(B_t) \right] \right\}.$$

Las condiciones de primer orden (CPO) son:

- Con respecto a B_t (ahorro):

$$-C_t^{-\sigma} + \beta \mathbb{E}_t \left[V'(B_t) \right] = 0.$$

- Con respecto a N_t (trabajo):

$$C_t^{-\sigma} W_t = N_t^{\nu}.$$

Por el teorema de la envolvente:

$$V'(B_{t-1}) = C_t^{-\sigma}(1 + r_{t-1}).$$

Además, reemplazando en la CPO de ahorro:

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left[C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t) \right].$$

Por tanto, ambas metodologías —el Lagrangiano infinito y la programación dinámica vía Bellman— conducen a las mismas condiciones óptimas bajo los supuestos regulares de diferenciabilidad, concavidad y racionalidad intertemporal.

La ecuación 2 corresponde a la ecuación de Euler, la cual iguala el costo marginal de ahorrar con el beneficio marginal de ahorrar. Esta ecuación es ex-ante. La ecuación 3 determina la oferta de trabajo. Note que un choque en el ingreso no puede hacer que todo el consumo aumente en t pues la primera ecuación se altera

$$C_t \uparrow \Longrightarrow u'(C_t) \downarrow \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Ecuación de Euler.}} u'(C_{t+1}) \uparrow \Longrightarrow C_{t+1} \uparrow .$$

En función de σ, el consumo se suaviza menos o más.

Observación. Un incremento del ingreso permanente (nuevo contrato, etc.) sí puede hacer que todo el nuevo ingreso en t se gaste en C_t pues puede usar el incremento del ingreso en $t + 1$ para mantener el equilibrio en la ecuación de Euler.

Observación. Si aumenta r_t, el retorno del ahorro es mayor, por efecto sustitución, se eleva el consumo futuro (es más caro consumir hoy). Sin embargo, también hay un efecto ingreso, y esto hace que se quiera consumir más hoy.

Observación. Las variables de control son C_t, N_t, B_t y las de estado A_t, K_t[5] tienen una distribución que determina las de control: $C_{t+1} = \Upsilon_{\text{control}}(A_t, K_t)$.

[5] Véase más adelante.

1.2.2. Empresas

Definición 3. Las utilidades de las empresas vienen dadas por

$$\Omega_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} (Y_{t+k} - W_{t+k} H_{t+k} - I_{t+k}) \right]$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Y_t &= F(A_t, K_{t-1}, H_t) = A_t K_{t-1}^{\alpha} H_t^{1-\alpha} \\ K_t &= I_t + (1-\delta) K_{t-1} \\ \ln A_t &= \rho \ln(A_{t-1}) + \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2). \end{aligned}$$

Note que la productividad (tecnología) es incierta y fluctúa.

Observación. El término $\left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma}$ representa el descuento estocástico estandarizado de utilidad marginal del consumo desde el punto de vista de los hogares (las empresas le pertenecen a las familias, que reciben un flujo incierto de pagos). Formalmente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_t}{C_{t+k}} \right)^{-\sigma} &= \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{C_{t+j-1}}{C_{t+j}} \right)^{\sigma} \\ &= \prod_{j=1}^{k} [\beta(1 + r_{t+j-1})] \quad \text{(por la ecuación de Euler)} \\ &= \beta^k \prod_{j=0}^{k-1} (1 + r_{t+j}) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} = \frac{1}{\beta^k \prod_{j=0}^{k-1} (1 + r_{r+j})}.$$

Proposición 1.2. *Las condiciones de primer orden aplicadas al problema de la firma proveen*

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial H_t} = 0 \implies \underbrace{(1-\alpha) \frac{Y_t}{H_t}}_{PMG_L} = W_t \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K_t} = 0 \implies \underbrace{1}_{Q:\ \textit{No hay fricciones o costos de instalación.}} = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + \underbrace{(1-\delta)}_{\textit{Valor residual.}} \right) \right]. \tag{5}$$

Notar que derivar en I_t es equivalente dada la relación entre la inversión y el capital.

Demostración. La función objetivo es Ω_t, la cual está bien definida gracias al factor de descuento estocástico $\beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma}$. Más aún, teoremas de convergencia uniforme permiten diferencias permutando la suma. Así, (todo en $\mathbb{E}_t(\cdot)$ implícito)

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial K_{t+k}} = -\beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} \underbrace{\frac{\partial I_{t+k}}{\partial K_{t+k}}}_{=-1} - \beta^{k+1} \left(\frac{C_{t+k+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \underbrace{\frac{\partial I_{t+k+1}}{\partial K_{t+k}}}_{=-(1-\delta)} + \beta^{k+1} \left(\frac{C_{t+k+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{\partial Y_{t+k+1}}{\partial K_{t+k}}$$

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial H_{t+k}} = -\beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\underbrace{\frac{\partial Y_{t+k}}{\partial H_{t+k}}}_{(1-\alpha) A_{t+k} K^{\alpha}_{t+k-1} H^{-\alpha}_{t+k}} - W_{t+k} \right) = 0$$

Simplificando y evaluando en $k = 0$:

$$\mathbb{E}_t \left[-1 + \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} (A_t \alpha K_t^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha} + 1 - \delta) \right] = 0$$

$$\mathbb{E}_t \left[(1-\alpha) A_t K^{\alpha}_{t-1} H_t^{-\alpha} - W_t \right] = 0.$$

Simplificando, se obtienen (4) y (5). □

Observación. Note que en la ecuación (4) no aparece el valor esperado: las variables son contemporáneas, se asume que el trabajo es homogéneo (supuesto poco realista). Además, $\mathbb{E}_t[X_t] = \mathbb{E}[X_t|\sigma_t] = X_t$. Por otro lado, si no hubiese incertidumbre, de (5)

$$1 = \beta \underbrace{\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma}}_{1/(1+r_t)} \left[\underbrace{\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t}}_{PMG_K} + (1-\delta) \right] \Leftrightarrow 1 + r_t = \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) \right).$$

1.2.3. Equilibrio.

En el equilibrio[6]:

$$
\begin{aligned}
B_t &= 0\\
Y_t &= C_t + I_t + G_t\\
N_t &= H_t.
\end{aligned}
$$

La primera ecuación determina el equilibrio en el mercado de bonos, la segunda en el mercado de bienes y la tercera en el mercado de trabajo; todo esto de acuerdo con la ley de movimiento

$$\ln(G_t + 1) = \lambda \ln(G_{t-1} + 1) + v_t$$

y con $T_t = G_t$. De este modo, *la economía artificial* queda completamente determinada por

$$
\begin{aligned}
C_t^{-\sigma} W_t &= H_t^{\nu} \quad \text{(mercado laboral)}\\
C_t^{-\sigma} &= \beta \mathbb{E}_t \left[C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t) \right] \quad \text{(ecuación de Euler)}\\
(1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t} &= W_t \quad \text{(productividad marginal del trabajo)}\\
1 &= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) \right) \right] \quad \text{(Q de Tobin)}\\
Y_t &= A_t K_{t-1}^{\alpha} H_t^{1-\alpha} \quad \text{(tecnología de la firma)}\\
K_t &= I_t + (1-\delta) K_{t-1} \quad \text{(inversión neoclásica)}\\
Y_t &= C_t + I_t + G_t \quad \text{(demanda agregada)}\\
\ln(A_t) &= \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t\\
\ln(G_t + 1) &= \lambda \ln(G_{t-1} + 1) + v_t.
\end{aligned}
$$

Observación. Los parámetros (profundos) son $\alpha, \delta, \sigma, \beta, \rho$. No se ven afectados.

- Primero, se **determina el estado estacionario,** definido como un equilibrio en el cual las variables no crecen y los choques toman sus respectivas medias incondicionales. En este paso, se expresan todas las variables endógenas del modelo como funciones de los parámetros estructurales y de las medias de los choques.

[6]Toda la deuda emitida por un agente (por ejemplo, el gobierno) debe estar en manos de otro agente

- Segundo, se realiza una **aproximación lineal** de cada ecuación del modelo alrededor del estado estacionario, utilizando una expansión de primer orden de Taylor. Esto transforma el sistema no lineal original en un sistema lineal en torno al equilibrio.

- Tercero, se **calibra el modelo**, es decir, se asignan valores numéricos a los parámetros del modelo, ya sea con base en evidencia empírica, estimaciones previas o literatura existente.

- Finalmente, se **resuelve el modelo aproximado**, que ahora consiste en un sistema de ecuaciones en diferencias estocásticas. Para ello se utilizan métodos numéricos como el de *coeficientes indeterminados*, que permite obtener la dinámica de las variables en respuesta a los choques.

1.2.4. Estado estacionario

$$
\begin{aligned}
C^{-\sigma}W &= H^{\nu} && \text{(Oferta de trabajo)} \\
C^{-\sigma} &= \beta C^{-\sigma}(1+r) && \text{(Ecuación de Euler)} \\
(1-\alpha)\frac{Y}{H} &= W && \text{(Demanda de trabajo)} \\
1 &= \beta \left(\frac{C}{C}\right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta\right) && \text{(FOC capital)} \\
Y &= AK^{\alpha}H^{1-\alpha} && \text{(Función de producción)} \\
K &= I + (1-\delta)K && \text{(Ley de acumulación de capital)} \\
Y &= C + I + G && \text{(Identidad de recursos)} \\
\ln A_t &= 0 && \text{(Productividad constante (estado estacionario))} \\
\ln(1+G_t) &= \ln(1+G_{t-1}) && \text{(Regla fiscal)}
\end{aligned}
$$

dentro de la economía (por ejemplo, los hogares).

Así,

$$
\begin{aligned}
1 + r &= \frac{1}{\beta} && (6)\\
I &= \delta K && (7)\\
\frac{Y}{K} &= \frac{1 - \beta(1-\delta)}{\beta\alpha} && (8)\\
\frac{Y}{H} &= \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} = \left(\frac{Y}{K}\right)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{\beta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} && (9)\\
Y &= C + I + G \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{K} = \frac{C}{K} + \delta && (10)\\
\frac{C}{K} &= \frac{Y}{K} - \delta = \frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha} - \delta && (11)\\
K &= \left[(1-\alpha)\left(\frac{C}{K}\right)^{-\sigma}\frac{Y}{H}\left(\frac{H}{K}\right)^{-\nu}\right]^{\frac{1}{\sigma+\nu}} && (12)
\end{aligned}
$$

1.2.5. Log-linealización

Para estudiar la dinámica del modelo, se realiza una aproximación de primer orden (linealización) de todas las ecuaciones alrededor del estado estacionario. Las variables se expresan como desviaciones logarítmicas respecto a su valor de estado estacionario. Por ejemplo, si X es una variable, se define $x_t := \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$, lo cual es una aproximación de primer orden de la variación porcentual:

$$\boxed{\ln X_t \approx \ln \bar{X} + \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}} \quad \Rightarrow \quad x_t \approx \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}.}$$

En efecto, por Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

se sigue que

$$\ln x \simeq \ln x_0 + \frac{d}{dx}\ln x\bigg|_{x=x_0}(x - x_0).$$

O sea,

$$\ln x \simeq \ln x_0 + \frac{x - x_0}{x}.$$

Proposición 1.3. *El sistema linealizado en torno al estado estacionario es:*

$$-\sigma c_t + w_t = \nu h_t \tag{1: Oferta de trabajo}$$

$$-\sigma c_t = \mathbb{E}_t\left[-\sigma c_{t+1} + r_t\right] \tag{2: Ecuacion de Euler}$$

$$y_t = a_t + \alpha k_{t-1} + (1-\alpha)h_t \tag{3: Produccion}$$

$$y_t - h_t = w_t \tag{4: Demanda de trabajo}$$

$$0 = \mathbb{E}_t\left[-\sigma(c_{t+1} - c_t) + \gamma(y_{t+1} - k_t)\right] \tag{5: Q-Tobin linealizado}$$

$$y_t = \frac{C}{Y}c_t + \frac{I}{Y}i_t + \frac{G}{Y}g_t \tag{6: Identidad de recursos}$$

$$k_t = \delta i_t + (1-\delta)k_{t-1} \tag{7: Acumulacion de capital}$$

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t \tag{8: Proceso AR(1) para productividad}$$

$$g_t = \lambda g_{t-1} + \upsilon_t \tag{9: Proceso AR(1) para gasto publico}$$

Donde:

- $c_t, h_t, y_t, i_t, k_t, w_t, r_t, a_t, g_t$ *son desviaciones logarítmicas de las variables respectivas respecto a su estado estacionario.*
- γ *es una expresión auxiliar definida como:* $\gamma := \frac{\alpha \cdot \frac{Y}{K}}{\alpha \cdot \frac{Y}{K} + (1-\delta)}$.
- *La identidad de recursos linealizada (ecuación 6) se obtiene al tomar logaritmos y derivadas totales:*
$$\frac{dY}{Y} = \frac{C}{Y} \cdot \frac{dC}{C} + \frac{I}{Y} \cdot \frac{dI}{I} + \frac{G}{Y} \cdot \frac{dG}{G}$$
- *También se define* $\eta := 1 - \frac{G}{Y}$ *como la participación del sector privado en el producto.*

Demostración. Analicemos algunos casos. Para (1: Oferta de trabajo)

$$C_t^{-\sigma} W_t = H_t^{\nu}$$
$$-\sigma \ln C_t + \ln W_t = \nu \ln H_t$$
$$-\sigma \ln C_t + \sigma \ln \overline{C} - \sigma \ln \overline{C} + \ln W_t - \ln \overline{W} + \ln \overline{W} = \nu \ln H_t - \nu \ln \overline{H} + \nu \ln \overline{H}$$
$$-\sigma(\ln C_t - \ln \overline{C}) + \ln W_t - \ln \overline{W} = \nu(\ln H_t - \ln \overline{H})$$
$$-\sigma c_t + w_t = \nu h_t.$$

Para 2: Ecuacion de Euler

$$
\begin{aligned}
C_t^{-\sigma} &\simeq \overline{C}^{-\sigma}\left[1-\sigma\frac{C_t-\overline{C}}{\overline{C}}\right] \\
&= \overline{C}^{-\sigma}(1-\sigma C_t) \\
1+r_t &= 1+\overline{r}-\overline{r}+r_t \\
&= 1+\hat{r}_t+\overline{r} \\
&=\simeq (1+\hat{r}_t)(1+\overline{r}) \\
\overline{C}^{-\sigma}(1-\sigma c_t) &= \beta\mathbb{E}_t\left[\overline{C}^{-\sigma}(1-\sigma c_{t+1})(1+\overline{r})(1+r_t)\right] \\
1-\sigma c_t &= \mathbb{E}_t[(1-\sigma c_{t+1})(1+r_t)] \\
1-\sigma c_t &\simeq \mathbb{E}_t[1-\sigma c_{t+1}+r_t].
\end{aligned}
$$

(3: Produccion) es directa tomando logaritmos y restando los logaritmos en el equilibrio. Lo mismo ocurre con (4: Demanda de trabajo). La Q-Tobin requiere varias manipulaciones, similar a la ecuación de Euler. Finalmente, (6: Identidad de recursos) se sigue de

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t \\
Y_t - Y &= C_t - C + I_t - I \\
\frac{Y_t - Y}{Y} &= \frac{C_t - C}{CY}C + \frac{I_t - I}{IY}I \\
\hat{y}_t &= \frac{C}{Y}\hat{c}_t + \frac{I}{Y}\hat{i}_t.
\end{aligned}
$$

y (7: Acumulacion de capital) de

$$
\begin{aligned}
K_t &= I_t + (1-\delta)K_{t-1} \\
K_t - \overline{K} + \overline{K} &= I_t - \overline{I} + \overline{I} + (1-\delta)(K_t - \overline{K} + \overline{K}) \\
\frac{K_t - \overline{K}}{\overline{K}\overline{I}} &= \frac{I_t - \overline{I}}{\overline{I}\overline{K}} + \frac{(1-\delta)(K_{t-1} - \overline{K})}{\overline{K}\overline{I}} \\
\frac{k_t}{\overline{I}} &= \frac{i_t}{\overline{K}} + \frac{(1-\delta)k_{t-1}}{\overline{I}} \\
k_t &= \delta i_t + (1-\delta)k_{t-1},
\end{aligned}
$$

pues $\delta\overline{K} = \overline{I}$. □

1.2.6. Calibración

- Para poder encontrar la solución del modelo, es necesario asignar valores a los **parámetros estructurales** (o profundos).

- Esta calibración se realiza con el objetivo de reproducir ciertos **ratios de estado estacionario** que: (i) son característicos del modelo, y (ii) se observan empíricamente en los datos (por ejemplo, participación del consumo o inversión en el PIB).

- Algunas condiciones que vinculan directamente los parámetros con ratios observables en el estado estacionario son:

$$\frac{wH}{Y} = 1 - \alpha \quad \text{(participación del trabajo)}$$
$$\frac{I}{K} = \delta \quad \text{(tasa de inversión)}$$
$$1 + r = \frac{1}{\beta} \quad \text{(rendimiento del capital)}$$

- Algunos valores pueden ser por ejemplos:

  - Tasa de descuento: $\beta = 0{,}99$
  - Participación del capital en la producción: $\alpha = 0{,}3$
  - Elasticidad de la oferta de trabajo: $\nu = 0{,}5$
  - Aversión relativa al riesgo: $\sigma = 1$
  - Tasa de depreciación del capital: $\delta = 0{,}02$

1.2.7. Incremento de la productividad

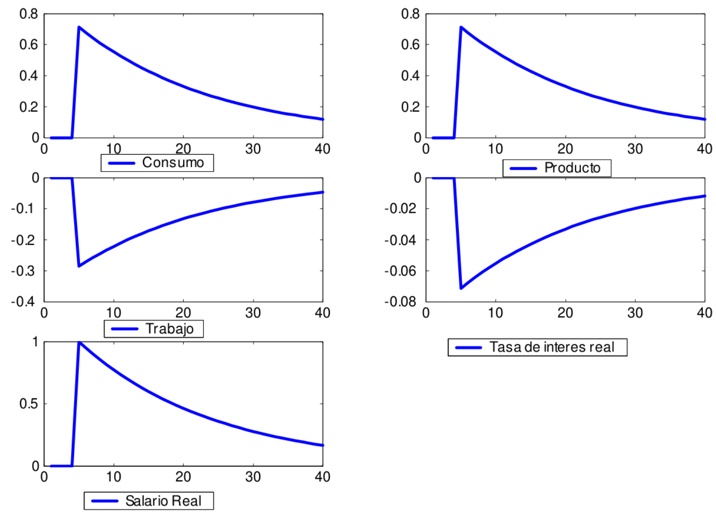

Figura 1: Incremento transitorio de la productividad.

- **Incremento del producto:** al mejorar la productividad, cada unidad de trabajo y capital genera más producción. Es un efecto directo sobre la función de producción.

- **Aumento del salario real:** al ser más productivos, los trabajadores aportan más al producto marginal, lo que incrementa el salario real (w).

- **Mayor consumo:** los hogares tienen más ingresos (por mayores salarios y beneficios), lo que les permite consumir más.

