PD3
Series de Potencias y Sistemas Lineales Autónomos

Profesor: Marcelo Flamarion
TA: Marcelo Gallardo

PUCP – Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

I. Series de Potencias

Fundamento teórico (puntos ordinarios y Frobenius)

Si P, Q, R son analíticas y $P(x_0) \neq 0$, x_0 es *punto ordinario* de $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y = 0$ y existe solución analítica $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$. Si x_0 es *singular regular*, use **Frobenius**: $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^{n+r}$; r satisface la ecuación indicial.

Ejercicio. Considere $y'' - xy = 0$ en torno a $x_0 = 0$.

(a) Obtenga la recurrencia para a_n y calcule los primeros 6 coeficientes no nulos de las dos soluciones linealmente independientes (hasta x^{10}).

(b) Determine el radio de convergencia.

Solución. Reconocemos $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = -x$, entonces como $P(x) = 1$, cualquier x_0 cumple $P(x_0) \neq 0$ y por lo tanto, x_0 es un punto ordinario. Vamos a resolver la EDO alrededor de $x_0 = 0$. Asumimos que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ \ |x| < \infty.$$

Entonces,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 0\\
2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n &= 0.
\end{aligned}$$

Para que esto ocurra para todo x en un intervalo $|x| < \rho$, cada coeficiente debe ser cero.

$$2a_2 = 0 \implies a_2 = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0, \ \forall \ \geq 1$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \ n = 1, 2, ...$$

Como $a_2 = 0, a_5 = 0, a_8 = 0 \implies a_{3n+2} = 0, \forall \ n \geq 0$. Ahora bien, fijando a_0:

$$a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \ a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \ a_9 = \frac{a_6}{9 \cdot 8} = \frac{a_0}{0 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Esto es,

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(3n)(3n-1)\cdots(3(n-1))(3(n-1)-1)\cdots 3 \cdot 2}$$

Fijamos a_1. Luego,

$$a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \ a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \ a_{10} = \frac{a_7}{10 \cdot 9} = \frac{a_1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

Así,

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3n+1)(3n) \cdot (3(n-1)+1)(3(n-1))\cdots 4 \cdot 3}, \ \forall \ n \geq 1.$$

De este modo,

$$y(x) = a_0 \underbrace{\left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)\cdots(3n-1)(3n)}\right]}_{=y_1(x)}$$

$$+ a_1 \underbrace{\left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)\cdots(3n)(3n+1)}\right]}_{y_2(x)}.$$

Esto es

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x).$$

Queda una duda: ¿dónde es válido esto? Radio de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{3n+3}x^{3n+3}}{a_{3n}x^{3n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)} = 0 < 1 \implies \rho = \infty.$$

Esto es, $y_1(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Análogamente, $y_2(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, se tiene $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$ y $y_2'(0) = 1$. Por lo tanto,

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Como el Wronskiano es diferente de cero un punto, y_1, y_2 son l.i. y forman un conjunto fundamental de soluciones.

Ejercicio. Resuelva por Frobenius alrededor de $x = 0$: $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0(\star)$.

(a) Halle la ecuación indicial y sus raíces.

(b) Para $r = 1$, obtenga la recurrencia y a_1, a_2 (normalice $a_0 = 1$).

Solución. Si tuviéramos

$$2x^2y'' - xy' + y = 0,$$

que es de la forma

$$\underbrace{\alpha x^2 y'' + \beta x' + \gamma y = 0}_{\text{Cauchy-Euler}},$$

postulamos $y(x) = x^r$. Volviendo a $(\star)$

$$\begin{aligned} p(x) = -\frac{x}{2x^2} = -\frac{1}{2x} &: \quad \lim_{x\to 0} x^1 p(x) = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \\ q(x) = \frac{1+x}{2x^2} &: \quad \lim_{x\to 0} x^2 \frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Planteamos

$$\boxed{y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Incorporando estas expresiones en $(\star)$,

$$\begin{aligned} 2x^2 \sum_n (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} &- x \sum_n (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ &+ \sum a_n x^{n+r} + x \sum_n a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\underbrace{[2r(r-1)a_0 - ra_0 + a_0]}_{F(r)} x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [A] x^{n+r} = 0$$

