PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

MAT218 ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS

Primera práctica dirigida
Segundo semestre 2025

1 Clasificación de EDOs

Ejercicio 1.1. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales. Clasifíquelas (autónoma/no autónoma, lineal/no lineal, orden) y resuélvalas. *Notación:* $x = x(t)$, $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

a)
$$x' = (1-t)\,x.$$

b)
$$x' = x(1-x).$$

c)
$$x' + \frac{2}{t}\,x = t^2 \qquad (t > 0).$$

d)
$$x' + x = x^2.$$

e)
$$(2t\,x + 1)\,dt + \left(t^2 + e^x\right)dx = 0.$$

f)
$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

g)
$$x'' + x = \sin t.$$

h)
$$x = t\,x' + \left(x'\right)^2 \quad \text{(ecuación de Clairaut)}.$$

Solución.

a) Clasificación: no autónoma, lineal, orden 1.

$$\frac{x'}{x} = 1 - t \;\Rightarrow\; \ln|x| = t - \tfrac{t^2}{2} + C \;\Rightarrow\; x(t) = C\,e^{t-\frac{t^2}{2}}.$$

b) Clasificación: autónoma, no lineal (separable), orden 1.

$$\frac{dx}{x(1-x)} = dt \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + C \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{1+Ke^{-t}}.$$

c) Clasificación: no autónoma, lineal, orden 1 ($t > 0$). Factor integrante $\mu(t) = t^2$:

$$(t^2x)' = t^4 \;\Rightarrow\; t^2x = \tfrac{t^5}{5} + C \;\Rightarrow\; x(t) = \tfrac{t^3}{5} + C\,t^{-2}.$$

d) Clasificación: autónoma, no lineal (separable/Riccati simple), orden 1.

$$x' = x^2 - x \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x(x-1)} = dt \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = t + C \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{1 - Ce^t},$$

con soluciones constantes $x \equiv 0$ y $x \equiv 1$.

e) Clasificación: ecuación exacta, orden 1.

$$M(t,x) = 2tx + 1, \quad N(t,x) = t^2 + e^x, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} = 2t.$$

Potencial:

$$F(t,x) = xt^2 + t + e^x = C.$$

f) Clasificación: autónoma, lineal homogénea con coeficientes constantes, orden 2. Ecuación característica $r^2 - 3r + 2 = 0 \;\Rightarrow\; r = 1, 2$:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

g) Clasificación: no autónoma, lineal no homogénea, orden 2. Solución homogénea:

$$x_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Particular: $x_p = At\cos t$, entonces

$$x_p'' + x_p = \sin t \;\Rightarrow\; -2A\sin t = \sin t \;\Rightarrow\; A = -\tfrac{1}{2},$$

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \tfrac{t}{2}\cos t.$$

h) Clasificación: no lineal (Clairaut), orden 1. Forma general:

$$x(t) = C\,t + C^2, \qquad C \in \mathbb{R},$$

y solución singular:

$$x_s(t) = -\tfrac{t^2}{4}.$$

2 Teorema de existencia y unicidad

Ejercicio 2.1. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{4}{e^{x(t)} + 12(x(t))^2}.$$

(a) Identifique la función F y verifique que se cumplen las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad.

(b) Si $x = x(t)$ satisface la ecuación algebraica $e^x = -4(x(t))^3 + 4t$, pruebe que x es solución de la ecuación dada anteriormente.

Solución. Recordemos que

$$F(t,x) = \frac{4}{e^x + 12x^2}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Paso 1: Derivada parcial en x.

