Teoremas de existencia y unicidad

Marcelo Gallardo

August 20, 2025

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

Nota: puede contener typos.

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $f : X \to X$ una contracción: o sea, una función tal que para cierto $\lambda \in [0, 1)$, vale que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

(a) Sea $x_0 \in X$ arbitrario y para cada $n \in \mathbb{N}$ denote $x_n = f^{\circ n}(x_0)$. Demuestre que la sucesión (x_n) es de Cauchy.

(b) Dados $x_0, y_0 \in X$, considere órbitas (x_n) y (y_n) correspondientes según el acápite anterior. Demuestre que $d(x_n, y_n) \to 0$.

(c) Use lo anterior para demostrar el teorema de punto fijo de Banach:

Teorema 1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una contracción. Entonces, existe un único punto $a \in X$ tal que $f(a) = a$. Además, este punto fijo se obtiene como límite de la órbita $f^{\circ n}(x)$, cualesquiera que sea $x \in X$*

a) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$. Por la desigualdad triangular y usando la propiedad de contracción, como $d(f^{\circ m}(x_0), f^{\circ n}(x_0)) = d(x_m, x_n)$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\
&= \sum_{j=n}^{m} d(x_{j+1}, x_j) \\
&= \sum_{j=n}^{m} d(f^{\circ j+1}(x_0), f^{\circ j}(x_0)) \\
&\leq \sum_{j=n}^{m} \lambda^j d(f(x_0), x_0) \\
&= \lambda^n \left(\frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} \right) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(f(x_0), x_0).
\end{aligned}
$$

Si $f(x_0) = x_0$, por el ϵ principio, se obtiene lo solicitado directamente. Caso contrario, dado $\varepsilon > 0$, existe en efecto $N \in \mathbb{N}$, dado por

$$N = \max\left\{1, \left\lfloor \log_{1/\lambda}\left(\frac{d(f(x_0), x_0)}{\varepsilon(1-\lambda)}\right)\right\rfloor\right\},$$

tal que, dados cualquiera $m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

O sea, (x_n) es de Cauchy.

b) Dados $x_0, y_0 \in X$, $f : X \to X$, $x_n = f^{\circ n}(x_0)$ y $y_n = f^{\circ n}(y_0)$. Por la propiedad de contracción,

$$\begin{aligned}
d(x_1, y_1) &\leq \lambda d(x_0, y_0) \\
d(x_2, y_2) &\leq \lambda d(x_1, y_1) = \lambda^2 d(x_0, y_0) \\
&\vdots \\
d(x_n, y_n) &\leq \lambda^n d(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \lambda < 1$ y suponiendo $x_0 \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, tomando

$$N = \max\left\{1, \left\lfloor \log_{1/\lambda}\left(\frac{d(x_0, y_0)}{\varepsilon}\right)\right\rfloor\right\}$$

se cumple que $d(x_n, y_n) < \varepsilon$. O sea, $d(x_n, y_n) \to 0$. Si $x_0 = y_0$, el resultado es inmediato pues $d(x_0, y_0) = 0$.

c) Teorema del punto fijo de Banach (1).

Prueba. Como (X, d) es un espacio métrico completo, toda sucesión de Cauchy es convergente. Por ello, dado que (x_n) es de Cauchy, (x_n) es convergente, $\lim x_n = a$. Note que x_n se construye a partir de un $x \in X$ arbitrario. Así, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
d(a, f(a)) &\leq d(a, x_n) + d(x_n, f(a)) \\
&= d(a, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(a)) \\
&\leq d(a, x_n) + \lambda d(x_{n-1}, a).
\end{aligned}$$

Luego, dado que $x_n \to a$, $x_{n-1} \to a$ y λ está fijo

$$d(a, x_n) + \lambda d(x_{n-1}, a) \to 0.$$

Por ello, como $0 \leq d(a, f(a)) \leq 0$, concluimos que $a = f(a)$. O sea, a es un punto fijo. Queda por demostrar que este es único. Supongamos por contradicción que no es el caso. O sea, existe $\overline{a} \neq a$ tal que $\overline{a} = f(\overline{a})$. Entonces,

$$d(\overline{a}, a) = d(f(\overline{a}), f(a)) \leq \lambda \overline{a}.$$

Sin embargo, dado que $\lambda \in [0, 1)$, $d(\overline{a}, a) = 0$, i.e., $\overline{a} = a$. $\square$

2. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua tal que, para cierto $c > 0$, vale que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x - y|$ para cualesquiera $(t,x), (t,y) \in U$. Considere un punto $(t_0, x_0) \in U$. Tome $a, b > 0$ tales que

$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$$

está contenido en U y sea $M > 0$ el máximo de $|f|$ en R. Tome cualquier número positivo $\delta < \min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{c}\right\}$ y considere los intervalos compactos $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y $J = [x_0 - b, x_0 + b]$. Sabemos que el espacio $X = \mathcal{C}(I, J)$ con la métrica del supremo

$$\rho(f,g) = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|; \;\; f, g \in X \tag{1}$$

es un espacio métrico completo. Si $\varphi \in X$, observe que $(s, \varphi(s)) \in R$ para todo $s \in I$ y entonces podemos definir

$$\tilde{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds; \;\; t \in I. \tag{2}$$

(a) Dada $\varphi \in X$, demuestre que $\tilde{\varphi} \in X$. Por lo tanto, la correspondencia $\varphi \to \tilde{\varphi}$ define una función (operador) $\Gamma : X \to X$.

(b) Demuestre que $\Gamma : X \to X$ es una contracción y concluya que existe un única función $\varphi : I \to J$, solución de la ecuación diferencial $x' = f(t,x)$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

a) Para mostrar que $\tilde{\varphi} \in X = \mathcal{C}(I, J)$, hay que probar que $\tilde{\varphi}$ es continua y que $\tilde{\varphi} \in J$. Primero, f es continua. Luego, como $\varphi \in X$, φ también es continua. De este modo,

$$\tilde{\varphi} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

es a su vez continua. Queda probar que $\tilde{\varphi}(t) \in J$. En efecto, ya se tiene por la definición de (2) que $t \in I$. Como $\delta < b/M$ y aplicando las propiedades usuales de $|\cdot|$,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\varphi}(t) - x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds - x_0 \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s))|ds \right| \\
&\leq M \left| \int_{t_0}^{t} ds \right| \\
&= M|(t - t_0)| \\
&\leq M\delta \\
&< M\frac{b}{M} = b.
\end{aligned}$$

b) Probemos primero que Γ es una contracción. Es decir, que existe $\lambda \in [0,1)$ tal que

$$\rho(\Gamma(\varphi_1), \Gamma(\varphi_2)) \leq \lambda \rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Recordemos que $\delta < 1/c$ y para cierto $c > 0$, vale que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x-y|$ para cualesquiera $(t,x),(t,y) \in U$. Así, dados $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, usando (2)

$$\begin{aligned}
|\Gamma(\varphi_1(t)), \Gamma(\varphi_2(t))| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_2(s))ds \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_2(s))ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} c|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \right|.
\end{aligned}$$

Luego, por la definición de ρ dada en (1),

$$\left| \int_{t_0}^{t} c|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} c \cdot \rho(\varphi_1, \varphi_2) ds \right|.$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
|\Gamma(\varphi_1(t)), \Gamma(\varphi_2(t))| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} c|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} c \cdot \rho(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| \\
&= c|(t - t_0)|\rho(\varphi_1, \varphi_2) \\
&\leq c\delta\rho(\varphi_1, \varphi_2) \\
&< \rho(\varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

Esto implica que existe $\lambda \in [0,1)$, $\lambda = c\delta$ tal que sin importar $t \in I$,

$$|\Gamma(\varphi_1(t)), \Gamma(\varphi_2(t))| \leq c\delta\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \lambda\rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

O sea,

$$\rho(\Gamma(\varphi_1), \Gamma(\varphi_2)) = \sup_{t \in I} |\Gamma(\varphi_1(t)), \Gamma(\varphi_2(t))| \leq \lambda\rho(\varphi_1, \varphi_2),\ \lambda \in [0,1).$$

De este modo, puesto que $\Gamma : X \to X$ define una contracción, por el Teorema (1), existe un único $\overline{\varphi} \in X$ tal que $\Gamma(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$. Más específicamente, existe una única función $\overline{\varphi} : I \to J$, con $\overline{\varphi}(t_0) = x_0$, $\overline{\varphi}(t) \in J\ \forall\ t \in I$, tal que $\Gamma(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$. Esto es,

$$\overline{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{\varphi}(s))ds,\ t \in I.$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo (o la Regla de Leibniz), para $t \in I^\circ$[1]

$$\overline{\varphi}'(t) = f(t, \overline{\varphi}(t)),$$

lo cual prueba que el problema de valor inicial

$$PVI : \begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{3}$$

tiene solución. En efecto, ciertamente $\overline{\varphi}(t_0) = x_0$ pues

$$\overline{\varphi}(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \overline{\varphi}(s))ds = x_0 + 0 = x_0.$$

Finalmente, por la unicidad de $\overline{\varphi}$, se culmina con lo solicitado[2].

