MAT218 – Ecuaciones Diferenciales Aplicadas
Solucionario – Práctica Calificada 4 (Tipo A)

Pontificia Universidad Católica del Perú
Profesor: Marcelo V. Flamarion
Jefe de Práctica: Marcelo Gallardo
San Miguel, 21 de noviembre de 2025

1. Método del plano fase y existencia de soluciones periódicas

Consideremos la ecuación

$$x'' + x - x^3 = 0, \tag{1}$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$. Factorizando,

$$x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ x = 1,\ x = -1.$$

Por tanto, los puntos críticos son

$$(0,0), \qquad (1,0), \qquad (-1,0).$$

Podemos escribir la EDO com un sistema, con campo vectorial

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x^3 - x \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana es

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} y & \dfrac{\partial}{\partial y} y \\ 3x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Punto crítico $(1,0)$.

$$A_1 = g'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante es

$$\det(A_1) = -2 < 0.$$

Por lo tanto, $(1,0)$ es un **punto silla**.

Punto crítico $(-1,0)$.

$$A_2 = g'(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente,

$$\det(A_2) = -2 < 0,$$

por lo que $(-1,0)$ es también un **punto silla**.

Punto crítico $(0,0)$**.**

$$A_3 = g'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante es

$$\det(A_3) = 1 > 0,$$

y el traza es

$$\mathrm{tr}(A_3) = 0.$$

Auto-valores:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Por ende, $(0,0)$ es un **centro no lineal**, y su estabilidad no se puede decidir solo con la linealización.

Como sugerido, procedemos vía el **método del plano fase.** Para el sistema

$$x' = y, \qquad y' = x^3 - x,$$

tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{x^3 - x}{y}.$$

Suponiendo $y \neq 0$ se obtiene

$$y\,dy = x(x^2-1)\,dx.$$

Integramos ambos lados:

$$\int y\,dy = \int x(x^2-1)\,dx,$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C.$$

Multiplicando por 4 y reescribiendo con $K = 4C$:

$$2y^2 = x^4 - 2x^2 + K,$$

o equivalentemente

$$y^2 = \frac{x^4 - 2x^2 + K}{2}.$$

Estas curvas describen el retrato de fase. Cerca de $x = \pm 1$ se observa que las trayectorias se separan, indicando puntos silla. En cambio, cerca de $(0,0)$ las curvas son cerradas, lo que indica que $(0,0)$ es un *centro no lineal.*

2. Estabilidad del punto crítico según $\alpha\beta > 1$

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -\alpha x + xy, \\ y' = 1 - \beta y - x^2, \end{cases} \tag{2}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Paso 1: puntos críticos. Los puntos críticos (x^*, y^*) satisfacen

$$-\alpha x^* + x^* y^* = 0, \qquad 1 - \beta y^* - (x^*)^2 = 0.$$

De la primera ecuación,

$$x^*(-\alpha + y^*) = 0.$$

Se tienen dos casos.

Caso 1: $x^* = 0$. Entonces la segunda ecuación se reduce a

$$1 - \beta y^* = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^* = \frac{1}{\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

Por tanto, tenemos un punto crítico

$$P_0 = \left(0, \frac{1}{\beta}\right).$$

Caso 2: $x^* \neq 0$. En este caso debe cumplirse $-\alpha + y^* = 0$, es decir

$$y^* = \alpha.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$1 - \beta\alpha - (x^*)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x^*)^2 = 1 - \alpha\beta.$$

Para que exista solución real, necesitamos $1 - \alpha\beta \geq 0$, es decir $\alpha\beta \leq 1$.

Conclusión sobre existencia.

- Si $\alpha\beta < 1$, existen tres puntos críticos: $P_0 = (0, 1/\beta)$ y $P_\pm = \big(\pm\sqrt{1-\alpha\beta}, \alpha\big)$.
- Si $\alpha\beta = 1$, $P_\pm$ colapsan en $(0, \alpha)$ (coincidente con $x = 0$ y $y = 1/\beta = \alpha$).
- **Si $\alpha\beta > 1$, no hay soluciones reales para $(x^*)^2$,** por lo que el **único** punto crítico es

$$P_0 = \left(0, \frac{1}{\beta}\right).$$

La primera parte del enunciado queda demostrada.