$$A = 2(n+r)(n+r-1)a_n - (n+r)a_n + a_n + a_{n-1} = 0.$$

Obtenemos la ecuación indicial $F(r) = 0$

$$(2r(r-1) - r + 1)a_0 = 0$$

y la fórmula de recurrencia

$$[(n+r)(2n+2r-3)+1]a_n + a_{n-1} = 0.$$

Las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 1$ y $r_2 = 1/2$. Para cada r_i, resolvemos por recurrencia

$$\begin{aligned} [(n+1)(2n-1)+1]a_n &= -a_{n-1} \\ a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n(2n+1)}. \end{aligned}$$

a_0 es constante. Luego,

$$a_k = (-1)^k \frac{a_0}{k(2k+1)(k-1)(2k-1)\cdots 1\cdot 3} \frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{2\cdot 4\cdots(2k)} = \frac{(-1)^k 2^k a_0}{(2k+1)!}.$$

Así,

$$y_1(x) = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k a_0}{(2k+1)!} x^k,$$

cuyo radio de convergencia es $\rho = \infty$. Para $r_2 = 1/2$,

$$\begin{aligned}
((2n+1)(n-1)+1)a_n &= -a_{n-1} \\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \\
a_k &= (-1)^k \frac{a_0}{k! 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \\
a_k &= \frac{(-1)^k 2^k a_0}{(2k)!}.
\end{aligned}$$

Usando $a_0 = 1$

$$y_2(x) = x^{1/2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{(2k)!} x^k \right],$$

cuyo radio de convergencia es $\rho = \infty$. Finalmente, la solución general es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con radio de convergencia $\rho = \infty$.

Fundamento (Euler–Cauchy)

Para $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$, intente $y = x^r$ y obtenga $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$.
Casos: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$; raíz doble $\Rightarrow y = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x$; $a \pm ib \Rightarrow y = x^a [C_1 \cos(b \ln x) + C_2 \sin(b \ln x)]$.

Ejercicio. Euler–Cauchy aplicado Resuelva $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$ en $(0, \infty)$ y clasifique.

Solución. Indicial $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2$. Entonces $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$ (reales distintas).

Teorema de Frobenius (caso singular regular)

Considere la EDO

$$x^2y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2q(x)\big)y \;=\; x^2\big(y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)\big) = 0,$$

donde $x = 0$ es **punto singular regular**, es decir,

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad \text{(series convergentes para } |x| < \rho).$$

Sea la **ecuación indicial**

$$F(r) = r(r-1) + p_0\, r + q_0 = 0, \qquad \text{con raíces } r_1,\ r_2\ (r_1 \geq r_2 \text{ si son reales}).$$

Entonces, en $(0, \rho)$ o $(-\rho, 0)$ existe una solución de la forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)\, x^n\Big),$$

cuyos coeficientes satisfacen la **recurrencia general**

$$F(r+n)\, a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\big((r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\big) = 0, \qquad n \geq 1.$$

Para la **segunda solución** y_2 se tiene:

1. Si $r_1 - r_2 \notin \{0, 1, 2, \dots\}$, entonces

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)\, x^n\Big).$$

2. Si $r_1 = r_2$, existe

$$y_2(x) = y_1(x)\, \ln|x| + |x|^{r_1}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)\, x^n\Big).$$

3. Si $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N}$ (entero positivo), entonces puede tomarse

$$y_2(x) = a\, y_1(x)\, \ln|x| + |x|^{r_2}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)\, x^n\Big),$$

   pues en este caso aparecen resonancias ($F(r+n) = 0$ para algún n) que introducen el término logarítmico.

Ejercicio. Bessel $\nu = 0$ (serie corta y Frobenius) A partir de la EDO

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad (\nu = 0),$$

obtenga el desarrollo en serie de $J_0(x)$ *vía Frobenius* y escriba la serie hasta el término en x^6. Determine además el radio de convergencia.

Solución. **1)** Buscamos $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Entonces

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Sustituyendo en $x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0.$$

Agrupando los dos primeros sumandos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0.$$

En el segundo sumando hacemos el shift $n \mapsto n-2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

2) Ecuación indicial. El coeficiente de x^r (término con $n = 0$) da

$$r^2 a_0 = 0 \;\Rightarrow\; r = 0 \text{ (raíz doble, } a_0 \neq 0),$$

en concordancia con $r^2 - \nu^2 = 0$ para $\nu = 0$.

