DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

Course: MAT218 - Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Lista 1

1. (Modelo de población) Otro modelo de población está dado por

$$\frac{dP}{dt} = kP - h,$$

donde h y k son constantes positivas. ¿Para qué valor inicial $P(0) = P_0$ este modelo predice que la población desaparecerá?

2. (Velocidad terminal) Vimos que la ecuación diferencial autónoma

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

donde k es una constante positiva y g es la aceleración de la gravedad, es un modelo para la velocidad v de un cuerpo de masa m que cae bajo la influencia de la gravedad. Debido a que el término $-kv$ representa la resistencia del aire, la velocidad de un cuerpo que cae desde una gran altura no aumenta sin límite conforme incrementa el tiempo t. Utilice un diagrama de fase de la ecuación diferencial para encontrar la velocidad límite o terminal del cuerpo. Explique su razonamiento.

Suponga que el modelo del problema anterior se modifica de tal manera que la resistencia del aire es proporcional a v^2, es decir,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Utilice un esquema de fase para determinar la velocidad terminal del cuerpo. Explique su razonamiento.

3. * (“Blow-up”: alcanzar el infinito en tiempo finito) Muestre que la solución de $\dot{x} = 1 + x^{10}$ escapa a $+\infty$ en un tiempo finito, partiendo de cualquier condición inicial. *Sugerencia:* no intente hallar una solución exacta; en su lugar, compare con las soluciones de $\dot{x} = 1 + x^2$.

4. (Crecimiento tumoral) El crecimiento de tumores cancerosos puede modelarse mediante la ley de Gompertz

$$\dot{N} = -a\,N\,\ln(bN),$$

donde $N(t)$ es proporcional al número de células del tumor y $a, b > 0$ son parámetros.

   (a) Interprete a y b biológicamente.

(b) Esboce el campo vectorial y luego grafique $N(t)$ para varios valores iniciales.

Las predicciones de este modelo simple concuerdan sorprendentemente bien con los datos de crecimiento tumoral, siempre que N no sea demasiado pequeño; véanse Aroesty *et al.* (1973) y Newton (1980) como ejemplos.

5. Usando análisis de estabilidad lineal, clasifique los puntos fijos del modelo de crecimiento tumoral de Gompertz

$$\dot{N} = -a\,N\,\ln(bN).$$

(Como en el Ejercicio anterior, $N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros).

6. (Trabajando hacia atrás, de flujos a ecuaciones) Dada una ecuación $\dot{x} = f(x)$, sabemos cómo esbozar el flujo correspondiente en la recta real. Aquí se pide resolver el problema opuesto: para el retrato de fases mostrado en la Figura 1, encuentre una ecuación que sea consistente con él. (Hay un número infinito de respuestas correctas— y también erróneas.)

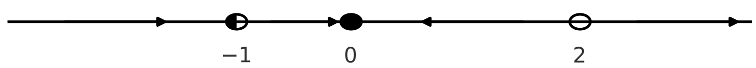

Figura 1:

7. * Mostramos que no era posible tener una solución de ciclo límite (periódica) para una ecuación simple de primer orden (sin retardo)

$$\frac{dN}{dt} = f(N).$$

Un aparente contraejemplo es $N(t) = 2 + \sin t$. Determine la función $f(N)$ para la cual esta es una solución de la ecuación diferencial y explique por qué no es un contraejemplo.

8. *** La depredación $P(N)$ sobre una población $N(t)$ es muy rápida y un modelo para la presa $N(t)$ satisface

$$\frac{dN}{dt} = R\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - P\left\{1 - \exp\left[-\frac{N^2}{\varepsilon A^2}\right]\right\}, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

donde R, K, P y A son constantes positivas. Mediante una adimensionalización apropiada, muestre que la ecuación es equivalente a

$$\frac{du}{d\tau} = r\,u\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \left(1 - \exp\left[-\frac{u^2}{\varepsilon}\right]\right),$$

donde r y q son parámetros positivos. Demuestre que hay tres posibles estados estacionarios no nulos si r y q pertenecen a una región en el plano (r, q) dada aproximadamente por $rq > 4$.

Referencias

[1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., Westview Press, Boulder, CO, 2015. ISBN 978-0813349107.

[2] J. D. Murray, *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd ed., Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 17, Springer, New York, 2002. ISBN 978-0387952239.

[3] J. D. Murray, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, 3rd ed., Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 18, Springer, New York, 2003. ISBN 978-0387952284.

[4] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2017. ISBN 978-1119443766.

[5] D. G. Zill, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 9th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965799.

[6] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 11th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965720.