3. Use el ejercicio anterior para demostrar el siguiente teorema de existencia de unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias:

Teorema 2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua tal que, para cierto $c > 0$, vale que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x - y|$ para cualesquiera $(t,x),(t,y) \in U$. Considere un punto $(t_0, x_0) \in U$. Entonces existe una solución $\varphi : I \to \mathbb{R}$ - donde I es un intervalo que contiene a t_0 en su interior - del problema de valor inicial*

$$x'(t) = f(t,x), \ x(t_0) = x_0.$$

Además, si φ_1, φ_2 son dos tales soluciones, ellas coinciden en una vecindad de t_0.

Siguiendo los desarrollos previos, probas (2) de la siguiente manera.

Prueba. El primer paso es definir la siguiente sucesión

$$\begin{cases} \varphi_0 &= x_0 \\ \varphi_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s))ds. \end{cases}$$

Luego, tomemos $a, b > 0$ tales que

$$K = \overline{B}(t_0, a) \times \overline{B}(x_0, b) \subset U,$$

y definamos

$$\delta = \min\{1/c, b/M, a\},$$

siendo

$$M = \max_{(t,x)\in K} |f|.$$

[1] $t \in B(t_0, \epsilon)$, $0 < \epsilon \leq \delta$.

[2] Es sin embargo de interés preguntarse por la existencia de soluciones $g \notin X$. Esto será

Note que es posible tomar el máximo pues f es continua y K es compacto (producto cartesiano de compactos). Por convención, si $M = 0$, $b/M = \infty$. Luego, sea $I_\delta = \overline{B}(t_0, \delta)$ y $\Omega = I_\delta \times \overline{B}(x_0, b)$. Por inducción, supongamos que φ_k es continua y bien definida sobre I_δ con

$$\max_{I_\delta} |\varphi_k(t) - x_0| \leq b. \tag{4}$$

Puesto que f es continua sobre I_δ, por las propiedades de la integral de Riemann

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))ds$$

está bien definida y es continua sobre I_δ. Más aún, como $\delta < b/M$,

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_k(s))| ds \right| \leq M\delta < b,\ \ t \in I_\delta.$$

Así pues, queda establecido (4). Luego por la condición

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x-y|,\ \ \forall (t,x), (t,y) \in U,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\varphi_1(s)) - f(\varphi_0(s))| ds \right| \\
&\leq c \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \right| \\
&\leq c \cdot \max_{t \in I_\delta} |\varphi_1(t) - x_0| \\
&\leq c\delta b.
\end{aligned}$$

Ahora, por inducción veamos que

$$\max_{t \in I_\delta} |\varphi_\ell(t) - \varphi_{\ell-1}(t)| \leq (c\delta)^{\ell-1} b,\ \ \ell \geq 2. \tag{5}$$

Para cualquier $t \in I_\delta$

$$\begin{aligned}
|\varphi_{\ell+1}(t) - \varphi_\ell(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_\ell(s)) - f(s, \varphi_{\ell-1}(s))| ds \right| \\
&c \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi_\ell - \varphi\ell - 1| ds \right| \\
&c\delta \ \max_{t \in I_\delta} |\varphi_\ell(t) - \varphi_{\ell-1}(t)| \\
&\leq c\delta (c\delta)^{\ell-1} b = (c\delta)^\ell b.
\end{aligned}$$

tratado en las demostraciones de los Teoremas (2) y (3)

Así pues, (5) se cumple para todo ℓ natural. Note que, como $\delta < 1/c$, $c\delta < 1$. Enseguida, veamos que φ_ℓ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $m, n > N$, con

$$N = \max\left\{\left\lfloor \log_{c\delta}\left(\frac{b}{(1-c\delta)\varepsilon}\right)\right\rfloor, 1\right\}$$

se cumple que

$$||\varphi_m(t) - \varphi_n(t)||_\infty = \max_{t\in I_\delta} |\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| &\leq \sum_{\ell=n}^{m} |\varphi_{\ell+1}(t) - \varphi_\ell(t)| \\
&\leq \sum_{\ell=N}^{\infty} |\varphi_{\ell+1}(t) - \varphi_\ell(t)| \\
&\leq \sum_{\ell=N}^{\infty} (c\delta)^\ell b \\
&= \left(\frac{c^N\delta^N}{1-c\delta}\right) b.
\end{aligned}$$