3) Recurrencia. Para $n \geq 1$, el coeficiente de x^{n+r} produce

$$(n+r)^2 a_n + a_{n-2} = 0.$$

Como $r = 0$, queda

$$n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}, \qquad n \geq 2,$$

y además $a_1 = 0$. Por lo tanto, *sólo aparecen términos pares.* Normalizando $a_0 = 1$:

$$a_2 = -\frac{1}{4}, \qquad a_4 = \frac{1}{64}, \qquad a_6 = -\frac{1}{2304}.$$

4) Serie de $J_0(x)$ hasta x^6. La solución regular en 0 es

$$J_0(x) = y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots$$

y, en forma cerrada (por inducción a partir de la recurrencia),

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \quad \Longrightarrow \quad J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

5) Radio de convergencia. Del término general

$$\left| \frac{a_{2(k+1)} x^{2(k+1)}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = \frac{|x|^2}{4(k+1)^2} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,$$

por lo que el *radio de convergencia es infinito* ($\rho = \infty$).

6) Nota sobre la segunda solución. Al ser la raíz indicial doble $r = 0$, existe una segunda solución independiente con término logarítmico,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big(J_0(x)\,\ln x + \text{serie par}\Big),$$

pero no se requiere para este ejercicio.

Ejercicio. Segunda solución con $\ln x$ para Bessel $\nu = 0$ Considere la ecuación de Bessel de orden cero

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Se sabe que $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots$ es la solución regular en $x = 0$.

(a) Use Frobenius con raíz indicial doble ($r = 0$) para buscar una segunda solución de la forma

$$y_2(x) = J_0(x)\,\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n}.$$

Encuentre una *recurrencia* para los b_n y calcule b_1 y b_2.

(b) Muestre que

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}H_n}{2^{2n}(n!)^2}, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

(c) Defina

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big(y_2(x) + (\gamma - \ln 2)\,J_0(x)\Big),$$

donde γ es la constante de Euler–Mascheroni. Verifique que

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big(\ln\frac{x}{2} + \gamma\Big)\,J_0(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}H_n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n},$$

y deduzca la expansión dominante cuando $x \to 0^+$.

Solución. (a) Recurrencia para b_n y primeros coeficientes. Plantee

$$y_2(x) = J_0(x)\,\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n}.$$

Al derivar, use que J_0 satisface la EDO y que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$. Al sustituir en $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$ y cancelar los términos que contienen $\ln x$ (se anulan porque J_0 es solución), queda una ecuación para la parte sin logaritmo:

$$x^2\big(J_0'(x)\cdot\tfrac{1}{x}\big) + x\cdot\big(J_0(x)\cdot\tfrac{1}{x}\big) + x^2\cdot 0 + x^2\sum_{n\ge 1}(2n)(2n-1)b_n x^{2n-2} + x\sum_{n\ge 1}(2n)b_n x^{2n-1} + x^2\sum_{n\ge 1} b_n x^{2n} = 0.$$

Es decir,

$$J_0'(x)\,x + J_0(x) + \sum_{n\ge 1}(2n)(2n-1)b_n x^{2n} + \sum_{n\ge 1}(2n)b_n x^{2n} + \sum_{n\ge 1} b_n x^{2n+2} = 0.$$

Agrupando, para $m \ge 1$ el coeficiente de x^{2m} da

$$(2m)^2 b_m + b_{m-1} + \big[\text{coef. de } x^{2m} \text{ en } J_0'(x)\,x + J_0(x)\big] = 0.$$

Usando $J_0(x) = \sum_{k\geq 0} \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$, se tiene

$$J_0'(x)\,x = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k\,2k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}, \qquad J_0(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

Por tanto, el coeficiente de x^{2m} en $J_0'(x)\,x + J_0(x)$ es

$$\frac{(-1)^m(2m)}{2^{2m}(m!)^2} + \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m!)^2}.$$

La **recurrencia** queda

$$(2m)^2 b_m + b_{m-1} + \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m!)^2} = 0, \qquad m \geq 1,$$

con $b_0 \equiv 0$. Para $m = 1$:

$$4\,b_1 + b_0 + \frac{(-1)^1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1} = 0 \;\Rightarrow\; 4b_1 - \frac{3}{4} = 0 \;\Rightarrow\; b_1 = \frac{3}{16}.$$

Para $m = 2$:

$$16\,b_2 + b_1 + \frac{(-1)^2 \cdot 5}{2^4 \cdot (2!)^2} = 0 \;\Rightarrow\; 16b_2 + \frac{3}{16} + \frac{5}{2^4 \cdot 4} = 0 \;\Rightarrow\; 16b_2 + \frac{3}{16} + \frac{5}{64} = 0,$$

de donde $16b_2 + \frac{12+5}{64} = 0 \Rightarrow 16b_2 + \frac{17}{64} = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{17}{1024}$.