$$\partial_x F(t,x) = -\frac{4\,(e^x + 24x)}{(e^x + 12x^2)^2}.$$

Paso 2: Cota local. Sea $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Como $e^x + 12x^2 > 0$ para todo x, el denominador nunca se anula. Además, en cualquier rectángulo compacto

$$R = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

el numerador $e^x + 24x$ y el denominador $(e^x + 12x^2)^2$ son continuos y por tanto acotados. Luego existe $M > 0$ tal que

$$\big|\partial_x F(t,x)\big| \leq M, \qquad (t,x) \in R.$$

Paso 3: Desigualdad triangular. Para x, y en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, aplicamos el teorema del valor medio en la variable x:

$$F(t,x) - F(t,y) = \partial_x F(t,\xi)\,(x-y)$$

para algún ξ entre x y y. Tomando valor absoluto:[1]

$$|F(t,x) - F(t,y)| = \big|\partial_x F(t,\xi)\big| \cdot |x-y| \leq M\,|x-y|.$$

Conclusión. Hemos demostrado que F es *localmente Lipschitz* en la variable x en torno a (t_0, x_0), con constante de Lipschitz M. Por lo tanto, las hipótesis del Teorema de Picard–Lindelöf (Existencia y Unicidad) se cumplen, y el problema de valor inicial asociado tiene solución única.

Ejercicio 2.2. Sean $a(t)$ y $b(t)$ dos funciones continuas. ¿Por qué es posible asegurar que el problema de valor inicial

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

tiene una solución única?

Solución. Sea $F(t,x) = a(t)x + b(t)$ con a, b continuas. Dado t_0, en todo intervalo compacto $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ se cumple $L := \sup_{t \in I} |a(t)| < \infty$. Entonces, para $t \in I$ y cualesquiera x, y,

$$|F(t,x) - F(t,y)| = \big|a(t)(x-y)\big| \leq |a(t)|\,|x-y| \leq L\,|x-y|.$$

Así, F es Lipschitz local en x y continua; por Picard–Lindelöf, el PVI

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

tiene solución *única* (al menos local, y global en el dominio de a, b). Alternativamente, por factor integrante $\mu(t) = \exp\big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\big)$,

$$x(t) = \mu(t)^{-1}\left(x_0 + \int_{t_0}^t \mu(s)\,b(s)\,ds\right),$$

lo que exhibe unívocamente la solución.

Ejercicio 2.3. Pruebe que si una función F es localmente Lipschitz, entonces es continua.

Solución. Si F es localmente Lipschitz, para todo z_0 existe una vecindad U y $L > 0$ tales que

$$\|F(z) - F(w)\| \leq L\,\|z - w\| \qquad (z, w \in U).$$

Tomando $w = z_0$ y aplicando la desigualdad triangular,

$$\|F(z) - F(z_0)\| \leq L\,\|z - z_0\| \xrightarrow[z \to z_0]{} 0,$$

de donde F es continua en z_0. Como z_0 es arbitrario, F es continua.

[1] Notar que

$$|F(t,x_2) - F(t,x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \left|\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right| dx \leq L|x_2 - x_1|.$$

Ejercicio 2.4. Pruebe que el PVI:
$$x' = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$
tiene infinitas soluciones. Relacione esto con el Teorema de Existencia y Unicidad.

Solución. Para el PVI
$$x' = x^{1/3}, \qquad x(0) = 0,$$
se tiene que $F(x) = x^{1/3}$ es continua pero *no* es localmente Lipschitz en 0:
$$\frac{|F(x) - F(0)|}{|x - 0|} = \frac{|x|^{1/3}}{|x|} = \frac{1}{|x|^{2/3}} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty.$$
Por ello puede fallar la unicidad. Efectivamente, separando variables,
$$x^{-1/3}\,dx = dt \implies \tfrac{3}{2}x^{2/3} = t + C \implies x(t) = \Big(\tfrac{2}{3}(t+C)\Big)^{3/2} \quad (\text{rama } x \geq 0),$$
y además $x \equiv 0$ es solución. Para cualquier $\tau \geq 0$, defina
$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \Big(\tfrac{2}{3}(t-\tau)\Big)^{3/2}, & t \geq \tau, \end{cases}$$
que satisface $x_\tau(0) = 0$ y verifica $x_\tau' = x_\tau^{1/3}$ (cálculo directo). Por tanto hay *infinitas* soluciones, coherente con la no-Lipschitzianidad en el dato inicial.