- **Reducción de la tasa de interés real:** esto depende de la naturaleza del choque. Estamos en el caso transitorio. El consumo actual aumenta menos que la producción, aumentando el ahorro (oferta de fondos), lo que presiona a la baja de la tasa de interés. Los hogares deciden consumir menos hoy, deciden ahorrar más. Esto desplaza la curva de oferta hacia la derecha. Para equilibrar el mercado, se necesita un r más bajo para incentivar más inversión y reducir el ahorro marginal. Si el choque es transitorio la inversión no se modifica, pero si es permanente, sí. En dicho caso,la tasa de interés sube: Las empresas quieren comprar más capital piden más préstamos. Esto desplaza la curva de demanda hacia la derecha. Para equilibrar el mercado, se necesita un r mayor que incentive más ahorro y desaliente algo de inversión marginal.

▶ **Efecto ambiguo sobre horas trabajadas:**

- ▲ Por un lado, el mayor salario incentiva a trabajar más (efecto sustitución).
- ▲ Por otro lado, los hogares pueden decidir consumir más ocio (efecto ingreso).

La combinación de ambos efectos determina si las horas trabajadas suben o bajan y la persistencia del choque.

▶ Los **efectos de un choque de productividad** tienen características adicionales importantes:

- **Persistencia:** los choques tienden a durar más de un periodo (por ejemplo, si A_t sigue un proceso AR(1), el efecto se transmite en el tiempo).
- **Comovimientos entre consumo, producto e inversión:** todos aumentan conjuntamente cuando hay un choque positivo de productividad, lo que concuerda con la evidencia empírica de ciclos económicos.
- **Mayor volatilidad en inversión que en consumo:** esto se debe a la *concavidad de las preferencias* $u(C) = \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$. La utilidad marginal decreciente hace que los hogares prefieran suavizar el consumo intertemporalmente, mientras que la inversión actúa como variable de ajuste.
- **Choques transitorios:** aunque son persistentes, no son permanentes. Eventualmente, su efecto se disipa y la economía vuelve al estado estacionario.

1.2.8. Incremento del gasto público.

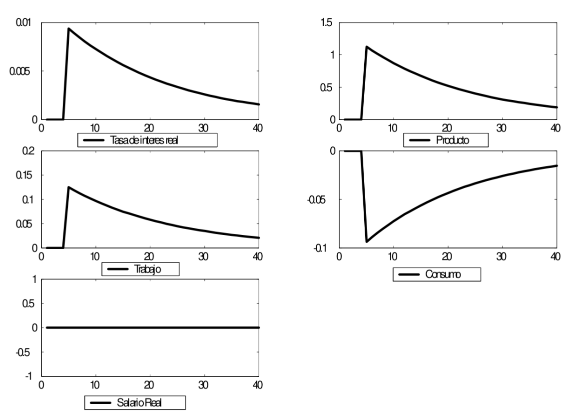

Figura 2: Incremento del gasto.

- **Producto (Y_t)**: aumenta de forma inmediata y transitoria. El alza en G_t eleva la demanda agregada $Y_t = C_t + I_t + G_t$, generando una expansión del producto en el primer periodo. Luego, a medida que G_t vuelve a su tendencia, el producto converge gradualmente a su estado estacionario.

- **Trabajo (H_t)**: sube de forma marcada en el corto plazo. Como el capital no sube, el aumento en Y_t solo puede lograrse mediante un mayor uso del trabajo en la función de producción $Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$. Por tanto, la oferta laboral responde con más horas trabajadas.

- **Consumo (C_t)**: cae inicialmente. Al aumentar G_t, se requiere una reducción en C_t para cumplir con la restricción de recursos. Además, los agentes anticipan impuestos futuros y reducen su consumo presente (efecto ricardiano). Luego, el consumo se recupera gradualmente.

- **Inversión (I_t)**: también cae. Dado que más gasto público absorbe recursos de la economía, se reduce la inversión privada: es el efecto clásico de *crowding out*. Posteriormente, al disiparse el shock, la inversión vuelve lentamente a su senda de equilibrio.

- **Capital (K_t)**: disminuye gradualmente, alcanzando un mínimo en el mediano plazo. Esto se debe a que la inversión es menor en los primeros periodos, y dado que el capital es acumulado ($K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}$), su stock se erosiona con el tiempo. Luego comienza a recuperarse conforme se restablece la inversión.

- **Salario real (w_t)**: cae en el corto plazo. Aunque el empleo sube, esto reduce la productividad marginal del trabajo (dado el capital fijo), lo que presiona el salario real a la baja. A medida que el capital comienza a recuperarse, también lo hace el salario.

- **Tasa de interés real (r_t)** (implícita en la Tobin-Q): sube. Como Y_{t+1} aumenta y K_t cae (capital escaso), la productividad marginal del capital sube, elevando la tasa de interés real. Este es un canal neoclásico claro de ajuste.

2. Clase 2

2.1. Implicancias para la política económica

El equilibrio competitivo del modelo de RBC es eficiente en el sentido de pareto pues, al ser una economía sin fricciones, se satisface el primer teorema del bienestar. ¿Esto implica que no existe un rol para la política económica?

- Las fluctuaciones cíclicas son respuestas eficientes de la economía a las fluctuaciones estocásticas en la productividad.
- Las expansiones coinciden con periodos de alta productividad en donde las empresas encuentran rentable invertir, las familias desean trabajar y ahorrar más para aprovechar un salario y tasas de interés reales más elevadas.
- Las recesiones en contra parte, son periodos de baja productividad en el que las empresas encuentran óptimo producir e invertir menos, y las familias ahorrar y trabajar menos.

El problema del planificador social consiste en escoger las asignaciones de consumo, inversión, producción, y trabajo, sujeto a las restricciones de recursos y tecnología que enfrenta la economía. Concretamente, el planificador central resuelve

$$V_t(K_t) = \max_{C_t, N_t, K_{t-1}} U_t(C_t, N_t) + \beta \mathbb{E}_t[V_{t+1}(K_{t+1})]$$

donde

$$U_t(C_t, N_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1+\nu} \right)$$

y sujeto a

$$\underbrace{A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha}}_{Y_t} = C_t + \underbrace{K_t - (1-\delta)K_{t-1}}_{=I_t}.$$

Las CPO sobre las variables de control proveen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_t(K_t)}{\partial N_t} &= \frac{\partial U_t(C_t, N_t)}{\partial N_t} + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial N_t} \right] = 0 \\
\frac{\partial V_t(K_t)}{\partial C_t} &= \frac{\partial U_t(C_t, N_t)}{\partial C_t} + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial C_t} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_t(K_t)}{\partial K_{t-1}} = \frac{\partial U_t(C_t,N_t)}{\partial K_{t-1}} + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial K_{t-1}}\right] = 0.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_t(C_t,N_t)}{\partial N_t} &= -N_t^{\nu} = -\beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial N_t}\right] = -\beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial K_t}\right] \frac{\partial K_t}{\partial N_t} \\
\frac{\partial U_t(C_t,N_t)}{\partial C_t} &= C_t^{-\sigma} = -\beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial C_t}\right] = -\beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial K_t}\right] \frac{\partial K_t}{\partial C_t} \\
\frac{\partial U_t(C_t,N_t)}{\partial K_{t-1}} &= -\beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial K_{t-1}}\right].
\end{aligned}$$

Además,

$$\frac{\partial K_t}{\partial C_t} = -1, \quad \frac{\partial K_t}{\partial N_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}.$$

Por otro lado, del teorema de la envolvente,

$$\frac{\partial V_t(K_t)}{\partial K_{t-1}} = \frac{\partial U_t(C_t,N_t)}{\partial C_t}\frac{\partial C_t}{\partial K_{t-1}}.$$

Como

$$\frac{\partial C_t}{\partial K_{t-1}} = \alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1-\delta),$$

se sigue que

$$\frac{\partial V_t(K_t)}{\partial K_{t-1}} = C_t^{-\sigma}\left[\alpha \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1-\delta)\right].$$

Como esto es para un t arbitrario,

$$\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial K_t} = C_{t+1}^{-\sigma}\left[\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta)\right]. \tag{13}$$

Luego, de

$$C_t^{-\sigma} = -\beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial V_{t+1}(K_{t+1})}{\partial K_t}\right] \frac{\partial K_t}{\partial C_t}$$

usando (13), se concluye que

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left[C_{t+1}^{-\sigma}\left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta)\right)\right]$$

y, por otro lado,

$$N_t^{\nu} = \beta \mathbb{E}_t \left[C_{t+1}^{-\sigma}\left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta)\right)\right] \frac{(1-\alpha)Y_t}{N_t}.$$

Así,

$$N_t^{\nu} = C_t^{-\sigma} \frac{(1-\alpha)Y_t}{N_t}.$$

O sea, las CPO son, junto a la ecuación de estado para la productividad:

$$\begin{aligned} C_t^{-\sigma}(1-\alpha)A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{-\alpha} = N_t^{\nu} \\ 1 &= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} (\alpha A_{t+1} K_t^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)) \right] \\ \ln(A_t) &= \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Se concluye de aquí que el equilibrio del modelo de RBC es pareto eficiente, pues las ecuaciones son las mismas que caracterizan el modelo de equilibrio competitivo.

2.2. Choques de productividad permanentes

- $\ln(A_t) = \mu \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t$, proceso estocástico con una raíz unitaria (es decir, un paseo aleatorio con deriva).
- Escribimos $\overline{Y}_t = \frac{Y_t}{A_t}$.
- Se sigue que $\ln Y_t = \ln \overline{Y}_t + \ln A_t$.
- A partir de

  $$\ln A_t = \ln A_{t-1} + \mu + \varepsilon_t,$$

  iterando hacia adelante se obtiene:

  $$\ln A_{t+h} = \ln A_t + \mu h + \varepsilon_{t+1} + \cdots + \varepsilon_{t+h}.$$

  Pero como $\ln A_t$ depende directamente de ε_t, entonces:

  $$\frac{\partial \ln A_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial \ln A_t}{\partial \varepsilon_t} = 1.$$

  Por tanto, derivando la expresión de $\ln Y_{t+h}$ respecto a ε_t, se obtiene:

  $$\frac{\partial \ln Y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} = 1 + \frac{\partial \ln Y_{t+h}^{t}}{\partial \varepsilon_t}.$$

Ahora bien, si uno está interesado en el efecto acumulado del shock ε_t sobre la trayectoria futura del producto (por ejemplo, en la construcción de funciones impulso-respuesta acumuladas), considera:

$$\sum_{s=t}^{t+h} \ln Y_s = \sum_{s=t}^{t+h} \left(\ln A_s + \ln Y_s^t \right).$$

Entonces, al derivar respecto a ε_t se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varepsilon_t} \left(\sum_{s=t}^{t+h} \ln Y_s \right) &= \sum_{s=t}^{t+h} \left(\frac{\partial \ln A_s}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial \ln Y_s^t}{\partial \varepsilon_t} \right) \\
&= \sum_{s=t}^{t+h} 1 + \sum_{s=t}^{t+h} \frac{\partial \ln Y_s^t}{\partial \varepsilon_t} \\
&= (h+1) + \sum_{s=t}^{t+h} \frac{\partial \ln Y_s^t}{\partial \varepsilon_t}.
\end{aligned}$$

De aquí surge la expresión:

$$\frac{\partial \ln Y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} = 1 + h \frac{\partial \ln Y_{t+1}^t}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial \ln Y_{t+2}^t}{\partial \varepsilon_t} + \cdots + \frac{\partial \ln Y_{t+h}^t}{\partial \varepsilon_t}.$$

Considerando $\overline{X} = X/A$:

$$\begin{aligned}
\overline{W}_t H_t^{\nu} &= \overline{C}_t^{-\sigma} A_t^{-1-\sigma} \\
\overline{C}_t^{-\sigma} &= \beta G \mathbb{E}_t \left[\overline{C}_{t+1}^{-\sigma} (1 + r_t) e^{\varepsilon_{t+1}} \right] \\
(1-\alpha) \frac{\overline{Y}_t}{H_t} &= \overline{W}_t \\
1 &= \beta \underbrace{G}_{=e^{\mu}} \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\overline{C}_{t+1}}{\overline{C}_t} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{\overline{Y}_{t+1}}{\overline{K}_t} + (1-\delta) \right) e^{\varepsilon_{t+1}} \right] \\
\overline{Y}_t &= \overline{K}_{t-1}^{\alpha} \overline{H}_t^{1-\alpha} \\
\overline{K}_t e^{\varepsilon_{t+1}} &= \overline{I}_t + (1-\delta) \overline{K}_{t-1} \\
\overline{Y}_t &= \overline{C}_t + \overline{I}_t + \overline{G}_t \\
\ln A_t &= \mu + \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t \\
\ln G_t &= \lambda \ln G_{t-1} + v_t.
\end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_t^{-\sigma} &= \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{-\sigma} \\
&= \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{A_t^{-\sigma}} C_{t+1}^{-\sigma}(1+r_t) \right] \\
&= \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{A_t^{-\sigma}} \left(\frac{C_{t+1}}{A_{t+1}}\right)^{-\sigma} A_{t+1}^{-\sigma}(1+r_t) \right] \\
&= \beta G \mathbb{E}_t \left[\overline{C}_{t+1}^{-\sigma} e^{\varepsilon_{t+1}}(1+r_t) \right]
\end{aligned}
$$

donde $G = e^{-\sigma\mu}$, y $\mathbb{E}_t[e^{\varepsilon_{t+1}}] = \mathbb{E}_t\left[(e^{\varepsilon_{t+1}})^a\right]$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observación. Las variables $\overline{X}$ no crecen a la tasa de la productividad. Las variables en niveles sin embargo, sí crecen en a la misma tasa que la productividad. La funciones impulso respuesta para las variables normalizadas convergen a cero, mientras que los de las variables en niveles no lo hacen.

Ejemplo 2.1. **Utilidad no separable.** Considere $U_t = \frac{\left[C_t^\sigma(1-N_t)^{1-\sigma}\right]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
U_{C,t} &= \sigma C_t^{\sigma-1}[C_t^\sigma(1-N_t)^{1-\sigma}]^{-\gamma} \\
U_{N,t} &= -(1-\sigma)(1-N_t)^{-\sigma}[C_t^\sigma(1-N_t)^{1-\sigma}]^{-\gamma}.
\end{aligned}
$$

2.3. Extensiones al modelo RBC

El modelo de ciclos económicos reales permite capturar regularidades empíricas. No obstante, tiene problemas en explicar:

- La alta persistencia del ciclo económico cuando los choques de productividad no son persistentes.
- La baja correlación entre salarios y producto.
- La volatilidad de la inversión.
- Las fluctuaciones de la tasa de desempleo.
- Lo que más responde a ΔY es ΔDesempleo y no ΔW.

2.3.1. Hábitos de consumo

Los hábitos de consumo reflejan que el consumo en $t-1$ puede influenciar el consumo en t. Formalmente,

$$V_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{(C_{t+k} - bC_{t+k-1})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\nu}}{1+\nu} \right) \right].$$

Esto introduce una variable de estado adicional: C_{t-1}, lo que genera mayor persistencia (ante un shock, las variables como consumo, output, horas, etc., tardan más en volver a su estado estacionario, y presentan dinámicas más suaves y prolongadas) en el modelo. Las ecuaciones de equilibrio se convierten en:

$$(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} W_t = H_t^{\nu}$$

$$(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left[(C_{t+1} - bC_t)^{-\sigma} (1 + r_t) \right]$$

$$1 = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1} - bC_t}{C_t - bC_{t-1}} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) \right) \right]$$

Proposición 2.1. *Las siguientes ecuaciones:*

$$u_{c,t} + w_t = \nu h_t, \qquad u_{c,t} = \mathbb{E}_t[u_{c,t+1} + r_t]$$

$$y_t = a_t + \alpha k_{t-1} + (1-\alpha) h_t, \qquad y_t - h_t = w_t$$

$$0 = \mathbb{E}_t \left(u_{c,t+1} - u_{c,t} \right) + \eta (y_{t+1} - k_t), \qquad \eta = \frac{\alpha \frac{Y}{K}}{\alpha \frac{Y}{K} + (1-\delta)}$$

$$y_t = \frac{C}{Y} c_t + \frac{I}{Y} i_t + \frac{G}{Y} g_t, \qquad k_t = \delta i_t + (1-\delta) k_{t-1}$$

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad g_t = \lambda g_{t-1} + v_t$$

$$u_{c,t} = \frac{-\sigma}{1-b} (c_t - b c_{t-1})$$

son resultado de la log-linealización.

Demostración. Definimos $S_t := C_t - bC_{t-1}$, y notamos que $\overline{S} = \overline{C}(1-b)$. Expandimos $S_t^{-\sigma}$ [7]

$$S_t^{-\sigma} \approx \overline{S}^{-\sigma}\left(1 - \sigma\frac{S_t - \overline{S}}{\overline{S}}\right).$$

Observamos que:

$$S_t - \overline{S} = (C_t - \overline{C}) - b(C_{t-1} - \overline{C}) = \overline{C}(c_t - bc_{t-1}) \quad \Rightarrow \quad \frac{S_t - \overline{S}}{\overline{S}} = \frac{c_t - bc_{t-1}}{1-b}.$$

Por lo tanto:

$$u_{c,t} := (C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} \approx \overline{S}^{-\sigma}\left(1 - \frac{\sigma}{1-b}(c_t - bc_{t-1})\right) \Rightarrow u_{c,t} = \frac{-\sigma}{1-b}(c_t - bc_{t-1}). \tag{14}$$

Respecto a la condición de equilibrio en el mercado laboral, la FOC es:

$$(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} W_t = H_t^{\nu}.$$

Tomamos logaritmos en ambos lados:

$$-\sigma \ln(C_t - bC_{t-1}) + \ln W_t = \nu \ln H_t$$

Aproximamos log-linealmente alrededor del estado estacionario. Sabemos que en equilibrio $\overline{S} := \overline{C}(1-b)$, y definimos las variables logarítmicas:

$$c_t := \ln C_t - \ln \overline{C}, \quad w_t := \ln W_t - \ln \overline{W}, \quad h_t := \ln H_t - \ln \overline{H}$$

Usamos la aproximación de primer orden:

$$\ln(C_t - bC_{t-1}) \approx \ln \overline{C}(1-b) + \frac{C_t - bC_{t-1} - \overline{C}(1-b)}{\overline{C}(1-b)} = \ln \overline{S} + \frac{c_t - bc_{t-1}}{1-b}.$$

[7] La expansión de primer orden de x^{-a} alrededor de un punto $\overline{x} > 0$ es:

$$x^{-a} \approx \overline{x}^{-a}\left(1 - a \cdot \frac{x - \overline{x}}{\overline{x}}\right).$$

Para obtener este resultado, aplicamos la fórmula de Taylor de orden 1. Esto da:

$$x^{-a} \approx \overline{x}^{-a} - a\overline{x}^{-a-1}(x - \overline{x}) = \overline{x}^{-a}\left(1 - a \cdot \frac{x - \overline{x}}{\overline{x}}\right).$$

Sustituimos en la ecuación:

$$-\sigma\left(\ln\overline{S}+\frac{c_t-bc_{t-1}}{1-b}\right)+\ln\overline{W}+w_t=\nu(\ln\overline{H}+h_t)$$

Cancelamos términos constantes y reordenamos:

$$-\frac{\sigma}{1-b}(c_t-bc_{t-1})+w_t=\nu h_t$$

Definiendo:

$$u_{c,t}:=\frac{-\sigma}{1-b}(c_t-bc_{t-1})$$

obtenemos finalmente:

$$u_{c,t}+w_t=\nu h_t.$$

Ahora la ecuación de Euler:

$$(C_t-bC_{t-1})^{-\sigma}=\beta\mathbb{E}_t\left[(C_{t+1}-bC_t)^{-\sigma}(1+r_t)\right].$$

Aproximamos el lado derecho usando una expansión de primer orden alrededor del estado estacionario $\overline{S}:=\overline{C}(1-b)$. Usamos la definición:

$$u_{c,t}:=\frac{-\sigma}{1-b}(c_t-bc_{t-1}).$$

Entonces, de (14):

$$(C_{t+1}-bC_t)^{-\sigma}\approx\overline{S}^{-\sigma}(1+u_{c,t+1}),\quad \text{y}\quad (1+r_t)\simeq(1+\hat{r}_t)(1+\overline{r}).$$

Multiplicamos los dos términos:

$$(C_{t+1}-bC_t)^{-\sigma}(1+\overline{r})(1+\hat{r}_t)\approx\overline{S}^{-\sigma}(1+u_{c,t+1})(1+\overline{r})(1+\hat{r}_t).$$

De igual forma, aproximamos el lado izquierdo:

$$(C_t-bC_{t-1})^{-\sigma}\approx\overline{S}^{-\sigma}(1+u_{c,t}).$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler:

$$\overline{S}^{-\sigma}(1+u_{c,t}) = \beta\mathbb{E}_t\left[\overline{S}^{-\sigma}(1+u_{c,t+1})(1+\overline{r})(1+\hat{r}_t)\right] = \beta\mathbb{E}_t\left[\overline{S}^{-\sigma}((1+u_{c,t+1})(1+\overline{r})(1+\hat{r}_t))\right].$$

Como estamos loglinealizando alrededor del estado estacionario, podemos cancelar $\overline{S}^{-\sigma}$ y, además, eliminando términos de segundo orden, usando que $\beta(1+\overline{r}) = 1$ y denotando $\hat{r}_t = r_t$:

$$1 + u_{c,t} = \mathbb{E}_t[1 + u_{c,t+1} + r_t].$$

Ahora para la Q de Tobin, partimos de:

$$1 = \beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1} - bC_t}{C_t - bC_{t-1}}\right)^{-\sigma}\left(\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta\right)\right].$$

Sabiendo que $\ln\left(\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta)\right) \approx \ln\left(\alpha\frac{Y}{K} + (1-\delta)\right) + \eta(y_{t+1} - k_t)$ donde $\eta = \frac{\alpha\frac{Y}{K}}{\alpha\frac{Y}{K}+(1-\delta)}$, es directo de la aproximación hecha en la ecuación de Euler que

$$0 = \mathbb{E}_t[(u_{c,t+1} - u_{c,t}) + \eta(y_{t+1} - k_t)].$$

El resto de ecuaciones ya tienen estructura lineal por lo que la log-linealización es directa. $\square$

Los hábitos de consumo generan mayor persistencia a choques de productividad debido a que el consumo opera como una variable de estado. Asimismo, reducen el impacto inicial de los choques de productividad en el consumo, generando una respuesta en forma de joroba.

