PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

MAT218 ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS

Primera práctica dirigida
Segundo semestre 2025

1 Clasificación de EDOs

Ejercicio 1.1. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales. Clasifíquelas (autónoma/no autónoma, lineal/no lineal, orden) y resuélvalas. *Notación:* $x = x(t)$, $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

a)
$$x' = (1-t)\,x.$$

b)
$$x' = x(1-x).$$

c)
$$x' + \frac{2}{t}\,x = t^2 \qquad (t > 0).$$

d)
$$x' + x = x^2.$$

e)
$$(2t\,x + 1)\,dt + \left(t^2 + e^x\right)dx = 0.$$

f)
$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

g)
$$x'' + x = \sin t.$$

h)
$$x = t\,x' + \left(x'\right)^2 \quad \text{(ecuación de Clairaut)}.$$

2 Teorema de existencia y unicidad

Ejercicio 2.1. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{4}{e^{x(t)} + 12(x(t))^2}.$$

(a) Identifique la función F y verifique que se cumplen las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad.

(b) Si $x = x(t)$ satisface la ecuación algebraica $e^x = -4(x(t))^3 + 4t$, pruebe que x es solución de la ecuación dada anteriormente.

Ejercicio 2.2. Sean $a(t)$ y $b(t)$ dos funciones continuas. ¿Por qué es posible asegurar que el problema de valor inicial

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

tiene una solución única?

Ejercicio 2.3. Pruebe que si una función F es localmente Lipschitz, entonces es continua.

Ejercicio 2.4. Pruebe que el PVI:

$$x' = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

tiene infinitas soluciones. Relaciones esto con el Teorema de Existencia y Unicidad.

2.1 Opcionales

Ejercicio 2.5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua tal que, para cierto $c > 0$, se cumple*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq c\,|x - y|, \qquad \textit{para todo } (t,x),(t,y) \in U.$$

Considere un punto $(t_0, x_0) \in U$. Sean $a, b > 0$ tales que

$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset U,$$

y sea $M > 0$ el máximo de $|f|$ en R. Tome $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \min\left\{\tfrac{b}{M}, \tfrac{1}{c}\right\},$$

y defina los intervalos $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y $J = [x_0 - b, x_0 + b]$. Sea $X = \mathcal{C}(I, J)$ el espacio de funciones continuas $x : I \to J$, provisto de la métrica del supremo

$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{t \in I} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Para cada $x \in X$, defina el operador $\Gamma : X \to X$ dado por

$$(\Gamma x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad t \in I.$$

(a) Demuestre que, si $x \in X$, entonces $\Gamma x \in X$. Concluya que Γ está bien definido como aplicación de X en X.

(b) Pruebe que Γ es una contracción en (X, ρ) y, en consecuencia, concluya que existe una única función $x : I \to J$ que satisface la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ejercicio 2.6. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que, dado un punto $(t_0, x_0) \in U$, el problema de valor inicial*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

tiene al menos una solución φ definida sobre un intervalo que contiene a t_0 en su interior.[1]

[1] El ejercicio anterior garantiza la existencia de alguna solución (sin asegurar unicidad), mientras que el ejercicio previo —formulado en términos del operador de contracción Γ y la condición de Lipschitz en la variable x— muestra que, bajo hipótesis más fuertes, se obtiene no sólo la existencia sino también la unicidad de la solución al problema de valor inicial. Así, ambos resultados se complementan: la continuidad de f basta para existencia, y la condición de Lipschitz añade unicidad.

3 Ecuaciones autónomas

Ejercicio 3.1 (Modelo de Malthus y recursos limitados)**.** Considere el modelo de Malthus para la población:

$$P'(t) = rP(t), \qquad P(t_0) = P_0,$$

y el modelo de crecimiento lineal para los recursos:

$$R'(t) = a, \qquad R(t_0) = R_0,$$

con $r > 0$ y $a > 0$.

(a) Describa cualitativamente el comportamiento de $P(t)$ y $R(t)$. ¿Por qué se dice que la población crece "geométricamente" mientras los recursos lo hacen "aritméticamente"?

(b) Explique el significado del punto de intersección entre las curvas $P(t)$ y $R(t)$. ¿Por qué se denomina "catástrofe malthusiana" al instante t_c en el cual se cruzan?

(c) Analice cómo cambiaría t_c si aumenta la pendiente de la curva de recursos (por ejemplo, gracias a un avance tecnológico).

(d) Compare este modelo con el de Verhulst (siguiente ejercicio) ¿qué limitaciones tiene el modelo de Malthus y cómo las supera el modelo logístico?

Ejercicio 3.2 (Modelo logístico y condición de Lipschitz)**.** Considere el modelo de crecimiento poblacional de Verhulst:

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right), \qquad P(t_0) = P_0, \quad r > 0, \ K > 0.$$

(a) Analice de manera cualitativa el comportamiento de las soluciones: ¿qué ocurre cuando $0 < P_0 < K$?, ¿qué sucede si $P_0 = 0$ o $P_0 = K$?, ¿y si $P_0 > K$?

(b) Muestre que $f(P) = rP(1-P/K)$ es globalmente Lipschitz en cualquier intervalo acotado y concluya qué implicación tiene esto para la existencia y unicidad de soluciones.

