PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Facultad de Ciencias e Ingeniería

MAT218 Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Práctica N^o 1 (tipo a)

Semestre académico 2025-2

INDICACIONES GENERALES:

- Duración: 110 minutos
- Materiales o equipos a utilizar: sin copias ni apuntes
- Cada ejercicio vale 5 puntos
- Resuelva 4 de las 5 preguntas

1. Utilizando el teorema de existencia y unicidad para EDOs, diga si es posible garantizar que los siguientes problemas de valor inicial admiten solución única. No es necesario solucionar el PVI en cuestión.

   a) $y' + xy = 3, \quad y(0) = 0$

   b) $y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$

2. Clasifique los puntos de equilibrio del modelo de crecimiento tumoral de Gompertz

$$\dot{N} = -a\,N\,\ln(bN). \tag{1}$$

   ($N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros) y realice el diagrama de fases.

3. Resuelva las EDOs siguientes:

   a) $y' + \dfrac{2}{x}\,y = x^2$

   b) $(x - y)\,dx + (-x + y + 2)\,dy = 0$

   c) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \quad$ (suponga $xy \neq 0$)

Profesor del curso: Marcelo V. Flamarion.

Jefe de Práctica: Marcelo Gallardo

San Miguel, 5 de septiembre de 2025.

Solucionario

1. *Solución.* (a) $f(x,y) = -xy + 3$ es continua y $\partial f/\partial y = -x$ también. Por Picard–Lindelöf, hay solución única global.

   (b) $f(y) = y^{2/3}$ es continua pero no Lipschitz en $y = 0$ (pues $\partial f/\partial y = \frac{2}{3}y^{-1/3}$ diverge). No se garantiza unicidad: hay múltiples soluciones ($y \equiv 0$, $y = (x/3)^3$, y concatenaciones con tiempo de espera). □

2. *Solución.* Equilibrio: $N = 1/b$ (en $N = 0$ no está definida, pero se puede extender por continuidad a 0).

   $f'(N) = -a(\ln(bN) + 1)$.

   - En $N = 1/b$: $f'(1/b) = -a < 0$, equilibrio estable. - En $N = 0$: inestable (dentro del dominio $N > 0$).

   Diagrama de fases: las soluciones con $N(0) > 0$ tienden a $1/b$.

   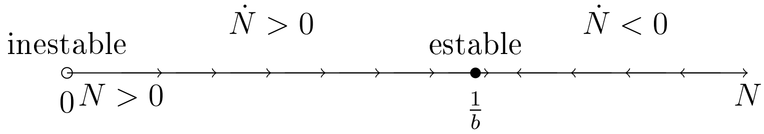

   Figura 1: *
   Diagrama de fases para $\dot{N} = -a\,N\,\ln(bN)$ con $a, b > 0$.

   □

3. (a)

   Solución. Lineal de primer orden; factor integrante $\mu(x) = x^2$:

   $$(x^2y)' = x^4 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \tfrac{x^3}{5} + C\,x^{-2},$$

   válida en $(0,\infty)$ o $(-\infty, 0)$. La única que se prolonga continuamente a $x = 0$ es $y = x^3/5$. □

4. (b)

   Solución. Exacta con $M = x - y$, $N = -x + y + 2$; $M_y = N_x = -1$. Potencial:

   $$F(x,y) = \tfrac{x^2}{2} - xy + \tfrac{y^2}{2} + 2y.$$

   Solución implícita:

   $$\tfrac{x^2}{2} - xy + \tfrac{y^2}{2} + 2y = C \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{(x-y)^2}{2} + 2y = C.$$

   □

5. (c)

Solución. Con $z = y^2$:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = 2x.$$

Factor integrante $\mu(x) = x^{-2}$:

$$(x^{-2}z)' = \tfrac{2}{x} \ \Rightarrow \ x^{-2}z = 2\ln|x| + C \ \Rightarrow \ z = x^2(2\ln|x| + C).$$

Luego

$$y(x) = \pm\, x\sqrt{2\ln|x| + C}\,, \qquad 2\ln|x| + C \geq 0, \quad xy \neq 0.$$

$\square$