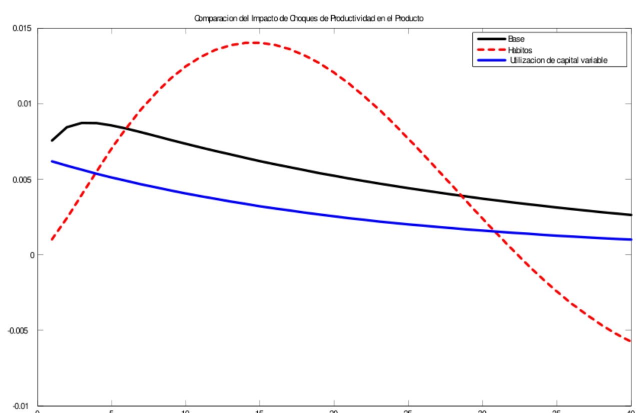

Figura 3: Respuesta tipo hump-shape.

2.3.2. Utilización de la variable de capital

- Permite que las empresas puedan aumentar la producción utilizando más intensamente el capital. Por ejemplo, trabajando dos turnos.
- Esto tiene un costo por acelerar la producción.
- La función de beneficios y la restricción de la dinámica del capital se ven alteradas.

$$\Omega_t = \mathbb{E}_t\left[\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma}(A_{t+k}(K_{t+k-1}u_{t+k})^{\alpha}H_{t+k}^{1-\alpha} - W_{t+k}H_{t+k} - I_{t+k})\right]$$

sujeto a

$$K_t = I_t + (1-\delta(u_t))K_{t-1}$$
$$\delta(u_t) = \delta + \frac{d}{1+\zeta}u_t^{1+\zeta}.$$

La log-linealización provee por la proposición 1.3 (solo se modifican las ecuaciones que involucran PMG_K y la dinámica del capital), usando que $\delta(u_t) \simeq \delta + \frac{d}{1+\zeta} + d(u_t - 1)$:

$$\begin{aligned}
u_{c,t} &= \nu h_t \\
u_{c,t} &= \mathbb{E}_t[u_{c,t+1} + r_t] \\
y_t &= a_t + \alpha(k_{t-1} + u_t) + (1-\alpha)h_t \\
y_t &= h_t + w_t \\
0 &= \mathbb{E}_t[(u_{c,t+1} - u_{c,t}) + \eta(y_{t+1} - k_t)] \\
\eta &= \frac{\alpha\frac{Y}{K}}{\alpha\frac{Y}{K} + (1-\delta)} \\
y_t &= \frac{C}{Y}c_t + \frac{I}{Y}i_t + \frac{G}{Y}g_t \\
k_t &= \delta i_t + (1-\delta)k_{t-1} - du_t \\
u_{c,t} &= -\sigma c_t \\
du_t + k_{t-1} &= y_t - u_t \\
a_t &= \rho a_{t-1} + \epsilon_t \\
g_t &= \lambda g_{t-1} + v_t.
\end{aligned}$$

Al permitir que las empresas utilicen más intensivamente el capital, ante presiones de demanda, éstas pueden expandir el producto sin presionar en el mercado de trabajo, lo que ayuda a reducir la correlación entre salarios y producto. Asimismo, reduce la volatilidad de la inversión debido a que parte de la demanda por capital que se genera en el ciclo económico se absorbe a través del margen intensivo.

2.3.3. Costos de ajuste

Usualmente las inversiones toman cierto tiempo antes de alcanzar la fase operativa. Una forma de racionalizar este hecho estilizado es asumir que existen costos de ajuste que encarece la inversión, por ejemplo

$$\underbrace{AC(I_t, K_{t-1})}_{\text{Adjustment cost.}} = \frac{v}{2}\left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu\right)^2 K_{t-1},$$

donde μ representa el nivel del ratio inversión-capital del estado estacionario, v mide el impacto de desvíos en ese ratio. Ahora la función es estrictamente convexa en I_t y es decreciente en K_{t-1}. De este modo, el problema de la firma se torna:

$$\text{máx } V_t(K_{t-1}) = A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - W_t N_t - I_t - \frac{v}{2}\left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu\right)^2 K_{t-1} + \beta \mathbb{E}_t[V_{t+1}(K_t)],$$

donde $K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}$. En su expansión:

$$\Omega_t = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma} \left(A_{t+k} K_{t+k-1}^{\alpha} N_{t+k}^{1-\alpha} - W_{t+k}N_{t+k} - I_{t+k} - \frac{v}{2}\left(\frac{I_{t+k}}{K_{t+k-1}} - \mu\right)^2 K_{t+k-1}\right).$$

Las CPO son:

$$\begin{aligned}
1 + AC_{I,t} &= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) - AC_{K,t+1}K_{t-1}\right)\right] \\
W_t &= (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}
\end{aligned}$$

donde $AC_{I,t} = b\left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu\right)$ y $AC_{K,t} = v\left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu\right)\frac{I_t}{K_{t-1}}$.

Demostración. Definimos el Lagrangiano intertemporal:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Bigg\{ \Lambda_{t+k} \left[Y_{t+k} - W_{t+k} N_{t+k} - I_{t+k} - \frac{v}{2} \left(\frac{I_{t+k}}{K_{t+k-1}} - \mu \right)^2 K_{t+k-1} \right] + q_{t+k} \left[(1-\delta) K_{t+k-1} + I_{t+k} - K_{t+k} \right] \Bigg\},$$

donde $\Lambda_{t+k} := \left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma}$ es la utilidad marginal descontada, y q_t es el multiplicador de la restricción de acumulación de capital.

- El término I_t aparece en:
  - el consumo corriente: $-\Lambda_t I_t$
  - el costo de ajuste: $-\Lambda_t \cdot \frac{v}{2} \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu\right)^2 K_{t-1}$
  - la restricción de capital: $+q_t I_t$
  - indirectamente en K_t, que afecta el valor futuro.

La derivada total es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = -\Lambda_t \left[1 + v \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu \right) \right] + q_t - \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{t+1}}{\partial K_t} \cdot \frac{\partial K_t}{\partial I_t} \right].$$

Como $\frac{\partial K_t}{\partial I_t} = 1$, sólo necesitamos derivar el valor futuro respecto a K_t:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{t+1}}{\partial K_t} = \Lambda_{t+1} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} - AC_{K,t+1} \right) + q_{t+1}(1-\delta).$$

Sustituimos en la condición de primer orden:

$$\Lambda_t \left(1 + AC_{I,t}\right) = q_t = \beta \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t+1} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} - AC_{K,t+1} \right) + q_{t+1}(1-\delta) \right],$$

donde:

$$AC_{I,t} := v \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu \right), \quad AC_{K,t+1} := v \left(\frac{I_{t+1}}{K_t} - \mu \right) \cdot \frac{I_{t+1}}{K_t}.$$

Dividimos ambos lados por Λ_t y usamos que $\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}$, además de que $\frac{q_{t+1}}{\Lambda_t} =$

$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}(1+AC_{I,t+1})$:

$$1 + AC_{I,t} = \mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) - AC_{K,t+1}K_t\right)\right].$$

$\square$

La economía queda entonces determinada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
1 &= \beta\mathbb{E}_t\left(\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}(1+r_t)\right)\\
C_t^{-\sigma}W_t &= N_t^{\nu}\\
Y_t &= A_t K_{t-1}^{\alpha}N_t^{1-\alpha}\\
K_t &= I_t + (1-\delta)K_{t-1}\\
1 + AC_{I,t} &= \beta\mathbb{E}_t\left(\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) - AC_{K,t+1}K_t - AC_{t+1}\right)\right)\\
W_t &= (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}\\
Y_t &= C_t + I_t\\
AC_{I,t} &= \nu\left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu\right), \qquad AC_{K,t} = \nu\left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \mu\right)\cdot\frac{I_t}{K_{t-1}}.
\end{aligned}$$

Log-linealizando:

$$\begin{aligned}
r_t &= \sigma\mathbb{E}_t(c_{t+1} - c_t)\\
w_t &= \nu n_t + \sigma c_t\\
y_t &= a_t + \alpha k_{t-1} + (1-\alpha)n_t\\
k_t &= \delta i_t + (1-\delta)k_{t-1}\\
0 &= \mathbb{E}_t\left(-\sigma(c_{t+1} - c_t) + \eta(y_{t+1} - k_t) - ac_{k,t+1}k_t - ac_{t+1}\right)\\
w_t &= y_t - n_t\\
y_t &= \left(\frac{C}{Y}\right)c_t + \left(\frac{I}{Y}\right)i_t\\
ac_{I,t} &= \nu\delta(i_t - k_{t-1}), \qquad ac_{k,t} = \nu(2\delta - \mu)(i_t - k_{t-1}).
\end{aligned}$$

Los costos de ajuste permiten calibrar la volatilidad de la inversión. Al hacer más costoso los cambios en capital, se reduce el incentivo a invetir, lo que reduce la volatilidad de la inversión. Cuanto más altos sean los costos de ajuste, menor será la volatilidad de inversión para el mismo nivel de volatilidad el ciclo económico.

2.3.4. Críticas a los modelos RBC

- La principal implicancia de los modelos RBC es que la mayor parte de las fluctuaciones en la actividad económica de los EE.UU refleja fluctuaciones en la tecnología.
- De ser esto cierto, condicional en los choques de productividad deberíamos observar una correlación positiva entre empleo, producto y productividad del trabajo.
- Galí (1999) evalúa si efectivamente los datos muestran esta correlación. Para ello utiliza un modelo de vectores autorregresivos estructurales.
- Encuentra que los datos para los EE.UU y otros paíÍses desarrollados no avalan la principal predicción del los modelos RBC, por el contrario muestran una correlación negativa entre productidad y empleo y productividad y producto.

3. RBC en economías pequeñas y abiertas

Cuadro 1: Ciclos Económicos: Economías Emergentes vs. Desarrolladas

Momento	**Economías Emergentes**	**Economías Desarrolladas**
σ_y	2.02	1.04
$\sigma_{\Delta y}$	1.87	0.95
ρ_y	0.86	0.90
$\rho_{\Delta y}$	0.23	0.09
σ_c/σ_y	1.32	0.94
σ_i/σ_y	3.96	3.42
$\sigma_{tb/y}$	2.09	0.71
$\rho_{tb/y,y}$	-0.58	-0.26
$\rho_{c,y}$	0.74	0.69
$\rho_{i,y}$	0.87	0.75

- σ_y: Desviación estándar del PIB real. Mide la volatilidad del nivel de producción agregada.
- $\sigma_{\Delta y}$: Desviación estándar del crecimiento del PIB real. Mide cuán volátil es el crecimiento económico.
- ρ_y: Autocorrelación del PIB real. Indica la persistencia temporal del producto.
- $\rho_{\Delta y}$: Autocorrelación del crecimiento del PIB. Mide la persistencia del crecimiento a lo largo del tiempo.
- σ_c/σ_y: Volatilidad relativa del consumo respecto al producto. Indica si el consumo es más o menos volátil que el PIB.
- σ_i/σ_y: Volatilidad relativa de la inversión respecto al producto. Mide cuán sensible es la inversión ante fluctuaciones del PIB.
- $\sigma_{tb/y}$: Desviación estándar de la balanza comercial como proporción del PIB. Refleja la volatilidad externa.
- $\rho_{tb/y,y}$: Correlación entre la balanza comercial (como proporción del PIB) y el PIB real. Negativa si el comercio neto cae cuando el PIB sube.
- $\rho_{c,y}$: Correlación entre el consumo y el PIB. Mide cuánto se mueve el consumo junto con la producción.
- $\rho_{i,y}$: Correlación entre la inversión y el PIB.

Se observa entonces que las economía emergentes son más volátiles.

Cuadro 2: Términos de Intercambio y Ciclos Económicos

Estadístico resumido	**Países Desarrollados**	**Países en Desarrollo**	**Países Exportadores de Petróleo**
$\sigma(tot)$	4.70	10.0	18.0
$\rho(tot_t, tot_{t-1})$	0.47	0.40	0.50
$\sigma(tot)/\sigma(y)$	0.52	0.77	1.40
$\rho(tot, y)$	0.78	0.39	0.30
$\rho(tot, c)$	0.74	0.34	0.19
$\rho(tot, i)$	0.67	0.38	0.45
$\rho(tot, tb)$	0.24	0.28	0.33
$\rho(tot, rer)$	0.70	0.07	0.42

Cuadro 3: *Fuente:* Mendoza (1995).

- $\sigma(tot)$: Desviación estándar de los términos de intercambio (precio de exportaciones relativo a importaciones). Mide su volatilidad.
- $\rho(tot_t, tot_{t-1})$: Autocorrelación de los términos de intercambio. Mide su persistencia en el tiempo.
- $\sigma(tot)/\sigma(y)$: Volatilidad relativa de los términos de intercambio respecto al PIB real.
- $\rho(tot, y)$: Correlación entre términos de intercambio y el PIB. Indica si mejoras en los precios externos están asociadas con mayor producción.
- $\rho(tot, c)$: Correlación entre términos de intercambio y el consumo. Evalúa cómo las variaciones externas afectan el bienestar interno.
- $\rho(tot, i)$: Correlación entre términos de intercambio y la inversión. Mide si la inversión responde a shocks externos.
- $\rho(tot, tb)$: Correlación entre términos de intercambio y la balanza comercial. Indica si los precios relativos afectan el comercio neto.
- $\rho(tot, rer)$: Correlación entre términos de intercambio y el tipo de cambio real. Refleja la interacción entre precios internacionales y competitividad cambiaria.

Dos hechos estilizados:

1. Correlación negativa entre la balanza comercial y el producto.
2. Correlación positiva entre los términos de intercambio y el producto.

Observación (Economías Pequeñas y Abiertas). En el contexto de los ciclos económicos internacionales, las economías pequeñas y abiertas presentan las siguientes características empíricas clave:

- **Mayor volatilidad del consumo:** La razón σ_c/σ_y (donde σ_c es la desviación estándar del consumo y σ_y la del PIB real) es mayor en economías pequeñas que en economías grandes o desarrolladas, lo cual refleja una mayor sensibilidad del consumo frente a shocks externos.

- **Cuenta corriente contra cíclica:** La cuenta corriente, denotada por CA_t, suele presentar una correlación negativa con el PIB, es decir, $\rho(CA_t, y_t) < 0$. Esto implica que en periodos de expansión económica (y_t alto), las economías tienden a reducir su superávit externo o incluso incurrir en déficit.

- **Términos de intercambio pro cíclicos:** Los términos de intercambio, definidos como $tot_t = \frac{P_t^X}{P_t^M}$, donde P_t^X es el índice de precios de exportación y P_t^M el de importación, muestran una correlación positiva con los principales agregados macroeconómicos: producto (y_t), consumo (c_t) e inversión (i_t), es decir, $\rho(tot_t, y_t) > 0$, $\rho(tot_t, c_t) > 0$, $\rho(tot_t, i_t) > 0$.

- **Alta volatilidad de la cuenta corriente:** La desviación estándar del saldo de cuenta corriente (como proporción del PIB), denotado por σ_{CA_t/y_t}, es mayor en economías pequeñas que en las economías grandes, indicando una exposición más pronunciada a fluctuaciones externas.

Recordemos que:

- **Cuenta corriente:** En modelos dinámicos de economía abierta, la cuenta corriente se define como $CA_t = y_t + r_t a_t - c_t - i_t$, donde y_t es el ingreso, a_t los activos netos externos, r_t la tasa de interés, c_t el consumo y i_t la inversión. Alternativamente, se puede definir como la variación de los activos netos $CA_t = a_{t+1} - a_t$.

- **Términos de intercambio (tot_t):** $tot_t = \frac{P_t^X}{P_t^M}$, donde P_t^X representa el índice de precios de los bienes exportados y P_t^M el de los bienes importados. Un aumento en tot_t indica una mejora en la relación de intercambio para el país.

3.1. El modelo

Las economías están compuestas por familias y empresas. Se produce y consume **un único bien homogéneo transable**. El resto del mundo también produce este bien.

Observación. Para endeudarse, las familias tienen que pagar un costo de transacción que es función creciente del nivel de deuda que mantienen.

