PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Facultad de Ciencias e Ingeniería

MAT218 Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Práctica N^o 2 (tipo a)

Semestre académico 2025-2

INDICACIONES GENERALES:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: sin copias ni apuntes.
- Cada ejercicio vale 5 puntos.
- Resuelva 4 de las 5 preguntas.

1. Resolver la EDO

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Solución. Ecuación característica:

$$r^4 - 1 = 0 = (r^2-1)(r^2+1) \;\Rightarrow\; r = \pm 1,\ \pm i.$$

Entonces

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

□

2. Resolver la EDO

$$y'' - 4y = e^{2t}.$$

Solución. Homogénea: $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2$, de modo que

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Como hay resonancia con e^{2t} (uno de los valores propios del polinomio característico es 2), probamos $y_p(t) = A\,te^{2t}$. Derivando:

$$y_p'(t) = Ae^{2t}(2t+1), \qquad y_p''(t) = Ae^{2t}(4t+4).$$

Sustituyendo:

$$y_p'' - 4y_p = 4Ae^{2t} = e^{2t} \;\Rightarrow\; A = \tfrac{1}{4}.$$

Luego,

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + \frac{t}{4} e^{2t}.$$

□

3. Resolver
$$x^2y'' + xy' - y = 0, \qquad x > 0.$$

Solución. (Euler–Cauchy) Tomamos $y = x^r$. Entonces $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ y
$$x^2y'' + xy' - y = (r^2 - 1)x^r = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1.$$
Por tanto,
$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-1}.$$
$\square$

4. Escribir la forma de una solución particular (no calcular coeficientes) de
$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x} \sin x - x^3 \sin(2x).$$

Solución. La homogénea $y'' + 4y = 0$ tiene base $\{\cos(2x), \sin(2x)\}$.

Por linealidad, $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$.

1) Para $x^2 e^{-3x} \sin x$ (sin resonancia: $-3 \pm i \neq \pm 2i$):
$$y_{p,1}(x) = e^{-3x}\Big[(A_2x^2 + A_1x + A_0)\cos x + (B_2x^2 + B_1x + B_0)\sin x\Big].$$

2) Para $-x^3 \sin(2x)$ (hay resonancia con $\sin(2x), \cos(2x)$; multiplicar por x):
$$y_{p,2}(x) = x\Big[(C_3x^3+C_2x^2+C_1x+C_0)\cos(2x)+(D_3x^3+D_2x^2+D_1x+D_0)\sin(2x)\Big].$$

Así,
$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x).$$
$\square$

5. Determinar la solución general de
$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \sin(m\pi x), \qquad \lambda > 0,\ \lambda \neq m\pi.$$

Solución. Homogénea:
$$y_h(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x).$$

Buscamos un particular como (pues $\lambda \neq m\pi$):

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^{N} b_m \sin(m\pi x).$$

Entonces

$$y_p'' + \lambda^2 y_p = \sum_{m=1}^{N} b_m \big(\lambda^2 - (m\pi)^2\big) \sin(m\pi x).$$

Identificando coeficientes:

$$b_m = \frac{a_m}{\lambda^2 - (m\pi)^2} \quad (m = 1, \dots, N).$$

La solución general queda

$$y(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m}{\lambda^2 - (m\pi)^2} \sin(m\pi x).$$

$\square$

Nota.

$g(x)$	$y_p(x)$	s
$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)$	mult. del 0
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_nx^n + \cdots + A_0)e^{\alpha x}$	mult. de α
$P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ o $P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$x^sP_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + x^sQ_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	mult. de $\alpha + i\beta$

Cuadro 1: Método de coeficientes indeterminados. x El exponente s corresponde a la multiplicidad de la raíz indicada en la ecuación característica.

Nota. La sugerencia “Resuelva N problemas por separado y aproveche la linealidad de la ecuación” significa lo siguiente:

- El operador diferencial $L[y] = y'' + \lambda^2 y$ es lineal:

$$L\big[y_1 + y_2\big] = L\big[y_1\big] + L\big[y_2\big].$$

- Por lo tanto, si se conoce una solución particular $y_{p,m}$ para cada problema individual

$$y'' + \lambda^2 y = a_m \sin(m\pi x), \qquad m = 1, 2, \dots, N,$$

entonces la suma

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^{N} y_{p,m}(x)$$

será una solución particular de la ecuación completa con el lado derecho $\sum_{m=1}^{N} a_m \sin(m\pi x)$.

- En la práctica, esto permite resolver cada forzante $a_m \sin(m\pi x)$ de manera independiente (cada uno con un ansatz $b_m \sin(m\pi x)$), hallar $b_m = \frac{a_m}{\lambda^2-(m\pi)^2}$, y al final sumar todos los resultados.

De este modo, el problema con la suma se reduce a N problemas simples, y gracias a la linealidad basta juntar las soluciones.

Profesor del curso: Marcelo V. Flamarion.
Jefe de Práctica: Marcelo Gallardo
San Miguel, 19 de septiembre de 2025.