2.1 Opcionales

Ejercicio 2.5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua tal que, para cierto $c > 0$, se cumple*
$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq c\,|x-y|, \qquad \text{para todo } (t,x),(t,y) \in U.$$
Considere un punto $(t_0, x_0) \in U$. Sean $a, b > 0$ tales que
$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset U,$$
y sea $M > 0$ el máximo de $|f|$ en R. Tome $\delta > 0$ tal que
$$\delta < \min\left\{\tfrac{b}{M}, \tfrac{1}{c}\right\},$$
y defina los intervalos $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y $J = [x_0 - b, x_0 + b]$. Sea $X = \mathcal{C}(I, J)$ el espacio de funciones continuas $x : I \to J$, provisto de la métrica del supremo
$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{t \in I} |x_1(t) - x_2(t)|.$$
Para cada $x \in X$, defina el operador $\Gamma : X \to X$ dado por
$$(\Gamma x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds, \qquad t \in I.$$

(a) Demuestre que, si $x \in X$, entonces $\Gamma x \in X$. Concluya que Γ está bien definido como aplicación de X en X.

(b) Pruebe que Γ es una contracción en (X, ρ) y, en consecuencia, concluya que existe una única función $x : I \to J$ que satisface la ecuación diferencial
$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ejercicio 2.6. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que, dado un punto $(t_0, x_0) \in U$, el problema de valor inicial*
$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$
tiene al menos una solución φ definida sobre un intervalo que contiene a t_0 en su interior.[2]

[2] El ejercicio anterior garantiza la existencia de alguna solución (sin asegurar unicidad), mientras que el ejercicio previo —formulado en términos del operador de contracción Γ y la condición de Lipschitz en la variable x— muestra que, bajo hipótesis más fuertes, se obtiene no sólo la existencia sino también la unicidad de la solución al problema de valor inicial. Así, ambos resultados se complementan: la continuidad de f basta para existencia, y la condición de Lipschitz añade unicidad.

3 Ecuaciones autónomas

Ejercicio 3.1 (Modelo de Malthus y recursos limitados)**.** Considere el modelo de Malthus para la población:

$$P'(t) = rP(t), \qquad P(t_0) = P_0,$$

y el modelo de crecimiento lineal para los recursos:

$$R'(t) = a, \qquad R(t_0) = R_0,$$

con $r > 0$ y $a > 0$.

(a) Describa cualitativamente el comportamiento de $P(t)$ y $R(t)$. ¿Por qué se dice que la población crece "geométricamente" mientras los recursos lo hacen "aritméticamente"?

(b) Explique el significado del punto de intersección entre las curvas $P(t)$ y $R(t)$. ¿Por qué se denomina "catástrofe malthusiana" al instante t_c en el cual se cruzan?

(c) Analice cómo cambiaría t_c si aumenta la pendiente de la curva de recursos (por ejemplo, gracias a un avance tecnológico).

(d) Compare este modelo con el de Verhulst (siguiente ejercicio) ¿qué limitaciones tiene el modelo de Malthus y cómo las supera el modelo logístico?

Solución. Sea $P'(t) = rP(t)$, $P(t_0) = P_0$ con $r > 0$, y $R'(t) = a$, $R(t_0) = R_0$ con $a > 0$.

(a) Soluciones:

$$P(t) = P_0\, e^{r(t-t_0)}, \qquad R(t) = R_0 + a\,(t - t_0).$$

Crecimiento *geométrico* (multiplicativo): P se escala por un factor constante en intervalos iguales (exponencial). Crecimiento *aritmético* (aditivo): R aumenta en incrementos lineales constantes (lineal).

(b) El punto t_c con $P(t_c) = R(t_c)$ marca cuando la demanda (población) alcanza la oferta (recursos). Para $t > t_c$, $P > R$ y el modelo sugiere escasez: *catástrofe malthusiana.* El cruce resuelve

$$P_0 e^{r(t-t_0)} = R_0 + a(t - t_0).$$

En forma explícita (función de Lambert W), con $s = t - t_0$,

$$t_c = t_0 - \frac{1}{r}\, W\Big(-\frac{r}{a}\, P_0\, e^{-\frac{r}{a} R_0}\Big) - \frac{R_0}{a},$$

cuando existe solución real.