3.1.1. Hogares

Las preferencias de las familias vienen dadas por:

$$V_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\nu}}{1+\nu} \right) \right]$$

donde $\sigma > 0$ es el coeficiente de aversión al riesgo, $\nu > 0$ la inversa de la elasticidad oferta de trabajo, $\beta < 1$ es el factor de descuento subjetivo. Respecto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + D_t = W_t N_t + \Pi_t - T_t + (1 + r_{t-1}^f) D_{t-1}$$

- $1 + r_{t-1}^f = (1 + r_{t-1}^*)(1 + rp_t)$, la deuda de hoy es conocida, se trabaja con la tasa de interés fijada ayer, r_t^* es la tasa de interés externa, rp_t es el nivel de premio por riesgo que se define en función de la deuda $-D_t$: $rp_t = \chi \left(e^{-(D_t - D)} - 1 \right)$. En una economía pequeña y abierta, los prestamistas internacionales ajustan la tasa de interés exigida en función del nivel de endeudamiento externo. Este ajuste se representa mediante una **prima de riesgo endógena** rp_t, donde:
  - $\chi > 0$ es el parámetro de sensibilidad del riesgo, D es la posición de activos.
  - Si $D_t \ll D$ (es decir, la deuda es mucho mayor que el nivel de referencia, o hay una posición fuertemente deudora), entonces el término $e^{-(D_t - D)} \gg 1$, por lo que $rp_t \gg 0$. Esto refleja que el país presenta un alto riesgo de impago, y por tanto los prestamistas exigen una **prima elevada**, encareciendo el financiamiento externo.
  - Si $D_t \gg D$ (es decir, el país tiene una posición acreedora neta respecto al exterior), entonces $e^{-(D_t - D)} \ll 1$, lo cual implica $rp_t < 0$. En este caso, el país representa poco riesgo y podría incluso recibir financiamiento a una tasa inferior a la tasa internacional base r_t^* (al ser una economía chica, esta tasa está fija).

- C_t es el consumo en t,
- D_t es el nivel de ahorro de las familias en un bono cupón cero que paga una tasa de interés real r_t^f, si $D_t < 0$ la familia se endeuda, si $D_t > 0$ la familia es acreedora neta,
- W_t el salario real,
- N_t es el número de horas trabajadas por la familia,
- Π_t beneficios distribuidos a las familias por las empresas,
- T_t es el pago de impuestos que hacen las familias al gobierno.

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} C_t^{-\sigma} &= \beta \mathbb{E}_t \left[C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t^f) \right] \\ C_t^{-\sigma} W_t &= N_t^{\nu}. \end{aligned}$$

3.1.2. Empresas

- Las empresas utilizan para producir una función de producción de retornos a escala constante, que combina capital y trabajo:

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} H_t^{1-\alpha}.$$

- El capital evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación: $K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}$.

Las CPO aplicadas a su función objetivo

$$\Omega_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} (A_{t+k} K_{t+k-1}^{\alpha} H_{t+k}^{1-\alpha} - W_{t+k} H_{t+k} - I_{t+k}) \right]$$

son (como antes)

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t} &= W_t \\ 1 &= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) \right) \right]. \end{aligned}$$

3.1.3. Condiciones de equilibrio

- Mercado laboral: $N_t = H_t$.
- $Y_t - C_t - I_t = -D_t + (1 + r^f_{t-1})D_{t-1}$.
  - si el país consume e invierte más de lo que produce, debe financiarlo con deuda externa $D_t < (1 + r^f_{t-1})D_{t-1}$,
  - si produce más que lo que absorbe internamente, acumula activos externos $D_t > (1 + r^f_{t-1})D_{t-1}$.

Luego:

$$
\begin{aligned}
1 &= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} (1 + r^f_t) \right] \\
C_t^{-\sigma} W_t &= N_t^{\nu} \\
Y_t &= A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \\
K_t &= I_t + (1 - \delta) K_{t-1} \\
1 &= \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1 - \delta) \right) \right] \\
W_t &= (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t} \\
Y_t - C_t - I_t &= -D_t + (1 + r^f_{t-1}) D_{t-1} \\
(1 + r^f_{t-1}) &= (1 + r^*_{t-1})(1 + rp_t), \quad rp_t = \chi \left(e^{-(D_t - D)} - 1 \right) \\
a_t &= \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t, \quad r^*_t = \rho_r r^*_{t-1} + v_t
\end{aligned}
$$

3.1.4. Estado estacionario

$$
\begin{aligned}
1 &= \beta (1 + r^f) \\
C^{-\sigma} W &= N^{\nu} \\
Y &= A K^{\alpha} N^{1-\alpha} \\
K &= I + (1 - \delta) K \\
1 &= \beta \left(\alpha \frac{Y}{K} + (1 - \delta) \right) \\
W &= (1 - \alpha) \frac{Y}{N} \\
Y - C - I &= -r^f D.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

- $1 + r^f = \beta^{-1}$,
- $\frac{Y}{K} = \frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha}$,
- $I = \delta K$,
- $\frac{Y}{N} = \left(\frac{Y}{K}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$,
- $W = (1-\alpha)\frac{Y}{N}$,
- de la restricción presupuestaria:
$$1 + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\frac{D}{Y} - \delta\frac{K}{Y} = \frac{C}{Y},$$
- de la condición de oferta de trabajo,
$$\left(\frac{C}{Y}\right)^{-\sigma}(1-\alpha)\left(\frac{Y}{N}\right)^{1+\nu} = Y^{\nu+\sigma}.$$

Luego, el modelo aproximado linealmente alrededor del estado estacionario está dado por:

$$\begin{aligned}
r_t^f &= \sigma\mathbb{E}_t(c_{t+1} - c_t), \quad r_t^f = r_t^* + rp_t, \quad rp_t = \chi d_t \\
w_t &= \nu n_t + \sigma c_t \\
y_t &= a_t + \alpha k_{t-1} + (1-\alpha)n_t \\
k_t &= \delta i_t + (1-\delta)k_{t-1} \\
0 &= \mathbb{E}_t\left[-\sigma(c_{t+1} - c_t) + \gamma(y_{t+1} - k_t)\right] \\
\gamma &= \frac{\alpha\frac{Y}{K}}{\alpha\frac{Y}{K} + (1-\delta)} \\
w_t &= y_t - n_t \\
y_t - \left(\frac{C}{Y}\right)c_t - \left(\frac{I}{Y}\right)i_t &= D\left(-\frac{d_t}{Y}\right) + D(1 + r_{t-1}^f)\left(\frac{d_{t-1}}{Y}\right) \\
a_t &= \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t, \quad r_t^* = \rho_r r_{t-1}^* + \nu_t.
\end{aligned}$$

3.1.5. Choque transitorio de la productividad

Si aumenta la productividad, sube el producto, sube la inversión, pero poco dada la naturaleza del choque, sube el consumo, pero sobre todo, hay más ahorro. La tasa de interés real cae por ese motivo. Como r_t^* no se mueve, rp_t debe caer. Finalmente, debe haber superávit, salida de capitales y acumulación de activos en el exterior. Entonces, hay un aumento en la balanza comercial: la correlación es positiva entre la balanza comercial y el producto. Tanto el salario como la oferta laboral aumentan dada la subida de la productividad. ¿Esto es bueno o malo? Por un lado podría invertirse más, pero mayor ahorro da mayor capacidad de respuesta.

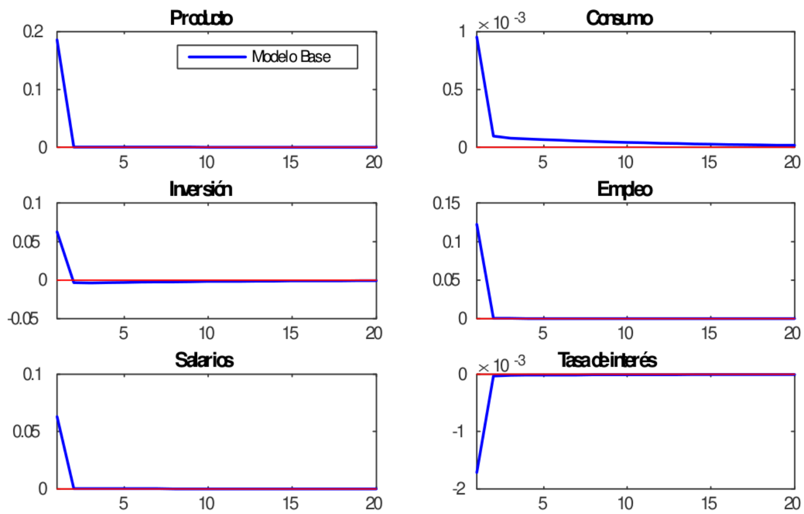

Figura 4: Choque transitorio de productividad.

3.1.6. Choque persistente de la productividad

El producto y el consumo aumentan en varios periodos, la inversión aumenta aún más, y la tasa de interés aumenta inicialmente. De este modo, debe caer la balanza comercial (el consumo y la inversión sobrepasan al producto), se acumula deuda para financiarse con el exterior. Pero entonces, uno está más vulnerable a un choque externo. Si la inversión es en el sector transable, el riesgo es menor. La correlación será en este caso negativa entre el producto y la balanza comercial.

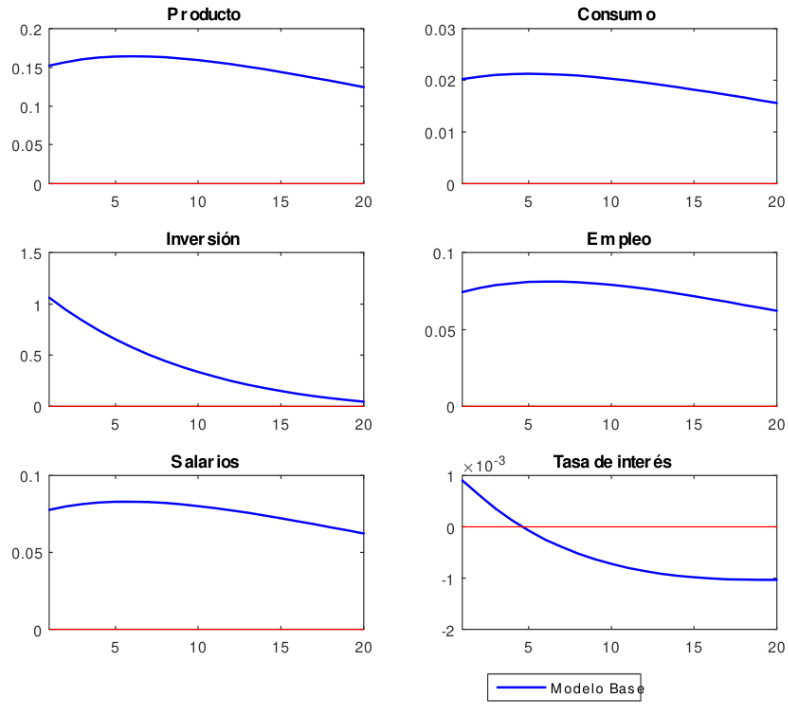

Figura 5: Choque persistente de productividad.

3.1.7. Choque de la tasa de interés externa

En este caso, el producto aumenta, pero la inversión y el consumo caen (menos demanda para invertir y más ahorro). El empleo sube (más oferta de trabajo y el producto está subiendo), los salarios caen (menos inversión es menor capital y esto es menor productividad del trabajo) y la tasa de interés real sube (pues al internacional sube). En resumen, las exportaciones suben. Por la ecuación de Euler, el consumo cae. Por la $Q-$ de Tobin, no es rentable invertir (el factor de descuento del retorno de la inversión es más alto). Pero como hay mayor ahorro, debe haber un superávit (se acumulan capitales en el exterior, lo cual es más atractivo dado que r_t^* aumenta). Para lograr eso, el trabajo debe subir (el empleo sube), y esto hace que el producto suba. El salario cae porque la productividad marginal cae (menos capital). Acá es importante que el bien que se transa es el mismo en todos lados.

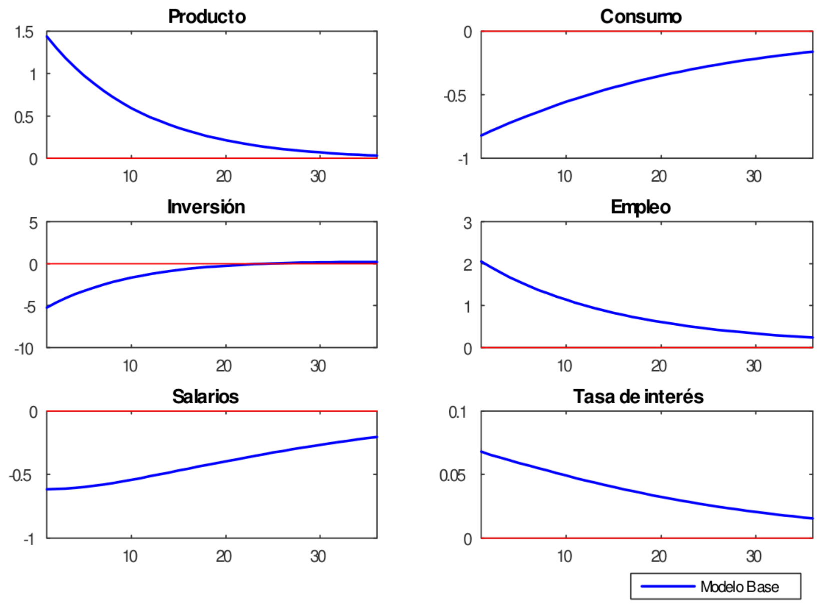

Figura 6: Choque de la tasa de interés externa.

3.2. El caso de dos bienes

- Ahora diferenciamos entre un bien que se produce domésticamente y otro que se exporta: $C_t = C_{H,t}^{\gamma} C_{F,t}^{1-\gamma}$.
- El bien H es el doméstico y F el exportado.

3.2.1. Familias

Ahora, el problema de las familias es

$$V_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\nu}}{1+\nu} \right) \right]$$
$$\text{s.a } \frac{P_{H,t}}{P_t} C_{H,t} + \frac{P_{F,t}}{P_t} C_{F,t} + e_t D_t = \frac{W_t}{P_t} N_t + (1 + r_{t-1}^f) D_{t-1} e_t + \frac{\Pi_t}{P_t}$$
$$(1 + r_{t-1}^f) = (1 + r_{t-1}^*)(1 + rp_t), \quad rp_t = \chi(e^{-(D_t - D)} - 1),$$

donde $e_t = \frac{P_t^*}{P_t} = \frac{P_{F,t}}{P_t}$ es el tipo de cambio, y $P_t = P_{H,t}^{\gamma} P_{F,t}^{1-\gamma}$.

Observación. Hay dos precios relativos, el precio $\frac{P_{H,t}}{P_t}$ y $\frac{P_{F,t}}{P_t} = e_t$.[8]

Las condiciones de primer orden están dadas por

$$
\begin{aligned}
C_{H,t} &= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\gamma} \frac{P_{F,t}}{P_t} C_t \\
C_{F,t} &= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma} \frac{P_{H,t}}{P_t} C_t \\
1 &= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma} (1 + r^f_{t-1}) \frac{e_{t+1}}{e_t} \right] \\
N_t^{\nu} &= \frac{W_t}{P_t} (C_t)^{-\sigma}.
\end{aligned}
$$

Demostración. Considere

$$
\begin{gathered}
\min_{C_{F,t}, C_{H,t} \geq 0} \left\{ \frac{P_{H,t}}{P_t} C_{H,t} + \frac{P_{F,t}}{P_t} C_{F,t} \right\} \\
\text{s.a } C_t = C_{H,t}^{\gamma} C_{F,t}^{1-\gamma}.
\end{gathered}
$$

El Lagrangiano viene dado por

$$
\mathscr{L} = \frac{P_{H,t}}{P_t} C_{H,t} + \frac{P_{F,t}}{P_t} C_{F,t} + \lambda (C_t - C_{H,t}^{\gamma} C_{F,t}^{1-\gamma}).
$$

Las CPO proveen

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{H,t}}{P_t} &= \lambda \gamma C_{H,t}^{\gamma-1} C_{F,t}^{1-\gamma} \\
\frac{P_{F,t}}{P_t} &= \lambda (1-\gamma) C_{H,t}^{\gamma} C_{F,t}^{-\gamma}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{H,t}}{P_{F,t}} &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{C_{F,t}}{C_{H,y}} \\
\frac{C_{H,t}}{C_{F,t}} &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{P_{F,t}}{P_{H,t}}
\end{aligned}
$$

[8] El tipo de cambio real es un precio relativo: cuánto cuesta el bien importado en unidades del nivel general de precios doméstico.

Luego,

$$\begin{aligned}
C_t &= C_{F,t}^{1-\gamma}\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{P_{F,t}}{P_{H,t}}C_{F,t}\right)^{\gamma} = C_{F,t}\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{P_{F,t}}{P_{H,t}}\right)^{\gamma}\\
C_{F,t} &= \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{P_{F,t}}{P_{H,t}}\right)^{\gamma-1} C_t\\
&= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{P_{H,t}}{P_{F,t}}\right)^{1-\gamma} C_t\\
C_{H,t} &= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{P_{F,t}}{P_{H,t}}\right)^{\gamma} C_t.
\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\left(\frac{P_{H,t}}{P_{F,t}}\right)^{1-\gamma} = \frac{P_{H,t}^{1-\gamma}P_{H,t}^{\gamma}}{P_{F,t}^{1-\gamma}P_{G,t}^{\gamma}} = \frac{P_{H,t}}{P_t}$$

llegamos a

$$C_{H,t} = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\gamma}\frac{P_{F,t}}{P_t}C_t \quad \text{y} \quad C_{F,t} = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}\frac{P_{H,t}}{P_t}C_t.$$

□

3.2.2. Firmas

Respecto a las firmas,

- Maximizan

$$\Pi_t = \frac{P_{H,t}}{P_t}Y_t - \frac{W_t}{P_t}N_t - I_t - \frac{\phi}{2}(K_t - K_{t-1})^2$$

  sujeto a que $Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$ y $K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}$.

- Las CPO aplicadas a

$$\Omega_t = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Pi_t$$

  proveen

$$\begin{aligned}
1 + \phi(K_t - K_{t-1}) &= \beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left\{\left(\alpha\frac{P_{H,t+1}}{P_{t+1}}\frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta)\right) + \phi(K_{t+1} - K_t)\right\}\right]\\
\frac{W_t}{P_t} &= (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}\frac{P_{H,t}}{P_t}.
\end{aligned}$$

- Usando estas condiciones de equilibrio,

$$\frac{P_{H,t}}{P_t}C_{H,t}+\frac{P_{f,t}}{P_t}C_{F,t}+K_t-(1-\delta)K_{t-1}+TB_t=\left(\frac{P_{H,t}}{P_t}\right)A_tK_{t-1}^{\alpha}L_t^{1-\alpha}-\frac{\phi}{2}(K_t-K_{t-1})^2$$

$$\underbrace{TB_t}_{\text{Trade Balance.}}=e_tD_t-(1+r_{t-1}^f)D_{t-1}e_t.$$

- Si definimos los términos de intercambio como $TI_t=\frac{P_{H,t}}{P_{F,t}}$, se sigue que $\frac{P_{H,t}}{P_t}=TI_t^{1-\gamma}$ y $\frac{P_{F,t}}{P_t}=e_t=TI_t^{-\gamma}$.