Paso 2: Jacobiano y linealización. El Jacobiano del sistema (2) es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-\alpha x + xy) & \frac{\partial}{\partial y}(-\alpha x + xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(1 - \beta y - x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(1 - \beta y - x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + y & x \\ -2x & -\beta \end{pmatrix}.$$

En el punto crítico $P_0 = (0, 1/\beta)$ se tiene

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -\alpha + \dfrac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz triangular son

$$\lambda_1 = -\beta, \qquad \lambda_2 = -\alpha + \frac{1}{\beta}.$$

Paso 3: signo de los autovalores bajo las hipótesis. Suponemos ahora

$$\alpha\beta > 1 \quad \text{y} \quad \beta > 0.$$

De $\alpha\beta > 1$ y $\beta > 0$ se deduce

$$\alpha > \frac{1}{\beta} \quad \Longrightarrow \quad -\alpha + \frac{1}{\beta} < 0.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_1 = -\beta < 0, \qquad \lambda_2 = -\alpha + \frac{1}{\beta} < 0.$$

Teorema de estabilidad lineal. Sea $\dot{z} = F(z)$ un sistema autónomo suave en $\mathbb{R}^2$ con punto crítico z^*. Si la matriz Jacobiana $DF(z^*)$ tiene autovalores con parte real estrictamente negativa, entonces z^* es un *punto de equilibrio asintóticamente estable* (tipo *nodo estable* o *foco estable*, según si los autovalores son reales o complejos).

Aplicando este resultado a nuestro sistema, con $P_0 = (0, 1/\beta)$ y ambos autovalores negativos, se concluye que:

Conclusión: Cuando $\alpha\beta > 1$ y $\beta > 0$, el sistema (2) posee un único punto crítico $P_0 = (0, 1/\beta)$, el cual es **asintóticamente estable** (un nodo estable).

3. Naturaleza del origen según el signo de ε

Consideremos el sistema lineal

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

donde $|\varepsilon|$ es arbitrariamente pequeño. Analizaremos el origen $(0,0)$ como punto de equilibrio.

Paso 1: polinomio característico y autovalores. El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ \varepsilon & \lambda + 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 1)^2 + \varepsilon \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lambda^2 + 2\lambda + (1 + \varepsilon) = 0. \tag{4}$$

La fórmula cuadrática da

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\varepsilon)}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-4\varepsilon}}{2} \\
&= -1 \pm \sqrt{-\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Es útil también notar que

$$\Delta := 4 - 4(1+\varepsilon) = -4\varepsilon$$

es la discriminante de (4).

Paso 2: casos según el signo de ε.

- **Caso $\varepsilon > 0$.** Entonces $\sqrt{-\varepsilon} = i\sqrt{\varepsilon}$ es puramente imaginaria y los autovalores son

  $$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\varepsilon},$$

  con parte real $-1 < 0$.

  Por la teoría de sistemas lineales en el plano, cuando los autovalores son complejos conjugados con parte real negativa, el origen es un **foco estable** (espiral que tiende al origen conforme $t \to +\infty$).

- **Caso $\varepsilon < 0$.** Ahora $-\varepsilon > 0$ y $\sqrt{-\varepsilon}$ es un número real positivo. Denotemos $a = \sqrt{-\varepsilon} > 0$. Entonces

  $$\lambda_{1,2} = -1 \pm a.$$

  Para $|\varepsilon|$ pequeño, se tiene $0 < a < 1$, de modo que

  $$-1 - a < -1 < -1 + a < 0.$$

  Por lo tanto, ambos autovalores son reales y negativos. El origen es entonces un **nodo estable** (no espiral, sino con trayectorias que se aproximan tangencialmente a las direcciones propias).

- **Caso $\varepsilon = 0$.** Entonces la matriz

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  tiene polinomio característico

  $$(\lambda + 1)^2 = 0,$$

  de modo que el único autovalor es $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica 2. Para hallar autovectores, resolvemos

  $$(A + I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que implica $v_2 = 0$ y v_1 libre. Por tanto, el espacio propio es 1-dimensional, luego A no es diagonalizable y posee un bloque de Jordan de tamaño 2.

Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, el origen es un **nodo degenerado estable** (también llamado *nodo impropio*), pues las soluciones todavía decaen exponencialmente (factor e^{-t}), pero sólo hay una dirección propia linealmente independiente.

Conclusión:

- Si $\varepsilon > 0$, el origen es un **foco estable**.
- Si $\varepsilon < 0$, el origen es un **nodo estable** (autovalores reales negativos distintos).
- Si $\varepsilon = 0$, el origen es un **nodo degenerado estable** (autovalor real negativo doble, no diagonalizable).