(c) Si aumenta a (mejora tecnológica), la recta R se eleva/empina. Entonces el cruce se *retrasa* (si existe): t_c *aumenta* con a. En términos cualitativos:

$$\frac{\partial t_c}{\partial a} > 0, \qquad \frac{\partial t_c}{\partial r} < 0, \qquad \frac{\partial t_c}{\partial P_0} < 0, \qquad \frac{\partial t_c}{\partial R_0} > 0.$$

(d) Malthus: $P'(t) = rP(t)$ implica crecimiento sin límite y sin retroalimentación por escasez; ignora capacidad de carga y ajustes endógenos. Verhulst (logístico):

$$P'(t) = rP(t)\Big(1 - \frac{P(t)}{K}\Big), \qquad K > 0,$$

introduce *retroalimentación negativa* y *capacidad de carga* K, con solución sigmoide que converge a K. Así supera la explosión malthusiana al endogenizar límites ambientales.

Ejercicio 3.2 (Modelo logístico y condición de Lipschitz)**.** Considere el modelo de crecimiento poblacional de Verhulst:

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right), \qquad P(t_0) = P_0, \quad r > 0, \ K > 0.$$

(a) Analice de manera cualitativa el comportamiento de las soluciones: ¿qué ocurre cuando $0 < P_0 < K$?, ¿qué sucede si $P_0 = 0$ o $P_0 = K$?, ¿y si $P_0 > K$?

(b) Muestre que $f(P) = rP(1-P/K)$ es globalmente Lipschitz en cualquier intervalo acotado y concluya qué implicación tiene esto para la existencia y unicidad de soluciones.

(c) Discuta por qué este modelo se considera una generalización del modelo de Malthus y explique qué se entiende por estabilidad asintótica en este contexto.

(d) Encuentre $P(t)$ en términos de los parámetros y comente.

Solución. Sea

$$P'(t) = rP(t)\Big(1 - \tfrac{P(t)}{K}\Big), \qquad P(t_0) = P_0, \quad r, K > 0.$$

(a) *Cualitativo.* Equilibrios: $P \equiv 0$ y $P \equiv K$. Si $0 < P_0 < K$, entonces $P(t)$ crece monótonamente y $P(t) \to K$. Si $P_0 = 0$ o $P_0 = K$, la solución es constante (equilibrio). Si $P_0 > K$, entonces $P'(t) < 0$ al inicio y $P(t)$ decrece monótonamente hacia K.

(b) *Lipschitz en intervalos acotados.* Con $f(P) = rP(1 - P/K)$ se tiene

$$f'(P) = r - \tfrac{2r}{K}\,P.$$

En cualquier intervalo acotado $I = [m, M]$,

$$|f'(P)| \le L := \max\big\{|r - \tfrac{2r}{K}m|,\ |r - \tfrac{2r}{K}M|\big\} \quad (P \in I),$$

y por el Lema del Valor Medio,

$$|f(P) - f(Q)| \le L\,|P - Q| \qquad (P, Q \in I).$$

Así, f es Lipschitz en todo intervalo acotado. Por Picard–Lindelöf: existencia y unicidad local; además, al ser f polinómica (crecimiento a lo sumo cúbico) y las soluciones permanecer acotadas ($0 \le P(t) \le \max\{P_0, K\}$), la solución se prolonga globalmente en t.

(c) *Relación con Malthus y estabilidad.* Para $P \ll K$, $P'(t) \approx rP(t)$ (modelo de Malthus). El término $1 - P/K$ introduce retroalimentación negativa que satura el crecimiento. Estabilidad asintótica: $P \equiv K$ es *estable asintóticamente* (toda solución con $P_0 > 0$ converge a K); $P \equiv 0$ es *inestable* (si $P_0 > 0$, se aleja de 0).