- El IPC es:

$$\frac{P_{H,t}}{P_t}C_{H,t}+\frac{P_{F,t}}{P_t}C_{F,t}.$$

3.2.3. Equilibrio

Las condiciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}
1&=\beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}(1+r_{t-1}^f)\frac{e_{t+1}}{e_t}\right]\\
N_t^{\nu}&=\frac{W_t}{P_t}C_t^{-\sigma}\\
1+\phi(K_t-K_{t-1})&=\beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left(\alpha TI_{t+1}^{1+\gamma}\frac{Y_{t+1}}{K_t}+(1-\delta)\right)-\phi(K_{t+1}-K_t)\right]\\
Y_t&=A_tK_{t-1}^{\alpha}N_t^{1-\alpha}\\
\frac{W_t}{P_t}&=(1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}TI_{t+1}^{1-\gamma}\\
C_t+K_t-(1-\delta)K_{t-1}+TB_t&=TI_t^{1-\gamma}A_tK_{t-1}^{\alpha}N_t^{1-\alpha}-\frac{\phi}{2}(K_t-K_{t-1})^2\\
TB_t&=e_tD_t-(1+r_{t-1}^f)D_{t-1}e_t\\
a_t&=\rho_a a_{t-1}+\varepsilon_t\\
r_t^*&=\rho_r r_t^*+v_t\\
t_{i,t}&=\rho_{t_i}t_{i,t-1}+\xi_t.
\end{aligned}$$

3.2.4. Estado estacionario

$$
\begin{aligned}
1 &= \beta(1+r^f) \\
N^\nu &= \frac{W}{P} C^{-\sigma} \\
1 &= \beta\left(\alpha TI^{1-\gamma}\frac{Y}{K} + (1-\delta)\right) \\
Y &= AK^\alpha N^{1-\alpha} \\
\frac{W}{P} &= (1-\alpha)\frac{Y}{N} TI^{1-\gamma} \\
TI^{1-\gamma}C_H + TI^\gamma C_F + \delta K + TB &= AK^\alpha N^{1-\alpha} \\
TB &= eD + (1+r^f)De \\
e &= TI^{-\gamma}.
\end{aligned}
$$

3.2.5. Calibración

Consideramos en el estado estacionario $TI = 1$, o sea $e = 1$, $1 = \beta(1+r^*)$, y $TB = D\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$. Se escoge $D = 0$ de modo que $TB = 0$. Luego,

- De la condición de optimalidad de la acumulación del capital

$$
1 = \beta\left(\alpha\frac{Y}{K} + (1-\delta)\right) \implies \frac{Y}{K} = \frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha}.
$$

- En el mercado de trabajo

$$
N^\nu = (1-\alpha)\frac{Y}{N}C^{-\sigma}.
$$

- De la balanza de pagos

$$
\frac{C}{K} + \delta = \left(\frac{N}{K}\right)^{1-\alpha}.
$$

- De la función de producción:

$$
\frac{Y}{N} = \left(\frac{K}{N}\right)^\alpha = \left(\frac{Y}{K}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.
$$

3.2.6. Log-linealización

$$
\begin{aligned}
r_t^f &= \sigma \mathbb{E}_t(c_{t+1} - c_t) \\
r_t^f &= r_t^* + rp_{t+1} \\
rp_t &= \chi d_t \\
y_t &= a_t + \alpha k_{t-1} + (1-\alpha) n_t \\
k_t &= \delta i_t + (1-\delta) k_{t-1} \\
w_t &= \nu n_t + \sigma c_t \\
w_t &= y_t - n_t + (1-\gamma) t_{i,t} \\
\phi(k_t - k_{t-1}) &= \mathbb{E}_t u_{c,t+1} - u_{c,t} + \eta\left(\mathbb{E}_t y_{t+1} + (1-\gamma)\mathbb{E}_t t_{i,t+1} - k_t\right) - \phi\left(\mathbb{E}_t k_{t+1} - k_t\right) \\
(1-\gamma) t_{i,t} + y_t - \left(\frac{C}{Y}\right) c_t - \left(\frac{I}{Y}\right) i_t &= tb_t \\
e_t &= -\gamma t_{i,t} \\
tb_t &= \frac{1-\beta}{\beta} e_t + d_t - \frac{1}{\beta} d_{t-1} - \frac{1}{\beta} r_{t-1}^f \\
a_t &= \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t \\
r_t^* &= \rho_r r_{t-1}^* + \nu_t \\
t_{i,t} &= \rho_{t_i} t_{i,t-1} + \zeta_t .
\end{aligned}
$$

3.2.7. Choque de los términos de intercambio

Un aumento de los términos de intercambio hace que el producto, consumo e inversión aumenten. La balanza de comercial se vuelve inicialmente deficitaria y la tasa de interés aumenta también pues al aumenta la deuda con el exterior aumenta rp_t. Los TI más altos hacen más rentable invertir, el cual se financia con el exterior (endeudamiento). El alza en el empleo se justifica por la mayor demanda y se espera un incremento en los salarios dado que la productividad del trabajo es mayor (más capital). Se observa una similitud con un choque de productividad persistente.

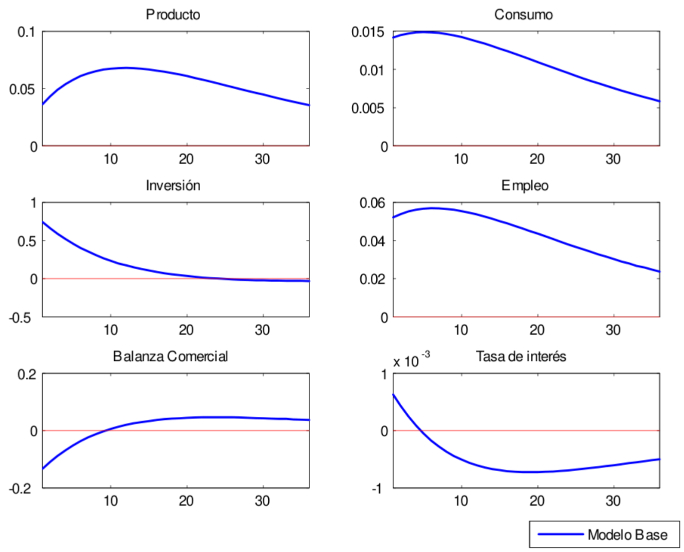

Figura 7: Choque de los términos de intercambio.

Si el choque fuese temporal:

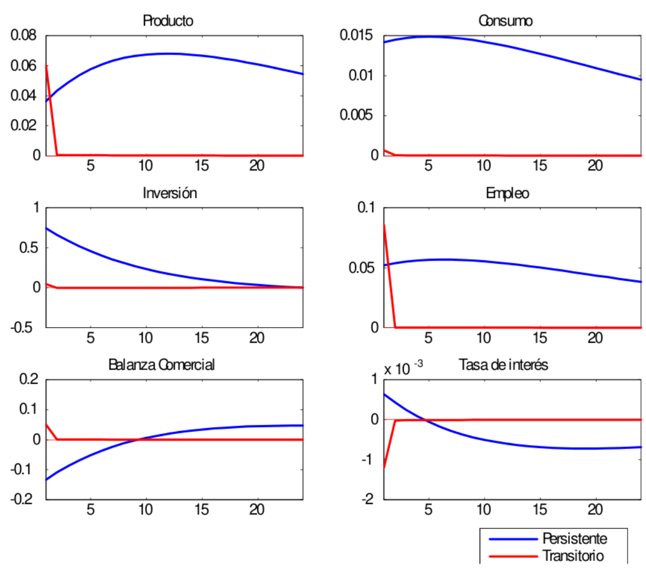

Figura 8: Choque de los términos de intercambio transitorio.

La inversión casi no sube, de modo que la balanza comercial en realidad sube (no se endeuda) y por lo tanto, la tasa de interés cae (además hay más ahorro). De este modo, la correlación negativa entre los TIT y el producto es solo cuando el choque es persistente. Cuando I sube, K también, por lo que el trabajo es más productivo, y eso explica que los salarios suban.

3.2.8. Choque de la tasa de interés externa

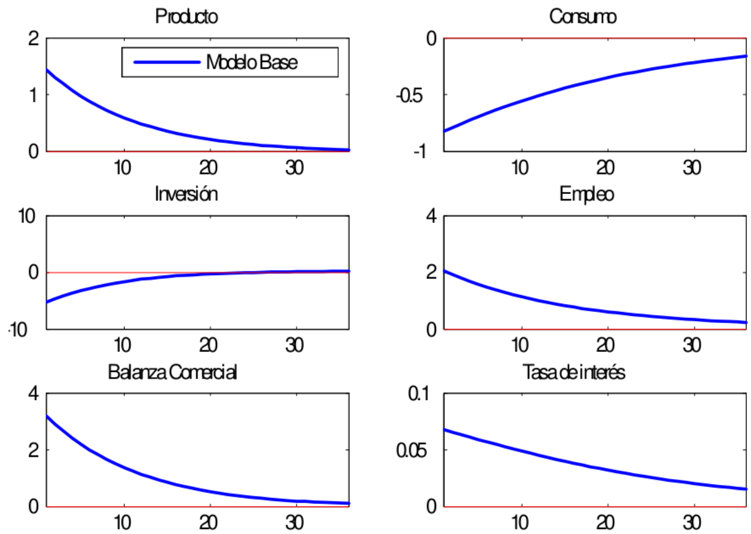

Figura 9: Choque de la tasa de interés externa.

- Y sube: Inicialmente puede haber una reasignación eficiente de recursos o una mejora en términos de intercambio que empuja el producto, pero luego la contracción por el mayor costo financiero domina, y el producto converge a un nuevo equilibrio más bajo. Esto se expresa vía la balanza comercial.

- El consumo cae (ecuación de Euler).

- La inversión cae ($Q-$de Tobin).

- El empleo sube pues como K y A no aumentan, solo se puede producir más con K.

- Es más caro importar, por lo que la balanza comercial sube.

- La tasa de interés sube por que r_t^*. El suavizamiento y caída posterior se debe al efecto de la deuda.

- Se espera que los salarios caigan pues el trabajo es menos productivo.

- La prima de riesgo se mueve de acuerdo con la deuda, que en este caso, será menor.

3.3. Modelo MX de Uribe

El modelo considera una economía con tres tipos de bienes, uno exportable (x), uno importable (m) y uno de consumo final (c). El modelo se usa para ilustrar el rol que juegan los términos de intercambio en economías pequeñas y abiertas cuyas exportaciones se concentran en materia primas. Por ende, hay una sustitución muy baja entre el bien importable y exportable.

3.3.1. Las familias

Las familias maximizan la siguiente función de utilidad:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, h_t^m, h_t^x),$$

donde c_t representa el consumo de bienes finales, h_t^m el número de horas trabajadas en el sector de bienes importables (pensemos por ejemplo en textiles que se producen localmente y también se importan) y h_t^x el número de horas trabajadas en el sector productor de materias primas (exportables, no se importan estas). Luego, la restricción presupuestaria de las familias es para todo t:

$$c_t + \underbrace{i_t^m + i_t^x}_{\text{inversión}} + \underbrace{\phi_m(k_{t+1}^m - k_t^m) + \phi_x(k_{t+1}^x - k_t^x)}_{\text{costos de ajuste}} + d_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_t} + w_t^m h_t^m + w_t^x h_t^x + u_t^m k_t^m + u_t^x k_t^x. \tag{15}$$

De (15) notamos que las familias son propietarias del capital y cobran u_t^m, u_t^x (pensemos por ejemplo que poseen las flotas de camiones que van a la mina/Gamarra). Asimismo, en (15), d_{t+1} es el valor de un bono descontado. La elección de las familias también se restringe por la dinámica (acumulación) del capital:

$$k_{t+1}^m = i_t^m + (1-\delta)k_t^m$$
$$k_{t+1}^x = i_t^x + (1-\delta)k_t^x.$$

Luego, las condiciones de primer orden aplicadas a

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U(c_{t+k}, h_{t+k}^m, h_{t+k}^x) + \beta^k \lambda_{t+k} RP_{t+k}.$$

Donde

$$
\begin{aligned}
RP_{t+k} = \frac{d_{t+k+1}}{1+r_{t+k}} &+ w^m_{t+K}h^m_{t+k} + w^x_{t+k}h^x_t + u^m_{t+k}k^m_{t+k} + u^x_{t+k}k^x_{t+k} \\
&- c_{t+k} - i^m_{t+k} - i^x_{t+k} - \phi_m(k^m_{t+k+1} - k^m_{t+k}) - \phi_x(k^x_{t+k+1} - k^x_{t+k}) - d_{t+k}
\end{aligned}
$$

son simplemente

$$
\begin{aligned}
U_1(c_t, h^m_t, h^x_t) &= \lambda_t && (16) \\
-U_2(c_t, h^m_t, h^x_t) &= \lambda_t w^m_t && (17) \\
-U_3(c_t, h^m_t, h^x_t) &= \lambda_t w^x_t. && (18)
\end{aligned}
$$

La ecuación 16 determina la utilidad marginal del consumo, y 17-18 determinan las condiciones de optimalidad de la oferta de trabajo en cada sector productivo. Se sigue que las respectivas condiciones de Euler, en c e i (que se traduce por derivar en d y k) son:

$$
\begin{aligned}
\lambda_t &= \beta(1+r_t)\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}] && (19) \\
\lambda_t(1+\phi'_{m,t}) &= \beta\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}(u^m_{t+1} + 1 - \delta + \phi'_{m,t+1})] && (20) \\
\lambda_t(1+\phi'_{x,t}) &= \beta\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}(u^x_{t+1} + 1 - \delta + \phi'_{x,t+1})]. && (21)
\end{aligned}
$$

La primera condición (19) determina la demanda óptima de consumo, mientras que las dos condiciones siguientes (20) - (21) las demandas óptimas de inversión en cada sector.

3.3.2. Productor

Los bienes finales se producen utilizando la siguiente función de producción que agrega bienes exportables e importables

$$
\underbrace{A(a^m_t, a^x_t)}_{\text{Absorción, función de producción.}} \qquad -p^m_t a^m_t - p^x_t a^x_t.
$$

Las CPO proveen

$$
\begin{aligned}
A_1(a^m_t, a^x_t) &= p^m_t \\
A_2(a^m_t, a^x_t) &= p^x_t.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, los bienes exportables se producen combinando capital y trabajo:

$$y_t^x = F^x(k_t^x, h_t^x).$$

Las condiciones de primer orden son en este caso

$$p_t^x F_1^x(k_t^x, h_t^x) = u_t^x$$
$$p_t^x F_2^x(k_t^x, h_t^x) = w_t^x.$$

Finalmente, los bienes importables se producen también combinando capital y trabajo:

$$y_t^m = F^m(k_t^m, h_t^m).$$

Las condiciones de primer orden son en este caso

$$p_t^m F_1^m(k_t^m, h_t^m) = u_t^m$$
$$p_t^m F_2^m(k_t^m, h_t^m) = w_t^m.$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Capital } k_t^m & & \text{Capital } k_t^x \\
+ & & + \\
\text{Trabajo } h_t^m & & \text{Trabajo } h_t^x \\
\downarrow & & \downarrow \\
F^m(k_t^m, h_t^m) & & F^x(k_t^x, h_t^x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
y_t^m \to a_t^m & & y_t^x \to a_t^x \\
& \downarrow & \\
& \boxed{\text{Absorcion: } A(a_t^m, a_t^x)} & \\
& \downarrow & \\
& \textbf{Consumo Final: } c_t &
\end{array}$$

3.3.3. Equilibrio y definiciones

Recordemos que la economía produce y y usa a.

$$c_t + i_t^m + i_t^x + \phi_m(k_{t+1}^m - k_t^m) + \phi_x(k_{t+1}^x - k_t^x) = A(a_t^m, a_t^x)$$

y

$$m_t = p_t^m(a_t^m - y_t^m)$$
$$x_t = p_t^x(y_t^x - a_t^x).$$

La balanza de pagos está dada por

$$\frac{d_{t+1}}{1+r_t} = d_t + m_t - x_t$$

y la prima por riesgo es

$$r_t - r^* = p(d_{t+1}).$$

También, $tot_t = \frac{p_t^x}{p_t^m}$ son los términos de intercambio, con ley de movimiento

$$\ln\left(\frac{tot_t}{tot}\right) = \rho \ln\left(\frac{tot_{t-1}}{tot}\right) + \epsilon_t^{tot}. \tag{22}$$

En (22), tot denota el EE.

3.3.4. Formas funcionales

Las especificaciones son tipo Cobb-Douglas y CES:

$$U(c, h^m, h^x) = \frac{[c - G(h^m, h^x)]^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$
$$G(h^m, h^x) = \left(\frac{h^m}{\omega^m}\right)^{\omega_m} + \left(\frac{h^x}{\omega^x}\right)^{\omega_x}$$
$$F(k^m, h^m) = A^m(k^m)^{\alpha_m}(h^m)^{1-\alpha_m}$$

$$F(k^x, h^x) = A^x(k^x)^{\alpha_x}(h^x)^{1-\alpha_x}$$
$$A(a^m, a^x) = \left[\chi(a^m)^{1-\frac{1}{\mu}} + (1-\chi)(a^x)^{1-\frac{1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\mu}}}$$
$$\phi_i(x) = \frac{\phi_i}{2}x^2$$
$$p(d) = \overline{p} + \psi\left(e^{-(d-\overline{d})} - 1\right)$$

3.3.5. Incremento de los términos de intercambio

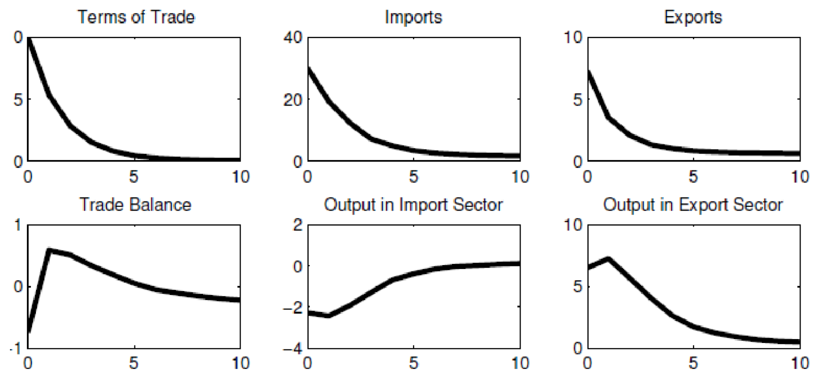

Figura 10: Choque de los términos de intercambio.

Figura 11: Choque de los términos de intercambio.

Figura 12: Choque de los términos de intercambio.

Sube p_x en relación a p_m, por lo tanto:

- Automáticamente, por definición, suben los términos de intercambio.
- Las importaciones suben: es más barato que producir localmente.
- Las exportaciones suben: es más provechoso importar pues el precio de x sube más en comparación al de m.
- La balanza comercial cae: la importaciones suben más que las exportaciones.
- La producción del sector importador cae: es menos provechoso producir en ese sector.
- La producción en el sector exportador sube: es más provechoso producir en ese sector.
- La inversión total sube: efecto neto del alza de la inversión en el sector exportador y la baja en el sector importador.
- La inversión en el sector importador cae: es menos provechoso este sector.
- La inversión en el sector exportador sube: es más provechoso este sector.
- El producto sube: hay más demanda.
- El empleo en el sector importador cae: dado que cae la producción en dicho sector.
- El empleo en el sector exportador sube: dado que sube la producción en dicho sector.
- El consumo sube: hay mayor demanda.
- La absorción de importables sube: es más barato ese insumo.
- La absorción de exportables cae: es más caro ese insumo.
- La deuda externa sube: debido a la balanza comercial.
- El salario en el sector importador cae: es menos productivo el trabajo.
- El salario en el sector exportador sube: es más productivo el trabajo.