Como $(\varphi_\ell(t))_{\ell\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y el espacio $C(I_\delta, \overline{B}(x_0, b))$ es un espacio métrico completo considerando $||\cdot||_\infty$ (análogo a (1)), $(\varphi_\ell(t))_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente[3] a una función $\overline{\varphi}(t)$, $t \in I_\delta$. Por ende, por la propiedad de permutación del límite con la integral en el caso de la convergencia uniforme:

$$\overline{\varphi}(t) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_\ell(t)$$

$$\varphi_{\ell+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_\ell(s))ds$$

$$\underbrace{\lim_{\ell\to\infty} \varphi_{\ell+1}(t)}_{=\overline{\varphi}(t)} = x_0 + \lim_{\ell\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_\ell(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{\varphi}(s))ds.$$

Con lo cual, por el Teorema Fundamental del Cálculo, concluimos que $\overline{\varphi}$ es solución del PVI (3) sobre $I = I_\delta$ (con $t_0 \in B(t_0, \epsilon)$, $0 < \epsilon \leq \delta$). Falta verificar que si ϕ es otra solución de (3), $\overline{\varphi}(t) = \phi(t)$ sobre una vecindad de t_0. Para esto, como $g = \overline{\varphi} - \phi$ es continua, alcanza su máximo en algún $\tilde{t} \in I_\delta$. Luego,

$$||\overline{\varphi} - \phi||_\infty = \max_{t\in I_\delta} |\overline{\varphi}(t) - \phi(t)|$$

[3] Sabemos que la norma $||\cdot||_\infty$ es equivalente a la convergencia uniforme.

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}} |f(s, \overline{\varphi}(s)) - f(s, \phi(s))| ds \right| \\
&\leq c \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}} |\overline{\varphi}(s) - \phi(s)| ds \right| \\
&\leq c\delta \cdot \max_{t \in I_\delta} |\overline{\varphi}(t) - \phi(t)| \\
&\leq c\delta ||\overline{\varphi} - \phi||_\infty.
\end{aligned}
$$

Como $c\delta < 1$, $||\overline{\varphi} - \phi||_\infty = 0$, i.e., $\overline{\varphi} = \phi$ sobre I_δ, y en particular sobre la vecindad $V = (t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2)$. $\square$

4. Demuestre la siguiente versión del teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias:

Teorema 3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función e clase C^1. Considere un punto $(t_0, x_0) \in U$. Entonces existe una solución $\varphi : I \to \mathbb{R}$ - donde I es un intervalo que contiene a t_0 en su interior - del problema de valor inicial*

$$x'(t) = f(t, x), \ x(t_0) = x_0.$$

Además, si φ_1, φ_2 son dos tales soluciones, ellas coinciden en la intersección de sus dominios.

La diferencia entre (2) y (3) reside en la condición de Lipschitz y la condición de unicidad. En efecto, en el caso del Teorema (2), se tiene que para cierto $c > 0$, vale que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq c|x - y|$ para cualesquiera $(t, x), (t, y) \in U$; mientras que en el Teorema (3) se impone únicamente que f sea clase C^1. Con el propósito de demostrar el Teorema (3), requerimos de los siguientes resultados Perko (2001). Por otro lado, se pide además probar que si φ_1, φ_2 son dos soluciones (en particular $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$), entonces $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$.

Lema 4. *Sean U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$. Entonces, si $f \in C^1(U)$, f es localmente lipschitziana*[4] *sobre U.*

Prueba. Como U es un abierto, para cualquier $\boldsymbol{x}_0 \in U$, existe una vecindad $V_\epsilon(\boldsymbol{x}_0)$[5] contenida en U. Luego, definiendo el compacto

$$K(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in U : \ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| \leq \epsilon/2\},$$

como f es continua, podemos tomar

$$L = \max_{\boldsymbol{x} \in K} ||Df(\boldsymbol{x})||,$$

[4] En una vecindad de un punto $\boldsymbol{x}_0 \in U$, f cumple la propiedad de Lipschitz