(d) *Solución explícita.* Separando variables:

$$\frac{dP}{P(1 - P/K)} = r\,dt \implies \ln\Big|\tfrac{P}{K-P}\Big| = r(t - t_0) + C.$$

Con $P(t_0) = P_0$,

$$P(t) = \frac{K}{1 + \Big(\dfrac{K - P_0}{P_0}\Big)e^{-r(t-t_0)}}.$$

Comentarios: sigmoide con punto de inflexión en $P = K/2$; tasa de crecimiento máxima $rK/4$; $P(t) \to K$ cuando $t \to \infty$ si $P_0 > 0$.

Ejercicio 3.3 (Ley de enfriamiento de Newton)**.** Sea $T(t)$ la temperatura de un objeto en el instante t y T_a la temperatura constante del ambiente. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, $T(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$T'(t) = -k\big(T(t) - T_a\big), \qquad k > 0.$$

(a) Clasifique la ecuación diferencial (orden, linealidad, tipo de coeficientes).

(b) Obtenga la solución general de $T(t)$ en función de $T(0) = T_0$, la condición inicial.

(c) Analice cualitativamente el comportamiento de $T(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Qué sucede si $T_0 > T_a$?, ¿y si $T_0 < T_a$?

(d) Interprete físicamente la constante k. ¿Qué ocurre si k es muy grande o muy pequeño?

Solución.

(a) EDO de *primer orden*, *lineal* en T con *coeficientes constantes* (afín):

$$T'(t) + k\,T(t) = k\,T_a.$$

Además es *autónoma* (no depende explícitamente de t).

(b) Sea $y(t) = T(t) - T_a$. Entonces $y'(t) = -k\,y(t)$ y

$$y(t) = y(0)\,e^{-kt} = (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

Por tanto,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\,e^{-kt}.$$

(c) Límite asintótico:

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = T_a.$$

Si $T_0 > T_a$, $T(t) \downarrow T_a$ monótonamente; si $T_0 < T_a$, $T(t) \uparrow T_a$ monótonamente. La convergencia es exponencial con tasa k.

(d) k mide la *velocidad de relajación* hacia T_a (proporcional al coeficiente de transferencia de calor en el modelo lumped). Si k es grande, el ajuste es rápido; si k es pequeño, el ajuste es lento.

4 Ecuaciones lineales de primer orden

Ejercicio 4.1. Considere la ecuación lineal autónoma

$$x'(t) + a\,x(t) = k, \qquad a > 0,\ k \in \mathbb{R}.$$

Encuentre la solución general y clasifique la ecuación (orden, linealidad, autonomía).

Solución. Procedemos por el método del factor integrante:

$$\begin{aligned}
x' + ax &= k \\
e^{at}x' + e^{at}x &= ke^{at} \\
\frac{d}{dt}[e^{at}x] &= ke^{at} \\
\int \frac{d}{dt}[e^{at}x]dt &= \int ke^{at}dt \\
e^{at}x &= \frac{k}{a}e^{at} + C \\
x(t) &= \frac{k}{a} + Ce^{-at}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.2. Considere la ecuación lineal

$$x'(t) + a\,x(t) = k\,t, \qquad a > 0,\ k \in \mathbb{R}.$$

Obtenga la solución general utilizando factor integrante y comente su comportamiento asintótico.

Solución. De manera similar:

$$\begin{aligned}
x' + ax &= kt\\
e^{at}x' + e^{at}x &= ke^{at}t\\
\frac{d}{dt}[e^{at}x] &= ke^{at}t\\
\int \frac{d}{dt}[e^{at}x]dt &= \int ke^{at}tdt\\
e^{at}x &= \frac{k}{a}te^{at} - \frac{k}{a^2}e^{at} + C\\
x(t) &= \frac{k}{a}t - \frac{k}{a^2} + Ce^{-at}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3. Considere la ecuación lineal

$$x'(t) + x(t) = \cos t.$$

Halle la solución general y describa el término transitorio y el término forzado.