En conclusión, el sector importador se encoge pues la importación sustituye y se financia con las exportaciones.

El parámetro μ es la elasticidad de sustitución para producir bienes domésticos entre importables y exportables. A mayor μ, más se va a sustituir.

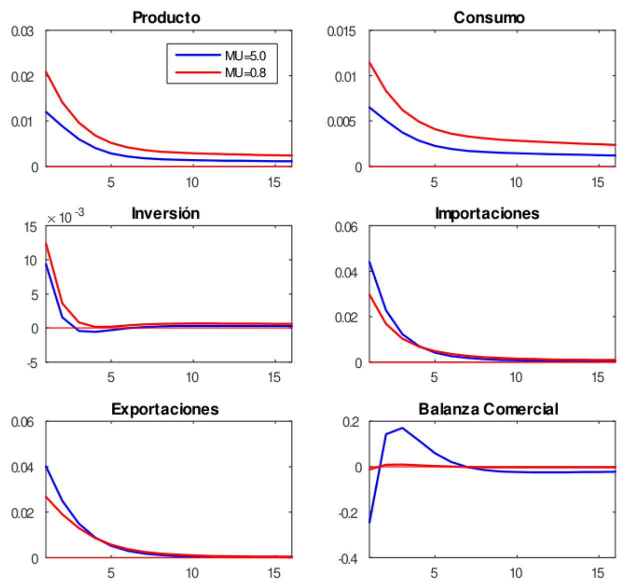

Figura 13: Choque de la tasa de interés internacional.

- El producto crece un poco menos pues se va a producir más lo que tiene menos precio por el efecto sustitución.
- El consumo sube un poco menos cuando μ es grande por el diferencial de ingreso cuando μ es bajo.
- No sube tanto pues el alza en al inversión en x no es tan grande.
- Las importaciones suben más pues los bienes son más sustitutos.
- Las exportaciones suben más pues a_t^x está cayendo más, p_x sube, i.e. $p^x(y - a_x)$ sube más.
- La balanza comercial con μ alto es más negativa.

En general, a mayor μ mayor efecto en el comercio y menor efecto interno (menos consumo etc.).

3.3.6. Choque de la tasa de interés real

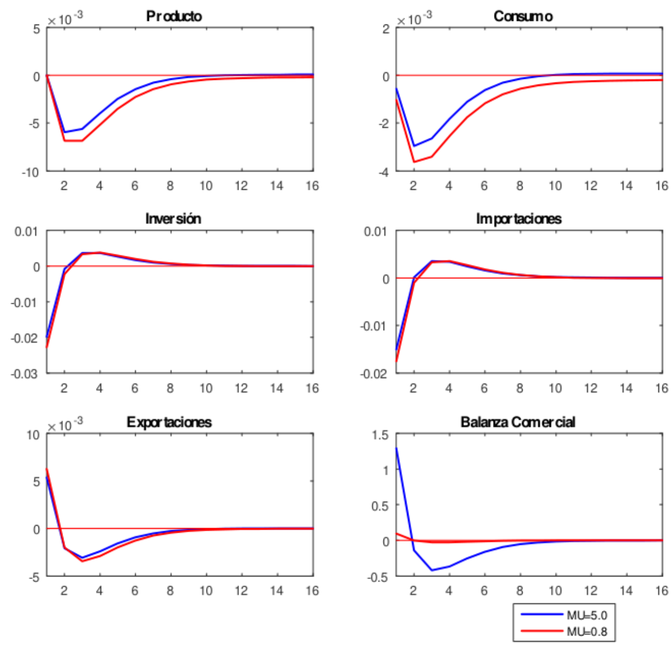

Figura 14: Choque de la tasa de interés.

Recordemos que El producto es la suma ponderada de los producido

$$\sum_i p_i y_i = p^x y^x + p^m y^m.$$

- Cuando sube la tasa de interés, cae el consumo por la ecuación de Euler,
- cae la inversión por la Q de Tobin.
- Caen a_x, a_m pues cae c.
- La demanda doméstica se contrae más fuerte de lo que cae la producción: se exporta más.
- Las exportaciones aumentan pero no lo suficiente para compensar la caída del consumo y al inversión.
- La demanda interna jala todos los componentes de la demanda agregada.
- Para un μ alto, nuevamente, el efecto interno no es tan fuerte como el externo.

Cuando sube la tasa de interés internacional, el efecto sobre el producto depende del tamaño y la integración financiera de la economía. En economías pequeñas y abiertas, como las emergentes, el alza encarece el financiamiento externo, contrae el consumo y la inversión, genera salida de capitales y deprecia la moneda, lo que lleva a una caída del producto. En cambio, en economías grandes y financieramente desarrolladas, como Estados Unidos, el aumento de la tasa puede atraer capitales, apreciar la moneda y redirigir el gasto global hacia su producción. En este caso, el efecto contractivo sobre la inversión puede verse compensado —o incluso superado— por un aumento en el ingreso real y una mayor absorción de demanda externa, lo que permite que el producto suba transitoriamente.

3.3.7. Choque de la productividad en el sector transable

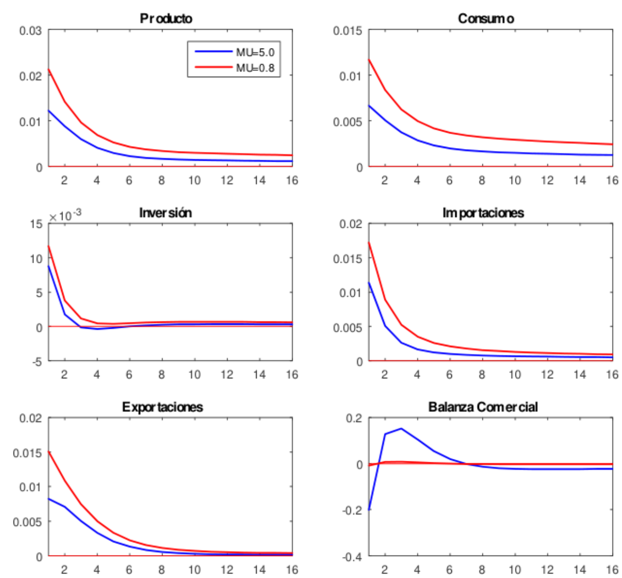

Figura 15: Choque de la productividad en el sector transable.

- Como sube la productividad en el sector x, sube automáticamente y^x, lo que hace subir la producción total.

- El consumo sube pues con mayor ingreso generado en el sector exportador, el país tiene más recursos disponibles. Esto permite mayor consumo privado, tanto de bienes domésticos como importados. La ecuación de Euler permite este aumento porque el ingreso presente sube y la restricción intertemporal se relaja.

- La inversión sube pues el capital en el sector x es más rentable.
- Parte del aumento en consumo se destina a bienes importados. La expansión económica también genera demanda intermedia e inversión que requiere bienes importados.
- Las exportaciones suben pues se produce más de x.
- La balanza comercial cae pues las importaciones suben aún más: porque el mayor ingreso impulsa más el consumo total, y gran parte de ese consumo adicional se destina a bienes importados.
- $p_t^x \downarrow$, $a_t^x \uparrow$, por el choque $y_t^x \uparrow$, y así x no cambia mucho.

3.4. Conclusiones

- En el modelo 2: Un choque de TIT es similar a un choque de productividad.
- En los dos primeros modelos: si sube r_t^*, entonces, la inversión y el consumo caen, pero Y sube por la correlación negativa con la balanza comercial y la posibilidad de endeudamiento.
- En el modelo MX de Uribe, cuando la tasa de interés internacional sube, el producto sí cae.

4. Ciclos crediticios

- La existencia de restricciones de crédito en economías abiertas se refleja en la dinámica de los flujos de capitales.
- En economías abiertas con mercados financieros perfectos, los flujos de capitales son contra-cíclicos: reflejan la suavización del consumo agregado.
- En economías con restricciones de crédito. los flujos de capitales son pro-cíclicos, es decir, son más abundantes cuando la economía doméstica crece a tasas altas, y son menores cuando la economía crece a tasas bajas.
- Consecuencias de las restricciones de crédito: (i) equilibrio ineficiente, (ii) la distribución de la riqueza importan (iii) valoración de colaterales importante, más deuda igual más inversión, (iv) apalancamiento de la deuda.

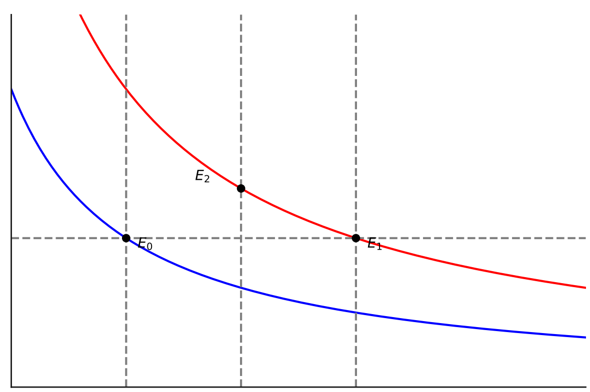

Figura 16: Aumento de la productividad con restricciones de liquidez.

La figura 16 ilustra cómo una economía enfrenta una restricción de liquidez tras un aumento en la productividad marginal del capital. Inicialmente, el equilibrio se encuentra en $E_0 = (K_t^*, r_t^*)$, donde la productividad marginal del capital iguala la tasa de interés $r_t^* = 1$. Un shock positivo de productividad desplaza la curva hacia arriba (curva roja), generando un nuevo equilibrio deseado en $E_1 = (\tilde{K}_t^*, r_t^*)$, con mayor capital óptimo. Sin embargo, debido a restricciones financieras, el capital no puede superar un umbral $\overline{K} \in (K_t^*, \tilde{K}_t^*)$, por lo que el equilibrio efectivo se alcanza en E_2. Este punto refleja un nivel de inversión subóptimo, donde la productividad marginal del capital excede la tasa de interés, evidenciando la distorsión generada por la restricción de liquidez.

4.1. Javier Bianchi (2011, American Economic Review) Overborrowing and Systemic Externalities

A raíz de la crisis financiera global de 2008, surgieron intensos debates sobre la necesidad de reformar el sistema financiero internacional, centrándose especialmente en el problema del sobreendeudamiento (overborrowing). El artículo de Bianchi (2011) presenta un análisis riguroso —teórico y cuantitativo— de cómo decisiones de endeudamiento óptimas a nivel individual pueden conducir a un exceso de endeudamiento a nivel agregado, generando crisis financieras.

Bianchi construye un modelo de equilibrio general dinámico y estocástico (DSGE) con restricciones de crédito ocasionalmente vinculantes, donde la deuda está colateralizada por la producción de bienes transables y no transables. Debido a fricciones financieras y mercados incompletos, los agentes no pueden cubrirse completamente contra shocks adversos. Cuando un shock negativo golpea a una economía altamente endeudada, la caída en el consumo presiona a la baja el precio relativo de los bienes no transables, lo que deprime el tipo de cambio real y agrava la restricción crediticia. Esto genera un mecanismo amplificador similar al canal de deflación por deuda de Fisher. Aunque los agentes forman expectativas racionales, no internalizan el efecto de sus decisiones de deuda sobre los precios de equilibrio, como el tipo de cambio real. Esta externalidad pecuniaria no sería problemática si no existieran restricciones financieras ligadas a precios de mercado, pero en este contexto lleva a un sobreendeudamiento ex ante. Un planificador social que enfrenta las mismas restricciones pero internaliza estos efectos elegiría un menor nivel de deuda, reduciendo la severidad de las crisis.

La evaluación cuantitativa del modelo muestra que esta externalidad incrementa la probabilidad de crisis financieras (de 0.4 % a 5.5 % en el largo plazo), y amplifica sus efectos: en equilibrio descentralizado, el consumo cae un 17 %, los flujos de capital un 8 %, y el tipo de cambio real se deprecia un 19 % durante una crisis típica. En contraste, en el equilibrio eficiente restringido, la caída del consumo es del 10 % y el tipo de cambio apenas se ajusta. El artículo también evalúa medidas de política para corregir esta externalidad, como impuestos al endeudamiento, requisitos de capital o márgenes más estrictos, que deben aplicarse ex ante para inducir a los agentes a internalizar los costos sociales del endeudamiento. Según la calibración, una política óptima requeriría elevar el costo efectivo del crédito en aproximadamente 5 % en promedio.

4.2. El modelo

Las preferencias vienen dadas por

$$\mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right] \tag{23}$$

con $u(\cdot)$ la función de utilidad CRRA y la canasta de consumo es un agregador CES tipo Armington con elasticidad de sustitución $1/(1+\eta)$:

$$c_t = \left[\omega (c_t^T)^{-\eta} + (1-\omega)(c_t^N)^{-\eta} \right]^{-1/\eta},$$

$\eta > -1$, $\omega \in (0,1)$.

- En cada periodo los individuos reciben dotaciones aleatorias de bienes transables y_t^T y no transables y_t^N, con $(y_t^T, y_t^N) \in Y \subset \mathbb{R}^2_{++}$ y tal que siguen un proceso de Markov de primer orden. Esta es la única fuente de incertidumbre del modelo.

- El menú de activos extranjeros disponibles está restringido a un bono de un período, no contingente al estado, denominado en unidades de bienes transables, que paga una tasa de interés fija r determinada exógenamente en el mercado mundial. Normalizando el precio de los bienes transables a 1 y denotando por p_N el precio de los bienes no transables, la restricción presupuestaria es:

  $$b_{t+1} + c_t^T + p_t^N c_t^N = b_t(1+r) + y_t^T + p_t^N y_t^N,$$

  donde b_{t+1} es la cantidad de activos externos netos que la economía mantiene al inicio del periodo t. El agente puede consumir bienes transables y no transables, y decidir cuánto ahorrar o endeudarse para el futuro. Lo hace respetando que el valor de su gasto total no puede exceder sus ingresos más el retorno de activos (o deuda) previos.

- Los acreedores restringen los préstamos de modo que el nivel de deuda no puede exceder una fracción κ_N del ingreso por bienes no transables y una fracción κ_T del ingreso por bienes transables. Específicamente, la restricción de crédito está dada por:

  $$b_{t+1} \geq -(\kappa_N p_t^N y_t^N + \kappa_T y_t^T). \tag{24}$$

Cuando $b_t < 0$, hay deuda. Los parámetros $\kappa^j \in (0,1)$ se deben a la incertidumbre. Esta restricción de crédito puede interpretarse como el resultado de fricciones institucionales e informacionales que afectan las relaciones crediticias (como costos de monitoreo, incumplimiento limitado, información asimétrica o imperfecciones del sistema judicial), aunque estas fricciones no se modelan de forma explícita. El análisis se enfoca en cómo ciertas políticas financieras pueden mejorar el bienestar, tomando dichas fricciones como dadas. En este sentido, el planificador social considerado también está sujeto a esta restricción de crédito.

Observación. El modelo introduce dos desviaciones clave respecto a un entorno de mercados completos:

- **Activos limitados:** se restringe el acceso a un bono no contingente de un período, denominado en bienes transables. Aunque en la práctica los agentes pueden acceder a una gama más amplia de instrumentos financieros, esta simplificación refleja el hecho estilizado de que la deuda en economías emergentes suele ser de corto plazo y en moneda extranjera, lo que aumenta su vulnerabilidad (ver Calvo, Izquierdo y Loo-Kung, 2006).

- **Restricción de crédito:** en ausencia de esta restricción, los hogares se endeudarían más en recesiones para suavizar el consumo, lo que generaría predicciones contrafactuales (como un deterioro de la cuenta corriente en crisis). La restricción impuesta tiene dos características fundamentales:

  - Los *bienes no transables* forman parte del colateral, lo cual es consistente con la evidencia de que los booms de crédito en este sector suelen estar financiados externamente (Tornell y Westermann, 2005). Además, teóricamente, esto se justifica porque los acreedores pueden apropiarse de estos bienes, venderlos localmente y repatriar los fondos.

  - El colateral se basa en el *ingreso corriente*, respaldado por evidencia empírica (Jappelli, 1990), y justificado teóricamente por entornos donde los hogares pueden desviar ingresos futuros, pero los acreedores solo pueden reclamar una fracción del ingreso actual (Korinek, 2009a).

Las condiciones de primer orden de las familias son:[9]

$$\lambda_t = u_{c^T,t} \tag{25}$$

$$p_t^N = \frac{1-\omega}{\omega}\left(\frac{c_t^T}{c_t^N}\right)^{1+\eta} \tag{26}$$

$$\lambda_t = \beta(1+r)\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}] + \mu_t \tag{27}$$

$$b_{t+1} + (\kappa^N p_t^N y_t^N + \kappa^T y_t^T) \geq 0 \;\text{ con igualdad si } \mu_t > 0 \tag{28}$$

$$c_t^N = y_t^N \tag{29}$$

$$c_t^T = y_t^T + b_t(1+r) - b_{t+1}. \tag{30}$$

Observación. Un incremento de y_t^T hace que c_t^T suba y a su vez p_t^N. Pero entonces, es posible subir la deuda, i.e. b_{t+1} más negativo, de forma que c_t^T aumenta aún más.

Combinando las ecuaciones de equilibrio:

$$p_t^N = \frac{1-\omega}{\omega}\left(\frac{c_t^T}{y_t^N}\right)^{1+\eta}$$

$$u_{c,t} = \beta(1+r)\mathbb{E}_t[u_{c,t+1}] + \mu_t.$$

Observación. Cuando $\eta \to 0$ (caso Cobb-Douglas):

$$c_t = (c_t^T)^{\omega}(y_t^N)^{1-\omega}.$$

4.3. Estado estacionario

Considerando $\eta = 0$

$$p^N = \frac{1-\omega}{\omega}\left(\frac{c^T}{y^N}\right)$$

$$u_c = \beta(1+r)u_c + \mu$$

$$b + (\kappa^N p^N y^N + \kappa^T y^T) = 0$$

$$c = (c^T)^{\omega}(y^N)^{1-\omega}$$

$$c^T = y^T + br.$$

[9] Se deduce de $\frac{c_t^T}{c_t^N} = \left[\frac{\omega}{1-\omega}p_t^N\right]^{\frac{1}{1+\eta}}$,‘ que surge de minimizar $p_t^N c_t^N + c_t^T$ sujeto a que $c_t = [\omega(c_t^T)^{-\eta} + (1-$

Así,

$$
\begin{aligned}
c^T &= y^T - r\left(\kappa^N \frac{1-\omega}{\omega} c^T + \kappa^T y^T\right) \\
&= \frac{(1 - r\kappa^T)}{\left(1 + \kappa^N \frac{1-\omega}{\omega}\right)} y^T \\
b &= \frac{y^T - c^T}{r} \\
c &= (c^T)^{\omega} (y^N)^{1-\omega}.
\end{aligned}
$$

4.4. Planificador central

Denotamos por $\Gamma(\cdot)$ la expectativa formada sobre la poseción agregada de bonos en cada estado agregado (B, y), es decir, $B' = \Gamma(B, y)$. Combinando las condiciones de equilibrio (26), (29) y (30), la función de precios esperados para bienes no transables se puede expresar como:

$$
p^N(B, y) = \frac{1-\omega}{\omega} \cdot \left(\frac{y^T + B(1+r) - \Gamma(B, y)}{y^N}\right)^{\eta+1}.
$$

Las otras variables de estado relevantes para el hogar individual son su propia tenencia de bonos b y el vector de dotaciones $y = (y^T, y^N)$. El problema de optimización del hogar representativo se puede escribir como:

$$
V(b, B, y) = \max_{b', c^T, c^N} u(c(c^T, c^N)) + \beta \mathbb{E}_{y'|y} \left[V(b', B', y')\right] \tag{31}
$$

sujeto a:

$$
b' + p^N(B, y)c^N + c^T = y^T + b(1+r) + p^N(B, y)y^N \tag{32}
$$

$$
b' \geq -\left(\kappa^N p^N(B, y) y^N + \kappa^T y^T\right) \tag{33}
$$

$$
B' = \Gamma(B, y). \tag{34}
$$

Las variables actuales se denotan sin apóstrofe, y las variables del próximo período con el símbolo de apóstrofe.