4. Ciclo límite estable usando coordenadas polares

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y - x(x^2 + y^2), \\ y' = -x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \tag{5}$$

Queremos demostrar que admite un ciclo límite estable.

Paso 1: cambio a coordenadas polares. Recordemos la transformación

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Las fórmulas estándar para r' y θ' en términos de x', y' son:

$$r' = \frac{xx' + yy'}{r},$$
$$\theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2},$$

siempre que $r > 0$.

Paso 2: cálculo de r'. Primero observamos que

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Entonces

$$x' = x + y - x(x^2 + y^2) = x + y - xr^2,$$
$$y' = -x + y - y(x^2 + y^2) = -x + y - yr^2.$$

Luego

$$\begin{aligned}
xx' + yy' &= x(x + y - xr^2) + y(-x + y - yr^2) \\
&= x^2 + xy - x^2r^2 - xy + y^2 - y^2r^2 \\
&= x^2 + y^2 - r^2(x^2 + y^2) \\
&= r^2 - r^2(r^2) = r^2(1 - r^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r' = \frac{xx' + yy'}{r} = \frac{r^2(1 - r^2)}{r} = r(1 - r^2).$$

Paso 3: cálculo de θ'. Análogamente,

$$\begin{aligned}
xy' - yx' &= x(-x + y - yr^2) - y(x + y - xr^2) \\
&= -x^2 + xy - xyr^2 - xy - y^2 + xyr^2 \\
&= -x^2 - y^2 \\
&= -r^2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2} = -1.$$

Sistema en polares. En resumen, para $r > 0$ el sistema (5) se transforma en

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = -1. \end{cases} \tag{6}$$

La ecuación para θ es muy simple:

$$\theta(t) = -t + \theta_0,$$

con θ_0 constante. El comportamiento radial se describe por el sistema escalar autónomo

$$r' = r(1 - r^2).$$

Paso 4: análisis de la ecuación radial. Los puntos de equilibrio de la ecuación radial son las raíces de

$$f(r) := r(1 - r^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 0,\ r = 1.$$

La derivada es

$$f'(r) = 1 - 3r^2.$$

Evaluamos en los puntos de equilibrio:

- En $r = 0$: $f'(0) = 1 > 0$. En un sistema de dimensión 1 esto significa que $r = 0$ es un **equilibrio inestable** (tipo fuente): si $r > 0$ pequeño, entonces $r' > 0$ y la solución se aleja de 0 a medida que t aumenta.

- En $r = 1$: $f'(1) = 1 - 3 = -2 < 0$. Por tanto, $r = 1$ es un **equilibrio estable** (tipo sumidero): si r comienza cerca de 1, las soluciones se acercan a 1 cuando $t \to +\infty$.

Interpretación geométrica en el plano (x, y).

- $r = 0$ corresponde al origen $(0, 0)$. Es un punto de equilibrio inestable: trayectorias que comienzan con $r(0) > 0$ se alejan de él.

- $r = 1$ corresponde a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

  Dado que $\theta' = -1 \neq 0$, una solución con $r(t) \equiv 1$ describe una trayectoria periódica (se recorre la circunferencia con rapidez angular constante). Esta órbita cerrada es un **ciclo límite**.

  Además, como $r = 1$ es estable en la ecuación radial, cualquier trayectoria con $0 < r(0) \neq 1$ tiende a $r(t) \to 1$ cuando $t \to +\infty$. Esto significa que todas las soluciones (salvo la que parte exactamente en el origen) *se aproximan al ciclo* cuando $t \to +\infty$.

Teorema (Poincaré–Bendixson, versión informal). En un sistema plano autónomo suave, si una trayectoria permanece para $t \geq 0$ en una región acotada y libre de puntos de equilibrio, entonces su conjunto límite ω es necesariamente una órbita cerrada (un ciclo límite).

En nuestro caso, el análisis radial muestra que las soluciones con $r(0) > 0$ se mantienen acotadas y convergen a la circunferencia $r = 1$, libre de otros puntos de equilibrio excepto ella misma. Por tanto, dicha circunferencia es un **ciclo límite atractor**.