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned}
x' + x &= \cos t\\
e^{t}x' + e^{t}x &= e^{t}\cos t\\
\frac{d}{dt}[e^{t}x] &= e^{t}\cos t\\
\int \frac{d}{dt}[e^{t}x]dt &= \int e^{t}\cos tdt\\
e^{t}x &= \frac{e^{t}(\cos t + \sin t)}{2} + C\\
x(t) &= \frac{\cos t + \sin t}{2} + Ce^{-t}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.4. Sea la ecuación lineal

$$x'(t) + a\,x(t) = A\sin(\omega t), \qquad a, A, \omega > 0.$$

Encuentre la solución general y describa la respuesta en régimen permanente.

Solución. Sea ahora la EDO $x' + ax = A\sin(\omega t)$. Tenemos que

$$\int \frac{d}{dt}[e^{at}x]dt = \int A\sin(\omega t)e^{at}dt.$$

Luego, calculamos $\int A\sin\omega te^{at}dt$ por partes dos veces:

$$\begin{aligned}
\int A\sin(\omega t)e^{at}dt &= A\sin(\omega t)\frac{e^{at}}{a} - \frac{A}{a}\int \omega\cos(\omega t)e^{at}dt\\
&= A\sin(\omega t)\frac{e^{at}}{a} - \frac{A\omega}{a^2}\cos(\omega t)e^{at} - \frac{A\omega^2}{a^2}\int \sin(\omega t)e^{at}dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int A\sin(\omega t)e^{at}dt\left[1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right] = A\sin(\omega t)\frac{e^{at}}{a} - \frac{A\omega}{a^2}\cos(\omega t)e^{at}.$$

O sea,

$$\int A\sin(\omega t)e^{at}dt = \frac{A}{a^2+\omega^2}\left[a\sin\omega t - \omega\cos t\right]e^{at} + C.$$

De este modo,

$$x(t) = \frac{A}{a^2+\omega^2}\left[a\sin\omega t - \omega\cos t\right] + Ce^{-at}.$$

Ejercicio 4.5. Considere el problema lineal con término no homogéneo continuo por partes

$$x(t) - 2\,x'(t) = f(t), \qquad f(t) = \begin{cases} 4t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

junto con la condición $x(0) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = 0$. Plantee la forma de la solución en $t < 0$ y $t \geq 0$ y derive las constantes usando la condición de borde en $t = 0$.

Solución. Por un lado,

$$\begin{aligned} 2x' - x &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dt}{2} \\ \ln x &= \frac{t}{2} + C \\ x(t) &= Ce^{t/2},\ t < 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2x' - x &= 4t \\ \left(e^{-t/2}x\right)' &= 2te^{-t/2} \\ e^{-t/2}x &= \int 2te^{-t/2}\,dt \\ x(t) &= C_1e^{t/2} - 4t - 8, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = C_1 - 8,$$

lo que implica que $C_1 = 0$. Para tener continuidad, podemos tomar $C = 0$.

Ejercicio 4.6. Para la ecuación lineal general de primer orden

$$x'(t) + p(t)\,x(t) = g(t),$$

1. muestre que si $g \equiv 0$, entonces toda solución tiene la forma $x(t) = C\,e^{-\int p(t)\,dt}$;
2. si $g \not\equiv 0$ y se propone $x(t) = A(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}$, deduzca la ecuación diferencial que debe satisfacer $A'(t)$.