(b) Fórmula cerrada. Se puede probar (por inducción o comparación con series conocidas) que

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n}(n!)^2}, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Con esta fórmula: $b_1 = \dfrac{(-1)^2 H_1}{2^2 \cdot 1} = \dfrac{1}{4}$ y $b_2 = \dfrac{(-1)^3 H_2}{2^4 \cdot (2!)^2} = -\dfrac{\frac{3}{2}}{16 \cdot 4} = -\dfrac{3}{128}$.

(c) Definición estándar de Y_0 y comportamiento para $x \to 0^+$. Por definición

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big(y_2(x) + (\gamma - \ln 2)\,J_0(x)\Big).$$

Sustituyendo $y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n\geq 1} b_n x^{2n}$ y la fórmula de b_n, se obtiene

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big(\ln\tfrac{x}{2} + \gamma\Big)\,J_0(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

Como $J_0(x) = 1 + O(x^2)$,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big(\ln\tfrac{x}{2} + \gamma\Big) + O(x^2), \qquad x \to 0^+.$$

II. Sistemas Lineales Autónomos

Fundamento (clasificación por autovalores)

Para $x' = Ax$ en $\mathbb{R}^2$:
• $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} < 0$: nodo estable. • $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} > 0$: nodo inestable. • signos opuestos: silla. • $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha < 0$: foco sumidero; $\alpha > 0$: foco fuente; $\alpha = 0$: centro (lineal).

Ejercicio. Resuelva $x' = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$ y clasifique el equilibrio. **Solución.** $x_1(t) = x_1(0)e^{-3t}$, $x_2(t) = x_2(0)e^{-t} \Rightarrow$ nodo estable.

Ejercicio. Silla Para $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x$: (a) autovalores/vectores y solución general; (b) clasificación. **Solución.** $\lambda = 3, -1$; $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. $x(t) = c_1 v_1 e^{3t} + c_2 v_2 e^{-t}$. Signos opuestos $\Rightarrow$ silla (inestable).

Ejercicio. Foco sumidero Resuelva y clasifique $x' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x$. **Solución.** $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$. $x(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \right)$. Foco espiral sumidero.

Ejercicio. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. (a) Muestre que $\lambda = 2$ es raíz doble y halle v. (b) Encuentre w con $(A - 2I)w = v$ y obtenga la solución general. (c) Clasifique. **Solución.** $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $(A - 2I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tome $w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. $x = c_1 v e^{2t} + c_2(vt + w)e^{2t}$. Nodo degenerado inestable.

Ejercicio. Reducción de orden Transforme $x'' + 5x' + 6x = 0$ al sistema $y' = Ay$ y clasifique. **Solución.** $y_1 = x,\ y_2 = x' \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$. Autovalores $-2, -3$: nodo estable.

Ejercicio. Matriz exponencial Explique por qué si $x' = Ax$ y $x(0) = x^0$, entonces $x(t) = e^{At}x^0$. **Solución.** $e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{(At)^k}{k!}$ satisface $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$ y $e^{A \cdot 0} = I$; por unicidad, $x(t) = e^{At}x^0$.

Ejercicio. Sistema 3×3 con autovalores reales. Resolver $x'(t) = Ax(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Describa además la dinámica del sistema.

Solución. 1) Autovalores. La suma de cada fila de A es 0, luego $\lambda_1 = 0$ con $v_1 = (1, 1, 1)^\top$. Para los vectores ortogonales a $(1, 1, 1)$ (subespacio $a + b + c = 0$) se cumple $Av = -3v$. Por tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$.

2) Autovectores.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3) Solución general.

$$x(t) = c_1 v_1 e^{0t} + c_2 v_2 e^{-3t} + c_3 v_3 e^{-3t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}.$$

Ejercicio. Nodo estable 2×2 (básico-intermedio) Considere

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} x.$$

Obtenga la solución general y clasifique el equilibrio $x = 0$.

Solución. 1) Autovalores y autovectores.

$$\lambda_1 = -1, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -4, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2) Solución general.

$$x(t) = c_1 v_1 e^{-t} + c_2 v_2 e^{-4t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}.$$

3) Clasificación. Ambos autovalores son negativos $\Rightarrow$ **nodo estable** (sumidero). Las trayectorias se alinean asintóticamente con la dirección de v_1.