Conclusión: El sistema (5) admite un **ciclo límite estable** dado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Integración explícita de la ecuación $r' = r(1 - r^2)$ (opcional)

Estudiamos la ecuación diferencial autónoma

$$r'(t) = r(1 - r^2), \qquad r(t) \geq 0.$$

Es una ecuación separable, de modo que escribimos

$$\frac{dr}{r(1 - r^2)} = dt.$$

Para integrar el lado izquierdo factorizamos

$$r(1-r^2) = r(1-r)(1+r),$$

y usamos descomposición en fracciones parciales. En efecto:

$$\frac{1}{r(1-r)(1+r)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2(1-r)} - \frac{1}{2(1+r)}.$$

Así,

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2(1-r)} - \frac{1}{2(1+r)} \right) dr.$$

Integramos término a término:

$$\int \frac{dr}{r} = \ln r, \qquad \int \frac{dr}{1+r} = \ln(1+r), \qquad \int \frac{dr}{1-r} = -\ln|1-r|.$$

Por tanto,

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \ln r - \frac{1}{2}\ln(1+r) - \frac{1}{2}\ln|1-r| + C.$$

Usamos la propiedad logarítmica

$$\ln r - \frac{1}{2}\ln(1+r) - \frac{1}{2}\ln|1-r| = \ln\left(\frac{r}{\sqrt{|1-r^2|}} \right).$$

Así obtenemos la igualdad

$$t + t_0 = \ln\left(\frac{r}{\sqrt{|1-r^2|}} \right), \qquad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Exponentiando ambos lados:

$$\frac{r}{\sqrt{|1-r^2|}} = e^{t+t_0} = Ce^t, \qquad C = e^{t_0} > 0.$$

Ahora distinguimos los casos, dependiendo de si $0 \leq r \leq 1$ o $r > 1$.

Caso 1: $0 \leq r \leq 1$**.** Tenemos $1 - r^2 \geq 0$, por lo que

$$\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} = Ce^t.$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{r^2}{1-r^2} = C^2 e^{2t}.$$

Resolviendo para r^2:

$$r^2 = C^2 e^{2t}(1 - r^2),$$
$$r^2 + C^2 e^{2t} r^2 = C^2 e^{2t},$$
$$r^2 = \frac{C^2 e^{2t}}{1 + C^2 e^{2t}}.$$

Tomando raíz:

$$r(t) = \frac{Ce^t}{\sqrt{1 + C^2 e^{2t}}}.$$

Como $t \to +\infty$,

$$r(t) \longrightarrow 1.$$

Caso 2: $r > 1$. Aquí $1 - r^2 < 0$, y por tanto $\sqrt{|1 - r^2|} = \sqrt{r^2 - 1}$. Obtenemos:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} = Ce^t.$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{r^2}{r^2 - 1} = C^2 e^{2t}.$$

Esto produce la solución

$$r(t) = \frac{Ce^t}{\sqrt{C^2 e^{2t} - 1}}.$$

Nuevamente,

$$\lim_{t \to +\infty} r(t) = 1.$$

Conclusión. Para cualquier condición inicial $r(0) = r_0 > 0$ se obtiene una solución explícita de la forma

$$r(t) = \frac{r_0 e^t}{\sqrt{1 + r_0^2 (e^{2t} - 1)}}.$$

Además,

$$\lim_{t \to +\infty} r(t) = 1.$$

5. Soluciones periódicas del sistema en polares

Consideremos ahora el sistema ya dado en coordenadas polares

$$\begin{cases} r'(t) = r(r-1)(r-3), \\ \theta'(t) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Debemos determinar todas las soluciones periódicas, los ciclos límite y su estabilidad.

Paso 1: puntos estacionarios de la ecuación radial. La ecuación radial es

$$r' = f(r) := r(r-1)(r-3). \tag{8}$$

Los puntos de equilibrio se obtienen de $f(r) = 0$, es decir

$$r = 0, \quad r = 1, \quad r = 3.$$

Paso 2: estabilidad de los equilibrios radiales. Calculamos la derivada

$$\begin{aligned} f'(r) &= (r-1)(r-3) + r\frac{d}{dr}\big[(r-1)(r-3)\big] \\ &= (r-1)(r-3) + r(2r-4). \end{aligned}$$

Evaluamos en los equilibrios:

- En $r = 0$:

  $$f'(0) = (0-1)(0-3) + 0 = (-1)(-3) = 3 > 0.$$

  Raíz simple con derivada positiva $\Rightarrow$ **inestable**.

- En $r = 1$:

  $$\begin{aligned} f'(1) &= (1-1)(1-3) + 1(2\cdot 1 - 4) \\ &= 0 + (2-4) = -2 < 0. \end{aligned}$$

  Raíz simple con derivada negativa $\Rightarrow$ **estable**.