Solución.

$$\begin{aligned} x'(t) + p(t)x(t) &= 0 \\ e^{\int p(t)\,dt}\left[x'(t) + p(t)x(t)\right] &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left[e^{\int p(t)\,dt}\,x(t)\right] &= 0 \\ e^{\int p(t)\,dt}\,x(t) &= A \\ x(t) &= Ae^{-\int p(t)\,dt}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $x(t) = A(t)e^{-\int p(t)\,dt}$,

$$x'(t) = A'(t)e^{-\int p(t)\,dt} - A(t)p(t)e^{-\int p(t)\,dt}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x'(t) + p(t)x(t) &= A'(t)e^{-\int p(t)\,dt} - A(t)p(t)e^{-\int p(t)\,dt} + p(t)A(t)e^{-\int p(t)\,dt} \\ &= A'(t)e^{-\int p(t)\,dt} \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Ejercicio 4.7. Considere el PVI

$$v'(t) = mg - k\,v(t)^2, \qquad v(0) = 0, \qquad m, g, k > 0.$$

Resuélvalo y analice el comportamiento de la solución en función de los parámetros.

Solución. Usamos variables separables:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= mg - kv^2 \\
\frac{dv}{mg - kv^2} &= dt \\
\frac{dv}{mg\left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right)} &= dt \\
\frac{dv}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v\right)^2} &= mgdt \\
\frac{1}{1-u^2}du &= \sqrt{\frac{k}{mg}}dt \\
\int \frac{1}{1-u^2}du &= \int \sqrt{\frac{k}{mg}}dt \\
\int \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right] du &= \int \sqrt{\frac{k}{mg}}dt \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| &= \sqrt{\frac{k}{mg}}t + C \\
\ln\left|\frac{1+u}{u-1}\right| &= 2\sqrt{\frac{k}{mg}}t + C_1 \\
\frac{u+1}{u-1} &= Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t} \\
u + 1 &= uCe^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t} - Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t} \\
u\left(1 - Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t}\right) &= -1 - Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t} \\
u &= \frac{1 + Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t}}{Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t} - 1} \\
v(t) &= \sqrt{\frac{mg}{k}}\left[\frac{1 + Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t}}{Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t} - 1}\right] \\
&= \sqrt{\frac{mg}{k}}\left[1 - \frac{2}{Ce^{2\sqrt{\frac{k}{mg}}t} - 1}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Ejercicio 4.8. Resuelva la EDO separable

$$T'(t) = k\big(T(t)^4 - T_0^4\big), \qquad k, T_0 \in \mathbb{R},\ T_0 > 0.$$

Solución. Tenemos, por el método de variables separables

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{T^4 - T_0^4} &= kdt \\
\frac{dT}{(T^2+T_0^2)(T^2-T_0^2)} &= kdt \\
\left(\frac{A}{T^2+T_0^2} + \frac{B}{T^2-T_0^2}\right) dT &= kdt \\
\frac{1}{2T_0^2}\left[\frac{1}{T^2-T_0^2} - \frac{1}{T^2+T_0^2}\right] &= kdt \\
\frac{1}{T^2-T_0^2} - \frac{1}{T^2+T_0^2} &= 2T_0^2 kdt \\
\frac{1}{T_0^2\left(\frac{T^2}{T_0^2}-1\right)} - \frac{1}{T_0^2\left(\frac{T^2}{T_0^2}+1\right)} &= 2T_0^2 kdt \\
\frac{1}{\frac{T^2}{T_0^2}-1} - \frac{1}{\frac{T^2}{T_0^2}+1} &= 2T_0^4 kdt \\
T_0\left[\frac{1}{\theta^2-1} - \frac{1}{\theta^2+1}\right] &= 2T_0^4 kdt
\end{aligned}
$$

donde $\theta = \frac{T}{T_0}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\theta^2-1} - \frac{1}{\theta^2+1} &= 2T_0^3 kdt \\
\frac{1}{2}\ln|\theta-1| - \frac{1}{2}\ln|\theta+1| - \arctan(\theta) &= 2T_0^3 kt + C \\
\ln|\theta-1| - \ln|\theta+1| - 2\arctan(\theta) &= 4T_0^3 kt + C \\
\ln|T-T_0| - \ln|T+T_0| + \arctan\frac{T}{T_0} &= 4T_0^3 kt + C.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.9. Para el modelo de Walras con demanda $D(p) = a - bp$ y oferta $S(p) = c + dp$ ($a, b, c, d > 0$, $a > c$), la dinámica de precios es

$$p'(t) = k\,[D(p(t)) - S(p(t))] = -k(b+d)\,p(t) + k(a-c), \qquad k > 0.$$

(a) Resuelva la EDO y muestre que toda trayectoria converge a

$$p^* = \frac{a-c}{b+d}.$$

(b) Interprete p^* (equilibrio $D(p^*) = S(p^*)$) y explique por qué es globalmente atrayente.