(c) Discuta por qué este modelo se considera una generalización del modelo de Malthus y explique qué se entiende por estabilidad asintótica en este contexto.

(d) Encuentre $P(t)$ en términos de los parámetros y comente.

Ejercicio 3.3 (Ley de enfriamiento de Newton)**.** Sea $T(t)$ la temperatura de un objeto en el instante t y T_a la temperatura constante del ambiente. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, $T(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$T'(t) = -k\big(T(t) - T_a\big), \qquad k > 0.$$

(a) Clasifique la ecuación diferencial (orden, linealidad, tipo de coeficientes).

(b) Obtenga la solución general de $T(t)$ en función de $T(0) = T_0$, la condición inicial.

(c) Analice cualitativamente el comportamiento de $T(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Qué sucede si $T_0 > T_a$?, ¿y si $T_0 < T_a$?

(d) Interprete físicamente la constante k. ¿Qué ocurre si k es muy grande o muy pequeño?

4 Ecuaciones lineales de primer orden

Ejercicio 4.1. Considere la ecuación lineal autónoma

$$x'(t) + a\,x(t) = k, \qquad a > 0, \ k \in \mathbb{R}.$$

Encuentre la solución general y clasifique la ecuación (orden, linealidad, autonomía).

Ejercicio 4.2. Considere la ecuación lineal

$$x'(t) + a\,x(t) = k\,t, \qquad a > 0,\ k \in \mathbb{R}.$$

Obtenga la solución general utilizando factor integrante y comente su comportamiento asintótico.

Ejercicio 4.3. Considere la ecuación lineal

$$x'(t) + x(t) = \cos t.$$

Halle la solución general y describa el término transitorio y el término forzado.

Ejercicio 4.4. (De tu 1.d) Sea la ecuación lineal

$$x'(t) + a\,x(t) = A\sin(\omega t), \qquad a, A, \omega > 0.$$

Encuentre la solución general y describa la respuesta en régimen permanente.

Ejercicio 4.5. Considere el problema lineal con término no homogéneo continuo por partes

$$x(t) - 2\,x'(t) = f(t), \qquad f(t) = \begin{cases} 4t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

junto con la condición $x(0) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = 0$. Plantee la forma de la solución en $t < 0$ y $t \geq 0$ y derive las constantes usando la condición de borde en $t = 0$.

Ejercicio 4.6. Para la ecuación lineal general de primer orden

$$x'(t) + p(t)\,x(t) = g(t),$$

1. muestre que si $g \equiv 0$, entonces toda solución tiene la forma $x(t) = C\,e^{-\int p(t)\,dt}$;
2. si $g \not\equiv 0$ y se propone $x(t) = A(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}$, deduzca la ecuación diferencial que debe satisfacer $A'(t)$.

Ejercicio 4.7. Considere el PVI

$$v'(t) = mg - k\,v(t)^2, \qquad v(0) = 0, \qquad m, g, k > 0.$$

Resuélvalo y analice el comportamiento de la solución en función de los parámetros.

Ejercicio 4.8. Considere la EDO lineal

$$x'(t) + a\,x(t) = A\sin(\omega t), \qquad a, A, \omega > 0.$$

Resuélvala y analice el comportamiento de la solución en función de los parámetros.

Ejercicio 4.9. Resuelva la EDO separable

$$T'(t) = k\big(T(t)^4 - T_0^4\big), \qquad k, T_0 \in \mathbb{R},\ T_0 > 0.$$

Ejercicio 4.10. Para el modelo de Walras con demanda $D(p) = a - bp$ y oferta $S(p) = c + dp$ ($a, b, c, d > 0$, $a > c$), la dinámica de precios es

$$p'(t) = k\,[D(p(t)) - S(p(t))] = -k(b+d)\,p(t) + k(a-c), \qquad k > 0.$$

(a) Resuelva la EDO y muestre que toda trayectoria converge a

$$p^* = \frac{a-c}{b+d}.$$

(b) Interprete p^* (equilibrio $D(p^*) = S(p^*)$) y explique por qué es globalmente atrayente.

Ejercicio 4.11. Resuelva los siguientes PVI (use $x = x(t)$):

(a) $x' = -2x, \quad x(0) = 2.$

(b) $x' = x + 10, \quad x(0) = 1.$

(c) $x' = x + t, \quad x(0) = -2.$

(d) $x' = -2x + t^2, \quad x(0) = 1.$

(e) $x' = 3t\,x + 4t, \quad x(0) = 2.$

(f) $x' + 4x = f(t), \quad x(0) = x_0$, con

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3, \\ t-3, & t \geq 3. \end{cases}$$

Ejercicio 4.12. (*Learning Curve Model*) Sea $A = A(t)$ el nivel de conocimiento, con dinámica

$$A'(t) = a\big(K - A(t)\big), \qquad A(t_0) = A_0 < K, \quad a > 0,\ K > 0.$$

(a) Discuta la lógica del modelo: ¿por qué la tasa instantánea A' es proporcional a la brecha $K - A$?

(b) Resuelva la EDO y obtenga $A(t)$.

(c) Pruebe que $A(t)$ es monótonamente creciente y que $\lim_{t\to\infty} A(t) = K$. Interprete el resultado.

Profesor del curso: Marcelo Flamarion

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 22 de agosto del 2025.