La solución al problema del hogar determina funciones de decisión para la posesión de bonos $\hat{b}(b, B, y)$, el consumo de bienes transables $\hat{c}^T(b, B, y)$ y no transables $\hat{c}^N(b, B, y)$. El

$\omega)(c_t^N)^{-\eta}]^{-1/\eta}$.

problema de optimización induce una correspondencia entre la ley de movimiento anticipada para la tenencia agregada de bonos y la ley efectiva inducida por la decisión del agente representativo $\hat{b}(b, B, y)$. En un equilibrio de expectativas racionales, estas dos leyes de movimiento deben coincidir.

4.5. Equilibrio

Definición 4. Equilibrio Competitivo Recursivo Descentralizado. Un *equilibrio competitivo recursivo descentralizado* para esta economía pequeña y abierta (SOE) está definido por:

- una función de precios $p^N(B, y)$,
- una ley de movimiento anticipada $\Gamma(B, y)$,
- reglas de decisión $\left\{\hat{b}(b, B, y),\ \hat{c}^T(b, B, y),\ \hat{c}^N(b, B, y)\right\}$,
- y una función de valor asociada $V(b, B, y)$,

tales que se cumplen las siguientes condiciones:

(i) **Optimización del hogar:** las funciones $\left\{\hat{b}(b, B, y),\ \hat{c}^T(b, B, y),\ \hat{c}^N(b, B, y),\ V(b, B, y)\right\}$ resuelven el problema recursivo del hogar dado $p^N(B, y)$ y $\Gamma(B, y)$.

(ii) **Condición de expectativas racionales:** la ley de movimiento anticipada coincide con la efectiva:
$$\Gamma(B, y) = \hat{b}(b, B, y).$$

(iii) **Equilibrio de mercado:** se satisfacen las condiciones de cierre:
$$y^N = \hat{c}^N(b, B, y) \quad \text{y} \quad \Gamma(B, y) + \hat{c}^T(b, B, y) = y^T + B(1 + r).$$

4.6. Eficiencia

Sea $\{c_t^T, c_t^N, b_{t+1}\}_{t\geq 0}$ la asignación en equilibrio competitivo que genera utilidad $\hat{V}$. El equilibrio competitivo es *eficiente restringido* si un planificador social que elige directamente $\{b_{t+1}\}_{t\geq 0}$ sujeto a la restricción de crédito, pero permite que los mercados de bienes se despejen competitivamente, no puede mejorar el bienestar de los hogares por encima de $\hat{V}$.

El planificador social maximiza la utilidad agregada sujeto a las condiciones (23), (28), (29) y (29). Sustituyendo el precio de equilibrio dado por la ecuación (26), el problema recursivo del planificador se expresa como:

$$V(b, y) = \max_{b', c^T} u(c(c^T, y^N)) + \beta \mathbb{E}_{y'|y} [V(b', y')] \tag{35}$$

sujeto a:

$$c^N = y^N \tag{36}$$

$$b' + c^T = y^T + b(1 + r) \tag{37}$$

$$b' \geq - \left(\kappa^N \frac{1 - \omega}{\omega} \left(\frac{c^T}{y^N} \right)^{\eta + 1} y^N + \kappa^T y^T \right) \tag{38}$$

Utilizando notación secuencial y el superíndice "*sp*" para distinguir al planificador social del equilibrio descentralizado, las condiciones de primer orden son:

$$\lambda_t^{sp} = u_T(t) + \mu_t^{sp} \Psi_t \tag{39}$$

$$\lambda_t^{sp} = \beta(1 + r)\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}^{sp}] + \mu_t^{sp} \tag{40}$$

$$b_{t+1} + \left(\kappa^N \frac{1 - \omega}{\omega} \left(\frac{c_t^T}{y_t^N} \right)^{\eta + 1} y_t^N + \kappa^T y_t^T \right) \geq 0, \quad \text{con igualdad si } \mu_t^{sp} > 0 \tag{41}$$

donde:

$$\Psi_t \equiv \kappa^N \left(\frac{p_t^N c_t^N}{c_t^T} \right) \cdot \frac{1}{1 + \eta} > 0$$

indica cuánto cambia el valor del colateral ante una variación en el consumo de bienes transables en equilibrio. Este término es proporcional a la fracción de output no transable que puede usarse como colateral, al tamaño relativo del sector no transable, e inversamente a la elasticidad de sustitución entre transables y no transables.

La diferencia clave entre el problema del planificador y el del hogar representativo se observa al comparar (39) con la ecuación de Euler del equilibrio descentralizado:

$$u_T(t) = \beta(1 + r)\mathbb{E}_t[u_T(t + 1)]. \tag{42}$$

Mientras que en el equilibrio competitivo el agente sólo toma en cuenta su utilidad marginal, el planificador considera además el beneficio indirecto $\mu_t^{sp}\Psi_t$. Este beneficio surge porque un mayor consumo transable aumenta el precio relativo de los no transables (efectos sustitución e ingreso), relaja la restricción de crédito y mejora la capacidad de financiamiento externo de toda la economía. Por tanto, cuando la restricción de crédito es vinculante, los agentes privados subvaloran su riqueza, ya que no internalizan estos efectos de equilibrio general. Luego,

$$u_T(t) = \beta(1+r)\mathbb{E}_t\left[u_T(t+1) + \mu_{t+1}^{sp}\Psi_{t+1}\right]. \tag{43}$$

Si el planificador reduce el endeudamiento en una unidad, enfrenta un costo marginal inmediato $u_T(t)$ (por menor consumo hoy), pero obtiene un beneficio adicional: una unidad menos de deuda relaja la restricción futura, elevando la capacidad de consumo gracias a $(1+r)\Psi_{t+1}$, con un valor marginal de μ_{t+1}^{sp}. En suma, el agente descentralizado ignora este beneficio intertemporal, lo que lleva a un **sobreendeudamiento** respecto del óptimo restringido del planificador.

Proposición 4.1. ***Ineficiencia Restringida***. *El equilibrio descentralizado no es, en general, eficiente restringido.*

Demostración. Supongamos, para obtener una contradicción, que el equilibrio descentralizado genera las mismas asignaciones que las del planificador social eficiente restringido. Entonces, podemos combinar las ecuaciones (25) y (39), lo que implica:

$$\lambda_t^{sp} = \lambda_t^{de} + \mu_t^{sp}\Psi_t \tag{44}$$

donde nuevamente el superíndice "*sp*" se usa para los multiplicadores de Lagrange del planificador social y "*de*" para los del equilibrio descentralizado. Avanzando una etapa en el tiempo y tomando expectativas condicionales en t, obtenemos:

$$\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}^{sp}] = \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}^{de}] + \mathbb{E}_t[\mu_{t+1}^{sp}\Psi_{t+1}]. \tag{45}$$

Supongamos que en t la restricción de crédito no es vinculante, es decir:

$$b_{t+1} > -\left(\kappa^N p_t^N y_t^N + \kappa^T y_t^T\right).$$

Entonces, combinando las ecuaciones (27), (28), (40) y (41), se sigue que:

$$\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}^{sp}] = \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}^{de}]. \tag{46}$$

Finalmente, si en el período $t+1$ la restricción de crédito es vinculante con probabilidad positiva, entonces $\mu_{t+1}^{sp} > 0$ con probabilidad positiva, lo que implica que:

$$\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}^{de}] > \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}^{sp}].$$

Esto contradice la igualdad anterior, lo que prueba que las asignaciones del equilibrio descentralizado no pueden coincidir con las del planificador social. □

Bianchi estudia el uso de diversas políticas financieras para implementar las asignaciones eficientes restringidas. En particular, se muestra cómo un impuesto sobre la deuda puede restaurar la eficiencia restringida, y luego se establece la equivalencia entre dicho impuesto y formas más estándar de intervención financiera, como los requisitos de capital. Sea τ_t el impuesto aplicado sobre la deuda emitida en el período t. En el equilibrio descentralizado regulado, la ecuación de Euler para los bonos (27) se modifica de la siguiente forma:

$$u_T(t) = \beta(1+r)(1+\tau_t)\mathbb{E}_t\left[u_T(t+1)\right]. \tag{47}$$

Proposición 4.2 (Impuesto Óptimo sobre la Deuda)**.** *Las asignaciones eficientes restringidas pueden ser implementadas mediante un impuesto sobre la deuda contingente al estado, con la recaudación redistribuida a los hogares en forma de transferencias no distorsionantes (lump sum).*

Demostración. La demostración se realiza por construcción. Combinando las condiciones de primer orden del planificador social dadas por las ecuaciones (39) y (40), se obtiene:

$$u_T(t) = \beta(1+r)\mathbb{E}_t\left[u_T(t+1) + \mu_{t+1}^{sp}\Psi_{t+1}\right] + \mu_t^{sp}(1-\Psi_t). \tag{48}$$

Primero, obsérvese que las asignaciones eficientes restringidas están caracterizadas por secuencias estocásticas $\{c_t^T, c_t^N, b_{t+1}, p_t^N, \mu_t^{sp}\}_{t\geq 0}$ tales que se satisfacen las condiciones (26), (29), (29), (41), (46), y $\mu_t^{sp} \geq 0$. Segundo, las asignaciones del equilibrio descentralizado con impuestos a la deuda están caracterizadas por secuencias estocásticas $\{c_t^T, c_t^N, b_{t+1}, p_t^N, \mu_t, \tau_t, T_t\}_{t\geq 0}$

tales que se satisfacen las condiciones (25)-(30), (48), $T_t = b_t(1+r)\tau_{t-1}$, y $\mu_t \geq 0$. Definiendo el impuesto como:

$$\tau_t^* = \frac{\mathbb{E}_t[\mu_{t+1}^{sp}\Psi_{t+1}]}{\mathbb{E}_t[u_T(t+1)]} - \frac{\mu_t^{sp}\Psi_t}{\beta(1+r)\mathbb{E}_t[u_T(t+1)]}$$

se obtiene que las condiciones que caracterizan el equilibrio descentralizado con este impuesto específico sobre la deuda son idénticas a aquellas que caracterizan las asignaciones eficientes restringidas. □

Observación (Descentralización de las asignaciones eficientes restringidas). Cuando la restricción de crédito no es vinculante, la eficiencia restringida puede implementarse con un impuesto óptimo sobre la deuda dado por:

$$\tau_t^* = \frac{\mathbb{E}_t[\mu_{t+1}^{sp}\Psi_{t+1}]}{\mathbb{E}_t[u_T(t+1)]}.$$

Este impuesto refleja el costo marginal no internalizado del endeudamiento, normalizado por la utilidad marginal esperada. Aumenta con el nivel de deuda, ya que un mayor endeudamiento incrementa la probabilidad y el costo de una restricción vinculante futura. Si la probabilidad de que la restricción se active es cero, entonces $\tau_t^* = 0$. Cuando la restricción sí es vinculante, el impuesto no afecta directamente el nivel de deuda (pues está determinado por la restricción misma). En ese caso, se puede implementar la eficiencia restringida fijando:

$$\tau_t^* = \frac{\mathbb{E}_t[\mu_{t+1}^{sp}\Psi_{t+1}]}{\mathbb{E}_t[u_T(t+1)]} - \frac{\mu_t^{sp}\Psi_t}{\beta(1+r)\mathbb{E}_t[u_T(t+1)]}.$$

No obstante, como este término adicional es negativo y complica la implementación, se opta por $\tau_t^* = 0$ cuando la restricción es activa, sin pérdida de eficiencia en los ejercicios cuantitativos. Finalmente, estas asignaciones eficientes también pueden implementarse mediante:

- Requisitos de capital o de reservas sobre instituciones financieras;

- Requisitos de márgenes (ajustando el colateral efectivo):

  $$b_{t+1} \geq -(1-\theta_t)(\kappa^N p_t^N y_t^N + \kappa^T y_t^T)$$

  donde $\theta_t^* = 1 - \frac{b_{t+1}^{sp}}{\kappa^N p_t^N y_t^N + \kappa^T y_t^T}$.

4.7. Análisis cuantitativo

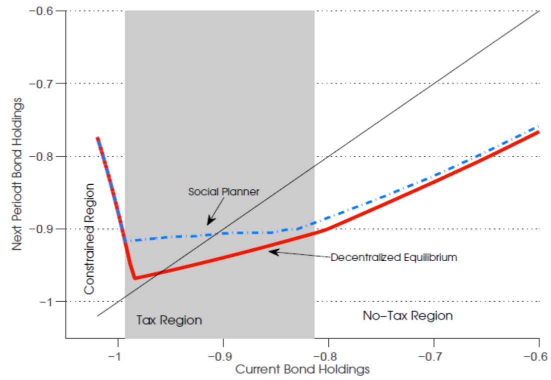

Figura 17: Reglas de Política.

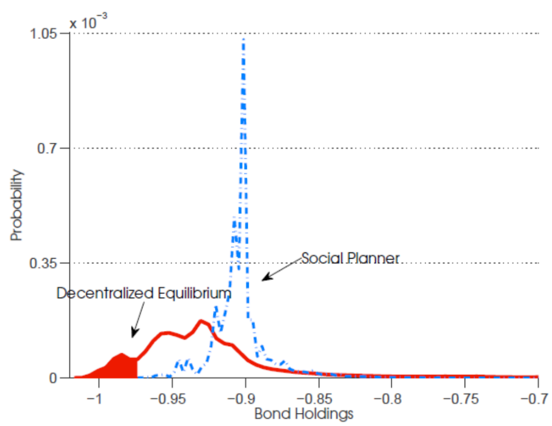

Figura 18: Distribución de endeudamiento.

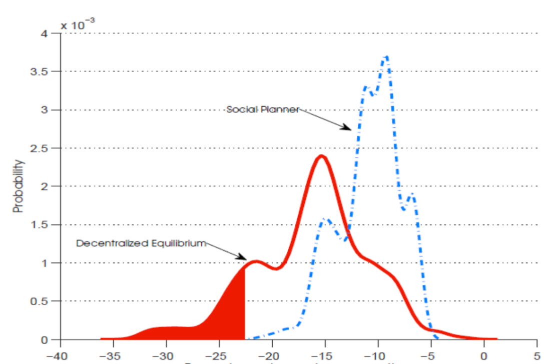

Figura 19: Crisis son menos probables y menos severas en equilibrio con impuestos.

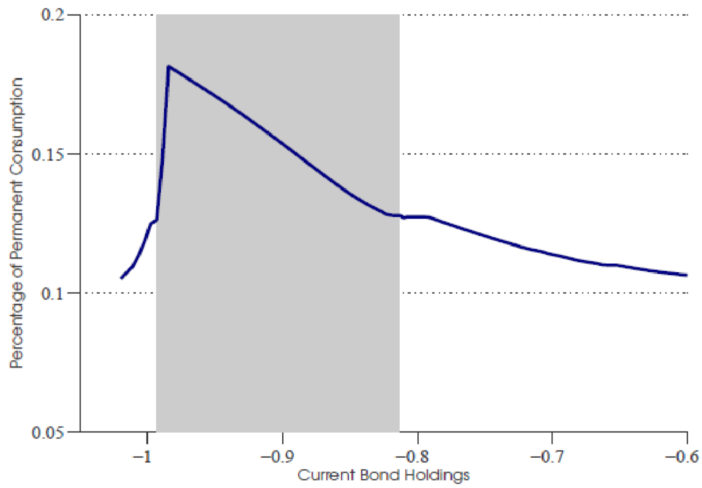

Figura 20: Ganancias de bienestar son importantes de regular sobre endeudamiento.

- ▶ La Figura 17 muestra las reglas de decisión para las tenencias de bonos. El equilibrio descentralizado (línea roja) permite más deuda en la región sombreada, donde la restricción de crédito aún no es vinculante. El planificador social (línea azul) induce menor endeudamiento ex ante en esta región —denominada "Tax Region"— reduciendo así la exposición a crisis futuras.

- ▶ La Figura 18 presenta la distribución estacionaria de deuda bajo ambos regímenes. En el equilibrio descentralizado hay más masa de probabilidad acumulada en niveles extremos de endeudamiento, mientras que bajo el planificador social la distribución se concentra en valores menos riesgosos, lo que refleja una menor exposición a crisis.

- ▶ La Figura 19 muestra la distribución de cambios en el consumo durante crisis. En el equilibrio descentralizado se observan caídas más severas (hasta -35 %), mientras que bajo el planificador las crisis son menos frecuentes y sus efectos más moderados, con caídas concentradas alrededor de -10 %.

- ▶ Finalmente, la Figura 20 ilustra las ganancias de bienestar asociadas a la regulación óptima. Estas ganancias son mayores precisamente en el rango donde hay mayor propensión al sobreendeudamiento, es decir, donde la política macroprudencial actúa preventivamente reduciendo la probabilidad y severidad de crisis.

4.8. Conclusiones

- El artículo estudia una externalidad crediticia sistémica que amplifica la incidencia y la severidad de las crisis financieras. Aunque los hogares acumulan ahorro precautorio para suavizar el consumo, no internalizan los efectos agregados de sus decisiones de endeudamiento sobre el tipo de cambio real ni sobre las restricciones financieras.

- Un planificador social que reduce el endeudamiento ex ante puede mitigar la depreciación del tipo de cambio y la pérdida de acceso al crédito durante una crisis, mejorando así el bienestar social.

- El aporte principal del artículo es cuantitativo: se analiza el efecto de la externalidad sobre la dinámica de las crisis financieras, el bienestar y las políticas necesarias para corregirla. En concreto:
  - La probabilidad de crisis financieras se reduce de 5.5 % a 0.4 %.
  - La caída del consumo durante una crisis típica baja de 17 % a 10 %.

- Se demuestra que distintas políticas regulatorias —como impuestos a la deuda, requisitos de capital o de reservas— pueden implementar las asignaciones eficientes restringidas.

- Estas políticas aumentan el costo del endeudamiento cuando hay probabilidad positiva de crisis, pero lo hacen antes de que la crisis se materialice, reduciendo la vulnerabilidad.

- Si bien son equivalentes en el modelo, su implementación práctica conlleva distintos costos y beneficios. Se muestra que incluso políticas simples, como un impuesto fijo a la deuda, pueden generar importantes mejoras de bienestar.

- La regulación financiera propuesta se alinea con el nuevo paradigma macroprudencial (Borio, 2003), que enfatiza cómo las decisiones individuales pueden desestabilizar la economía agregada.

- Corregir la externalidad no elimina completamente las crisis, pero sí reduce significativamente su frecuencia y gravedad. Esto es coherente con la noción de eficiencia restringida: el planificador enfrenta las mismas fricciones financieras que los agentes privados.