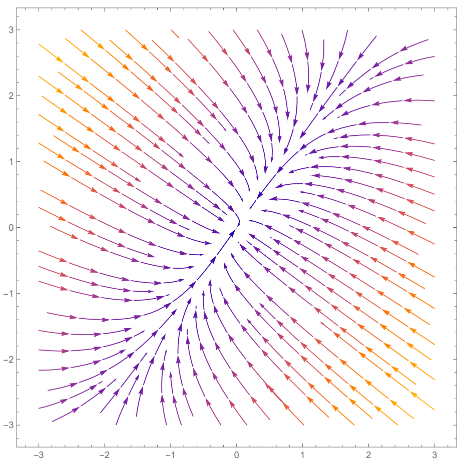

Figura 1: Nodo estable con direcciones propias v_1 y v_2.

Ejercicio. Nodo degenerado inestable. Resolver

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x,$$

y clasificar el equilibrio $x = 0$.

Solución. 1) Autovalores. El polinomio característico $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ tiene raíz doble $\lambda = 2$.

2) Autovector y vector generalizado.

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (A-2I)\beta = v \Rightarrow \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3) Solución general.

$$x(t) = c_1 v\, e^{2t} + c_2 (tv + \beta) e^{2t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^{2t}.$$

4) Clasificación. Como $\mathrm{Re}(\lambda) = 2 > 0$, el origen es **inestable**. Al existir un único autovector, se trata de un **nodo degenerado inestable**: las trayectorias emergen con cizallamiento.

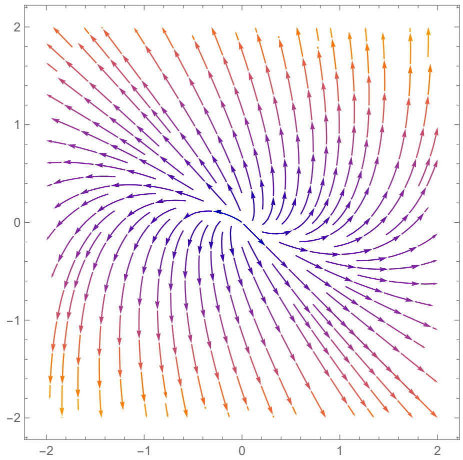

Figura 2: Nodo degenerado inestable. Las trayectorias salen del origen casi paralelas al vector $v = (1, -1)$.

Ejercicio. Foco espiral sumidero. Considere el sistema lineal

$$x' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x.$$

(a) Calcule los autovalores y un autovector complejo asociado.

(b) Obtenga dos soluciones *reales* linealmente independientes a partir del modo complejo y escriba la solución general real.

(c) Clasifique el equilibrio en $x = 0$ y comente la forma de las trayectorias.

Solución. (a) Espectro y autovector. Para $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, tenemos traza $\tau = -1$ y determinante $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. Luego

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i.$$

Para $\lambda = -\frac{1}{2} + i$,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -ia + b = 0 \;\Rightarrow\; b = ia.$$

Tomamos, por ejemplo, el autovector complejo $v = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

(b) Modos reales y solución general. Un modo complejo es $ve^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{bmatrix}$. Separando partes real e imaginaria obtenemos dos soluciones reales

$$x^{(1)}(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)}(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

La solución general real es

$$x(t) = c_1\, x^{(1)}(t) + c_2\, x^{(2)}(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix}.$$

(c) Clasificación y forma de trayectorias. Como $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -\frac{1}{2} < 0$, el origen es un **foco espiral sumidero** (asintóticamente estable). Las trayectorias describen espirales que decaen como $e^{-t/2}$ mientras rotan con frecuencia 1 (por la parte imaginaria $\pm i$).

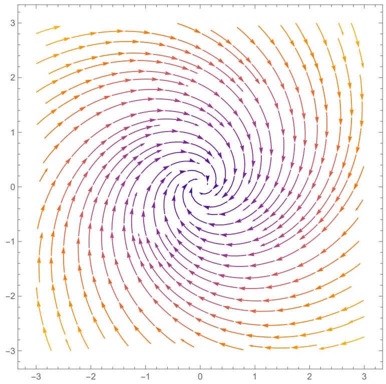

Figura 3: Diagrama de fases: foco espiral sumidero.