- En $r = 3$:

  $$\begin{aligned} f'(3) &= (3-1)(3-3) + 3(2\cdot 3 - 4) \\ &= (2)(0) + 3(6-4) \\ &= 3\cdot 2 = 6 > 0. \end{aligned}$$

  Raíz simple con derivada positiva $\Rightarrow$ **inestable**.

Interpretación para $r \geq 0$. Dado que r es un radio, nos interesa el intervalo $r \geq 0$. Para un sistema 1D $r' = f(r)$, la estabilidad se puede visualizar con una línea de fase:

- Para $0 < r < 1$: Tomemos, por ejemplo, $r = 0.5$:

  $$f(0.5) = 0.5(0.5-1)(0.5-3) = 0.5(-0.5)(-2.5) = 0.625 > 0.$$

  Así, $r' > 0$ en $(0, 1)$, por lo que las trayectorias con $0 < r(0) < 1$ se alejan de 0 y se acercan a $r = 1$ cuando $t \to +\infty$. Esto confirma que $r = 0$ es **inestable** y $r = 1$ es **estable**.

- Para $1 < r < 3$: Por ejemplo, $r = 1.5$:

$$f(1.5) = 1.5(1.5-1)(1.5-3) = 1.5(0.5)(-1.5) = -1.125 < 0.$$

  Entonces $r' < 0$ en $(1, 3)$, lo que implica que las trayectorias con $1 < r(0) < 3$ decrecen hacia $r = 1$ cuando $t \to +\infty$. De nuevo, $r = 1$ actúa como atractor y $r = 3$ como repulsor desde la izquierda.

- Para $r > 3$: Por ejemplo, $r = 4$:

$$f(4) = 4(4-1)(4-3) = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12 > 0.$$

  Así, $r' > 0$ para $r > 3$, de modo que las trayectorias con $r(0) > 3$ crecen sin acotación: $r(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Esto confirma que $r = 3$ es **inestable**.

Paso 3: soluciones periódicas y ciclos límite. Observemos que $\theta'(t) = 1$ implica

$$\theta(t) = t + \theta_0,$$

con θ_0 constante. Para que la órbita $(r(t), \theta(t))$ sea periódica en el plano (x, y), es necesario que $r(t)$ sea constante (pues de lo contrario la distancia al origen cambia y la trayectoria no puede cerrarse sobre sí misma).

Por tanto, las únicas soluciones periódicas posibles son aquellas para las cuales $r(t) \equiv r^*$ sea un punto de equilibrio de (8), es decir,

$$r^* \in \{0, 1, 3\}.$$

- $r(t) \equiv 0$. En este caso, $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ para todo t. Esta es una **solución de equilibrio** en el plano, pero no se considera un *ciclo límite* (la órbita es un punto, no una curva cerrada no trivial). Además, hemos visto que $r = 0$ es inestable en la ecuación radial, de modo que el equilibrio en el origen es inestable.

- $r(t) \equiv 1$. Esto corresponde a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

  Como $r = 1$ es un equilibrio estable de la ecuación radial, cualquier solución con $0 < r(0) < 3$ y $r(0) \neq 1$ tiende a $r(t) \to 1$ cuando $t \to +\infty$. Geométricamente, todas las trayectorias que parten con $0 < r(0) < 3$ (excepto la que parte exactamente del origen) se aproximan a la circunferencia $r = 1$ conforme pasa el tiempo.

  Esta circunferencia es un **ciclo límite estable** (atractor).

- $r(t) \equiv 3$. Corresponde a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9.$$

  Como $r = 3$ es inestable en la ecuación radial, trayectorias con $r(0)$ ligeramente menor que 3 se mueven hacia $r = 1$, mientras que trayectorias con $r(0) > 3$ se alejan hacia $r \to \infty$. Por tanto, la circunferencia $r = 3$ es un **ciclo límite inestable (o mejor dicho, trayectoria circular de la cual las trayectorias vecinas se alejan)**.

Conclusiones finales.

- El sistema posee **tres** soluciones radiales estacionarias: $r = 0$, $r = 1$, $r = 3$.
- En el plano (x, y):
  - El origen $(0, 0)$ (correspondiente a $r = 0$) es un **equilibrio inestable**.
  - La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es un **ciclo límite estable** (atractor).
  - La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ es una **trayectoria cerrada no estable según sus vecinos**.
- Las soluciones con $0 < r(0) < 3$, $r(0) \neq 1$ convergen a la circunferencia $r = 1$ cuando $t \to +\infty$.
- Las soluciones con $r(0) > 3$ divergen, es decir, $r(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.