- Los resultados respaldan el uso de instrumentos como impuestos tipo Tobin o requisitos de reserva en mercados emergentes, mostrando que es posible reducir la exposición externa sin renunciar a los beneficios de la integración financiera.
- A su vez, promover el desarrollo de los mercados financieros puede ofrecer grandes ganancias de bienestar al mejorar la diversificación del riesgo y atacar directamente la raíz de la externalidad: la restricción de crédito.

5. Kiyotaki y Moore - ciclos crediticios

El trabajo de Kiyotaki y Moore estudia cómo las restricciones de crédito interactúan con la dinámica macroeconómica y generan fluctuaciones amplificadas y persistentes en la actividad económica. En su modelo, los agentes no pueden obtener financiamiento a menos que ofrezcan garantías, lo que introduce una fricción clave en la asignación de recursos. Los activos durables, como la tierra, cumplen un rol esencial al ser tanto insumos productivos como colateral para préstamos. Cuando ocurre un shock negativo, por ejemplo en la productividad, las firmas más apalancadas—que ya están al límite de su capacidad de endeudamiento—se ven obligadas a reducir su inversión, lo que disminuye su producción futura y su valor neto, reforzando aún más la restricción crediticia. Esta dinámica desencadena una caída en la demanda de activos, lo cual deprime su precio de mercado, generando pérdidas de capital para las firmas que usan dichos activos como garantía. A través de este mecanismo, un shock transitorio produce efectos duraderos y generalizados, exacerbados por un multiplicador intertemporal en el que las condiciones actuales afectan las expectativas futuras. Además, los autores muestran que estos efectos pueden propagarse entre sectores si comparten un mismo mercado de activos colateralizados, generando comovimientos agregados incluso cuando el shock inicial es sectorial. La economía puede presentar ciclos con oscilaciones amortiguadas, en las que recesiones inducen booms posteriores, y viceversa.

5.1. Modelo básico

Consideramos una economía en tiempo discreto con dos bienes: un activo durable (tierra) y un bien no durable (fruta). La tierra no se deprecia y su oferta total es fija, denotada por $\overline{K}$. La fruta crece sobre la tierra, pero no se puede almacenar.

Existen dos tipos de agentes:

- *Agricultores* (población de medida 1): producen fruta usando tierra, enfrentan restricciones de crédito.
- *Recolectores* (población de medida m): también usan tierra pero no están sujetos a restricciones financieras.

Ambos agentes consumen fruta y son neutros al riesgo.

Supuesto 1. *Las funciones de utilidad son lineales en el consumo de fruta:*

$$\mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t x_t\right], \quad \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}(\beta')^t x'_t\right], \quad \textit{con } 0<\beta<\beta'<1.$$

Supuesto 2. *La producción del agricultor es:*

$$y_{t+1}=(a+c)k_t,$$

donde k_t es la tierra utilizada. Sólo una fracción ak_t es comerciable; el resto, ck_t, es intransferible (consumo interno del agricultor).

Supuesto 3. *El agricultor no puede comprometer su trabajo futuro y su tecnología es idiosincrática: si no trabaja, la tierra no produce.*

Supuesto 4. *Los préstamos deben estar colateralizados con tierra. El valor del préstamo bruto no puede exceder el valor descontado de la tierra:*

$$Rb_t \leq q_{t+1}k_t.$$

Supuesto 5. *La tierra es el único colateral disponible y el mercado es competitivo. La fruta es el numeraire, y el precio de la tierra en cada t es q_t.*

Supuesto 6. *Condición técnica que asegura que el agricultor no desea consumir parte de su producción comerciable ($x_t \leq ck_t$):*

$$c>\left(\frac{1}{\beta}-1\right)a.$$

El agricultor escoge secuencias $\{x_t, k_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar utilidad esperada:

$$\max_{\{x_t, k_t, b_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_t$$

sujeto a las siguientes restricciones en cada periodo t:

$$\begin{aligned}
&\text{(producción)} & y_{t+1} &= (a+c)k_t & (49)\\
&\text{(consumo)} & x_t &\leq c k_{t-1} & (50)\\
&\text{(restricción de colateral)} & R b_t &\leq q_{t+1} k_t & (51)\\
&\text{(flujo de fondos)} & q_t(k_t - k_{t-1}) + R b_{t-1} + \underbrace{x_t - c k_{t-1}}_{=0} &= a k_{t-1} + b_t & (52)
\end{aligned}$$

Dado que el agricultor es impaciente y la tecnología tiene alto retorno, en equilibrio siempre:

- consume $x_t = c k_{t-1}$ (su producción no comerciable),
- se endeuda al máximo: $R b_t = q_{t+1} k_t$,
- usa todo su net worth para inversión.

Sustituyendo $b_t = \frac{q_{t+1}}{R} k_t$ y $x_t = c k_{t-1}$ en la ecuación de flujo de fondos:

$$q_t(k_t - k_{t-1}) + R b_{t-1} = a k_{t-1} + \frac{q_{t+1}}{R} k_t.$$

Despejando:

$$q_t k_t - q_t k_{t-1} + R b_{t-1} = a k_{t-1} + \frac{q_{t+1}}{R} k_t$$

$$\left(q_t - \frac{q_{t+1}}{R}\right) k_t = (a + q_t) k_{t-1} - R b_{t-1}$$

Definiendo el costo de uso de la tierra como:

$$u_t := q_t - \frac{q_{t+1}}{R},$$

demanda de tierra por parte del agricultor es:

$$k_t = \frac{1}{u_t} \underbrace{\left[(a + q_t) k_{t-1} - R b_{t-1}\right]}_{\text{Net worth a inicio de } t}.$$

Además, la deuda es:

$$b_t = \frac{q_{t+1}}{R} k_t.$$

En cuanto a los recolectores, ellos no tienen restricciones financieras. Su tecnología presenta rendimientos decrecientes:

$$y'_{t+1} = G(k'_t), \quad G' > 0, \quad G'' < 0.$$

El recolector elige k'_t para satisfacer:

$$\frac{1}{R} G'(k'_t) = u_t = q_t - \frac{q_{t+1}}{R}.$$

La demanda total de tierra debe ser igual a la oferta total $\overline{K}$:

$$k_t + mk'_t = \overline{K} \quad \Rightarrow \quad u_t = \frac{1}{R} G' \left(\frac{\overline{K} - k_t}{m} \right)$$

Así, el equilibrio dinámico se caracteriza por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
k_t &= \frac{1}{u_t} \left[(a + q_t) k_{t-1} - R b_{t-1} \right] \\
b_t &= \frac{q_{t+1}}{R} k_t \\
u_t &= \frac{1}{R} G' \left(\frac{\overline{K} - k_t}{m} \right) \\
u_t &= q_t - \frac{q_{t+1}}{R}.
\end{aligned}$$

Dado (k_{t-1}, b_{t-1}), esta es una economía forward-looking, donde q_t se determina anticipando q_{t+1} y la trayectoria futura de la economía.

El término $(a+q_t)k_{t-1} - Rb_{t-1}$ representa la riqueza neta del agricultor al inicio del periodo t: es decir, el valor del output comerciable y de su tierra mantenida desde el periodo anterior, descontando su obligación de deuda. La ecuación que determina la tierra demandada por el agricultor indica que dicha riqueza se utiliza completamente para financiar la diferencia entre el precio de la tierra q_t y el monto que puede ser prestado por cada unidad de tierra, que es q_{t+1}/R. Esta diferencia se define como el pago inicial por unidad de tierra:

$$u_t = q_t - \frac{q_{t+1}}{R}.$$

Se analiza el destino de una unidad marginal de fruta comerciable en t. Si el agricultor invierte esta unidad, puede adquirir $1/u_t$ unidades de tierra, lo que generará c/u_t unidades de fruta no comerciable (que se consume) y a/u_t de fruta comerciable en $t+1$. Esta última se reinvierte, generando en $t+2$ una producción de $(a/u_t)(c/u_{t+1})$ no comerciable y $(a/u_t)(a/u_{t+1})$ comerciable. Este proceso continúa indefinidamente. Usando el principio de no-mejorabilidad, basta con considerar desviaciones uniperiódicas en t para comparar estrategias. El agricultor tiene tres opciones para su unidad marginal:

- **Invertir:**
$$\left(0,\ \frac{c}{u_t},\ \frac{a}{u_t}\cdot\frac{c}{u_{t+1}},\ \frac{a}{u_t}\cdot\frac{a}{u_{t+1}}\cdot\frac{c}{u_{t+2}},\ \ldots\right).$$

- **Ahorrar:** (es decir, reducir en 1 su endeudamiento actual y comenzar a invertir desde $t+1$ usando R en el siguiente periodo)
$$\left(0,\ 0,\ R\cdot\frac{c}{u_{t+1}},\ R\cdot\frac{a}{u_{t+1}}\cdot\frac{c}{u_{t+2}},\ \ldots\right).$$

- **Consumir:**
$$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

La estrategia óptima es la que genera mayor utilidad descontada. Dado que $\beta < 1$, se concluye que invertir domina ahorrar, y bajo una condición suave sobre los parámetros, también domina consumir. Como k_t y b_t son proporcionales a k_{t-1} y b_{t-1}, se puede agregar entre agricultores. La tierra total utilizada por agricultores K_t sigue:

$$K_t = \frac{1}{u_t}\left[(a+q_t)K_{t-1} - RB_{t-1}\right].$$

La deuda total del sector agrícola es:

$$B_t = \frac{q_{t+1}}{R}K_t.$$

Este sistema captura la dinámica de acumulación de tierra y deuda. Si q_t y q_{t+1} suben $1\,\%$, entonces u_t también sube $1\,\%$, pero el efecto neto sobre K_t depende del apalancamiento. Si $RB_{t-1} > aK_{t-1}$, como ocurre en equilibrio, entonces K_t también sube. Esto es porque (i) con q_{t+1} más alto, se puede pedir más prestado, y (ii) con q_t más alto, la riqueza neta del agricultor aumenta. Por el lado de los recolectores, que no están sujetos a restricciones de crédito y tienen una función de producción $G(k_t')$ con rendimientos decrecientes, su demanda de tierra está determinada por igualar el producto marginal descontado al costo de usuario:

$$\frac{1}{R}G'(k_t') = u_t.$$

Este u_t también es el pago inicial por unidad de tierra que enfrentan los agricultores. Entonces, en equilibrio, cumple un doble rol: es el costo de oportunidad para los recolectores y la restricción financiera para los agricultores. Como todos los recolectores son idénticos, su demanda agregada es mk_t'. La condición de equilibrio en el mercado de tierra implica que la suma de la tierra demandada por agricultores y recolectores iguala la oferta total $\overline{K}$:

$$K_t + mk_t' = \overline{K} \quad \Rightarrow \quad u_t = \frac{1}{R}G'\left(\frac{\overline{K} - K_t}{m}\right).$$

La función $u(K_t)$ definida arriba es creciente: si K_t sube, entonces k_t' debe bajar para que la oferta total de tierra se mantenga constante, lo cual implica que u_t debe subir. Se considera un equilibrio con previsión perfecta, sin shocks inesperados y sin burbujas explosivas en el precio de la tierra. Esto último requiere:

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{E}_t\left[R^{-s}q_{t+s}\right] = 0.$$

Dado lo anterior, el equilibrio se describe mediante la secuencia $\{q_t, K_t, B_t\}$ que satisface:

$$K_t = \frac{1}{u_t}\left[(a+q_t)K_{t-1} - RB_{t-1}\right] \quad ; \quad B_t = \frac{q_{t+1}}{R}K_t \quad ; \quad u_t = \frac{1}{R}G'\left(\frac{\overline{K} - K_t}{m}\right).$$

En estado estacionario se tiene:

$$u^* = q^* - \frac{q^*}{R} = \left(1 - \frac{1}{R}\right)q^* = \frac{R-1}{R}q^* \Rightarrow q^* = \frac{R}{R-1}a \Rightarrow u^* = a.$$

La condición de primer orden de los recolectores implica:

$$\frac{1}{R}G'\left(\frac{\overline{K} - K^*}{m}\right) = a.$$

Finalmente, de la ecuación de deuda:

$$B^* = \frac{q^*}{R}K^* = \frac{1}{R} \cdot \frac{R}{R-1}aK^* = \frac{a}{R-1}K^*$$

En equilibrio estacionario, el output comerciable aK^* cubre exactamente el servicio de deuda $(R-1)B^*$, y el pago inicial por tierra coincide con la productividad marginal a. Así, el tamaño de las granjas es constante.

5.1.1. Deflación Fisheriana

- Caída exógena de q_t (precio).
- El net worth cae.
- Se sigue que $k_t = \frac{1}{u_t}[(a+q_t)k_{t-1} - Rb_{t-1}]$ cae.
- Esto último tiene dos impactos, hace que k_{t+1} caiga y a su vez hace que $q_{t+1} = \frac{Rb_t}{k_t}$ suba, lo cual hace que u_t caiga.
- La caída de k_{t+1} hace que q_{t+2} suba y así u_{t+1} cae también.
- Esto continua hasta un nuevo equilibrio.

A. Tasa de interés real versus tasa de interés nominal

Si operamos con el modelo nominal, los hogares resuelven

$$\begin{aligned}\max_{\{C_t, N_t, B_t\}} \ \mathbb{E}_0 \left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t(C_t, N_t)\right\} \\ \text{s.a } P_t C_t + B_t Q_t \leq W_t N_t - T_t + B_{t-1}\end{aligned}$$

con $Q_t = \frac{1}{1+i_t}$. El Lagrangiano del problema es

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1+\nu}\right) + \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (W_t N_t - T_t + B_{t-1} - P_t C_t - B_t Q_t)\right].$$

Las CPO proveen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_t} &= 0 \implies B_t C_t^{-\sigma} = \lambda_t P_t \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial N_t} &= 0 \implies B_t N_t^{\nu} = -\lambda_t W_t \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial B_t} &= 0 \implies \mathbb{E}_0 \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\right] = \frac{1}{1+i_t}.\end{aligned}$$

Luego, iterando para $t > 0$ en la esperanza condicional

$$\begin{aligned}-\frac{u_{N_t}}{u_{C_t}} &= \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}] \\ C_t^{-\sigma} &= \mathbb{E}_t \left[\beta C_{t+1}^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} (1 + i_{t+1})\right] \\ C_t^{-\sigma} &= \beta \mathbb{E}_t[u_{C_{t+1}} (1 + r_t)]\end{aligned}$$

con $1 + r_t = \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}$. Para $r_t \simeq 0$

$$\begin{aligned}\ln(1 + r_t) &= \ln(1 + i_t) - \mathbb{E}_t[\ln(1 + \pi_{t+1})] \\ r_t &\simeq i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]\end{aligned}$$

donde se usa que $\ln(1 + x) \simeq x$. De aquí el modelo es igual al estudiado en la sección 1 con la excepción que

$$r_t = i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]$$

y

$$i_t = \rho_i i_{t-1} + \rho_\pi \pi_t + \varepsilon_t^i.$$

En el equilibrio $\pi_t = 0$, de forma que

$$r = i$$
$$i = \frac{b}{1-\rho_i}.$$

B. Anexo metodológico

Observación. Se sigue que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{n}_t \\ \hat{r}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{y}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix}}_{=Z_t} = \Lambda \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{a}_t \\ \hat{k}_{t-1} \end{bmatrix}}_{S_t}$$

O sea, tenemos un modelo espacio-estado:

$$\begin{aligned} Z_t &= \Lambda S_t \\ S_t &= \Gamma S_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

A partir del sistema linealizado en forma espacio-estado:

$$\begin{aligned} Z_t &= \Lambda S_t \\ S_t &= \Gamma S_{t-1} + \epsilon_t, \end{aligned}$$

podemos sustituir la segunda ecuación en la primera para obtener una expresión completamente en función de los estados rezagados:

$$Z_t = \Lambda \Gamma S_{t-1} + \Lambda \epsilon_t.$$

Es decir, tenemos:

$$Z_t = \Phi S_{t-1} + \eta_t,$$

donde definimos las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \Phi &:= \Lambda \Gamma \\ \eta_t &:= \Lambda \epsilon_t. \end{aligned}$$

Esta expresión muestra que las variables de control Z_t dependen linealmente del estado rezagado S_{t-1} y del shock contemporáneo ϵ_t, a través de las matrices Φ y Λ. Se calcula que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma+\nu(1-\alpha)} & \dfrac{\alpha}{\sigma+\nu(1-\alpha)} \\ \dfrac{1-\alpha}{\nu}\cdot\dfrac{1}{\sigma+\nu(1-\alpha)} & \dfrac{1-\alpha}{\nu}\cdot\dfrac{\alpha}{\sigma+\nu(1-\alpha)} \\ \gamma\left(1-\dfrac{1-\delta}{\delta s_I}\right)-\sigma\cdot\dfrac{1}{\sigma+\nu(1-\alpha)} & \gamma\left(\alpha-\dfrac{1-\delta}{\delta s_I}(1-s_C\alpha)\right)-\sigma\cdot\dfrac{\alpha}{\sigma+\nu(1-\alpha)} \\ \dfrac{\nu\alpha}{\sigma+\nu(1-\alpha)} & \dfrac{\nu\alpha^2}{\sigma+\nu(1-\alpha)} \\ 1 & \alpha \\ \dfrac{1}{s_I}\left(1-s_C\cdot\dfrac{1}{\sigma+\nu(1-\alpha)}\right) & \dfrac{1}{s_I}\left(\alpha-s_C\cdot\dfrac{\alpha}{\sigma+\nu(1-\alpha)}\right) \\ \delta\cdot\left[\dfrac{1}{s_I}\left(1-s_C\cdot\dfrac{1}{\sigma+\nu(1-\alpha)}\right)\right]+(1-\delta)\cdot 0 & \delta\cdot\left[\dfrac{1}{s_I}\left(\alpha-s_C\cdot\dfrac{\alpha}{\sigma+\nu(1-\alpha)}\right)\right]+(1-\delta) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ \delta\cdot\dfrac{1}{s_I}\left(1-s_C\cdot\dfrac{1}{\sigma+\nu(1-\alpha)}\right) & \delta\cdot\dfrac{1}{s_I}\left(\alpha-s_C\cdot\dfrac{\alpha}{\sigma+\nu(1-\alpha)}\right)+(1-\delta) \end{bmatrix}$$

Ejemplo B.1. Consideramos la ecuación de valoración con dividendos:

$$p_t = \lambda\mathbb{E}_t[p_{t+1}] + d_t, \quad \lambda \in (0,1).$$

donde p_t es el precio del activo, d_t es el dividendo y $\lambda \in (0,1)$ es un factor de descuento. Iterando hacia adelante una vez:

$$\begin{aligned} p_t &= \lambda\mathbb{E}_t\left[p_{t+1}\right] + d_t \\ &= \lambda\mathbb{E}_t\left[\lambda\mathbb{E}_{t+1}[p_{t+2}] + d_{t+1}\right] + d_t \\ &= \lambda^2\mathbb{E}_t\left[p_{t+2}\right] + \lambda\mathbb{E}_t[d_{t+1}] + d_t. \end{aligned}$$

Iterando n veces hacia adelante, obtenemos:

$$p_t = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j\mathbb{E}_t[d_{t+j}] + \lambda^{n+1}\mathbb{E}_t[p_{t+n+1}].$$

Si suponemos que la condición de no burbuja se cumple, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{n+1}\mathbb{E}_t[p_{t+n+1}] = 0,$$

entonces podemos escribir el precio como el valor presente descontado esperado de los dividendos futuros

$$p_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \mathbb{E}_t[d_{t+j}].$$