Solución. Sea

$$p'(t) + k(b+d)\,p(t) = k(a-c), \qquad p(0) = p_0.$$

Factor integrante $\mu(t) = e^{k(b+d)t}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{k(b+d)t}p(t)\right) = k(a-c)\,e^{k(b+d)t}.$$

Integramos:

$$e^{k(b+d)t}p(t) = \frac{k(a-c)}{k(b+d)}\,e^{k(b+d)t} + C \quad \Longrightarrow \quad p(t) = \frac{a-c}{b+d} + C\,e^{-k(b+d)t}.$$

Con $p(0) = p_0$ se obtiene $C = p_0 - \frac{a-c}{b+d}$. Por tanto,

$$p(t) = p^* + (p_0 - p^*)\,e^{-k(b+d)t}, \qquad p^* = \frac{a-c}{b+d}.$$

Interpretación: p^* satisface $D(p^*) = S(p^*)$, es el precio de equilibrio competitivo. Como $k(b+d) > 0$, el término transitorio decae exponencialmente y

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$$

para todo $p_0 \in \mathbb{R}$. Así, p^* es un equilibrio globalmente atrayente.

Ejercicio 4.10. Resuelva los siguientes PVI (use $x = x(t)$):

(a) $x' = -2x, \quad x(0) = 2.$

(b) $x' = x + 10, \quad x(0) = 1.$

(c) $x' = x + t, \quad x(0) = -2.$

(d) $x' = -2x + t^2, \quad x(0) = 1.$

(e) $x' = 3t\,x + 4t, \quad x(0) = 2.$

(f) $x' + 4x = f(t), \quad x(0) = x_0$, con

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3, \\ t-3, & t \ge 3. \end{cases}$$

Ejercicio 4.11. (*Learning Curve Model*) Sea $A = A(t)$ el nivel de conocimiento, con dinámica

$$A'(t) = a\big(K - A(t)\big), \qquad A(t_0) = A_0 < K, \quad a > 0,\ K > 0.$$

(a) Discuta la lógica del modelo: ¿por qué la tasa instantánea A' es proporcional a la brecha $K - A$?

(b) Resuelva la EDO y obtenga $A(t)$.

(c) Pruebe que $A(t)$ es monótonamente creciente y que $\lim_{t\to\infty} A(t) = K$. Interprete el resultado.

Solución.

(a) La hipótesis $A'(t) = a\,(K - A(t))$ postula rendimientos decrecientes del aprendizaje: cuanto mayor es la brecha $K - A$, más rápido se aprende; a medida que A se acerca a K, la ganancia marginal se reduce proporcionalmente a dicha brecha.

(b) EDO lineal con coeficientes constantes:

$$A'(t) + aA(t) = aK.$$

Sea $B(t) = A(t) - K$. Entonces $B'(t) = -aB(t)$ y, con $A(t_0) = A_0$,

$$A(t) = K + \big(A_0 - K\big)e^{-a(t-t_0)} = K - \big(K - A_0\big)e^{-a(t-t_0)}.$$

(c) Si $A_0 < K$, entonces $K - A_0 > 0$ y

$$A'(t) = a\,(K - A(t)) = a\big(K - A_0\big)e^{-a(t-t_0)} > 0,$$

por lo que A es estrictamente creciente. Además,

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = K,$$

pues $e^{-a(t-t_0)} \to 0$. Interpretación: K es el nivel asintótico de conocimiento (límite de aprendizaje); el parámetro a fija la rapidez de convergencia (tiempo característico $1/a$).

Profesor del curso: Marcelo Flamarion

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 22 de agosto del 2025.