[5] $V_\epsilon(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in U : \ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| < \epsilon\}$

donde D es el operador derivada. Luego, $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_0)$, como es un conjunto convexo, $(1-\theta)\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{z} \in K(\boldsymbol{x}_0)$, siendo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$. Definiendo $g(\theta) = f(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{z})$,

$$g'(\theta) = Df(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{z})\boldsymbol{z}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
||f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})|| &= ||g(1) - g(0)|| \\
&= \left|\left|\int_0^1 g'(\theta)d\theta\right|\right| \\
&= \left|\left|\int_0^1 Df(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{z})\boldsymbol{z}d\theta\right|\right| \\
&\leq \int_0^1 ||Df(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{z})\boldsymbol{z}||d\theta \\
&\leq \int_0^1 L||\boldsymbol{z}||d\theta \\
&\leq L||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||.
\end{aligned}$$

□

Observación. *En (3), $U \subset \mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}$. En ese sentido, $\boldsymbol{x} \triangleq (t, x)$ y $\boldsymbol{y} \triangleq (t, y)$. Más aún, para los desarrollos posteriores, basta con establecer la propiedad de lipschitz en la segunda entrada, o sea,*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Esto es consecuencia directa de lo establecido usando la equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$.

Lema 5. *(Marcelo Viana (2021)) Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente lipschitziana en x, entonces para cualquier compacto $K \subset U$, existe $L = L(K) > 0$ tal que*

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq C||x - y||,\ \forall\ (t, x), (t, y) \in K.$$

Prueba. Suponga que para todo $n \geq 1$ existe (t_n, x_n) y (t_n, y_n) en K tal que

$$||f(t_n, x_n) - f(t, y_n)|| \geq n||x_n - y_n||.$$

Como f está acotada sobre el compacto K, esto implica que $||x_n - y_n|| \to 0$. Nuevamente usando la compacidad, supóngase que $(t_n, x_n) \to (\bar{t}, \overline{x}) \in K$. De este modo, $(t_n, y_n) \to (\bar{t}, \overline{x})$. Pero entonces, f no es lipschitziana en ninguna vecindad de $(\bar{t}, \overline{x})$ $\Rightarrow\Leftarrow$. □

Usando los lemas (4) y (5), probemos finalmente el Teorema (3)

Prueba. La idea es esencialmente la misma. Para no repetir argumentos de la prueba de (2), procedamos según el enfoque que hace uso del Teorema (1). Dado

$(t_0, x_0) \in U$, fijemos $\delta > 0$ tal que

$$R_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset U.$$

Como $f \in C^1$, por (4), f es localmente lipschitziana en x sobre el compacto R. De este modo, por (5), existe $L(\delta)$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| < L(\delta)|x - y|, \ \forall (t,x),(t,y) \in R.$$

Asimismo, definimos[6]

$$M(\delta) = \sup\{|f(t,x)| : \ (t,x) \in R_\delta\}.$$

Luego, tomando $\varepsilon \leq \delta$, el espacio de funciones continuas

$$X = \{\varphi : (B(t_0, \varepsilon) \to \overline{B}(x_0, \delta)\}$$

con $\varphi(t_0) = x_0$, y la métrica

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in B(t_0,\varepsilon)} \{|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\},$$

termina por formar un espacio métrico completo. Luego, definiendo el operador

$$\Gamma(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

podemos establecer que se trata de una contracción $\Gamma : X \to X$. Tomemos

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta}{M(\delta)}, \frac{1}{L(\delta)}, \delta\right\}.$$

Por definición, $\Gamma(\varphi)(t_0) = x_0$ y por otro lado,

$$||\Gamma(\varphi)(t) - x_0|| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds\right| \leq M(\delta)|t - t_0| < M(\delta)\varepsilon < \delta, \ \forall\, t \in B(t_0, \varepsilon).$$

De este modo, $\Gamma(\varphi)(t) \in \overline{B}(x_0, \delta)$. Luego, dadas $\varphi_1, \varphi_2 \in X$

$$\begin{aligned}
|\Gamma(\varphi_1) - \Gamma(\varphi_2)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L(\delta)|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|ds\right| \\
&\leq L(\delta)\varepsilon\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \rho(\varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

[6] Note que por la compacidad de R, podemos tomar directamente el máximo.

Por ende, por el Teorema (1), al ser Γ una contracción, existe un único $\overline{\varphi}$ tal que $\Gamma(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$. Más aún, por la regla de Leibniz, $\overline{\varphi}'(t) = f(t, \overline{\varphi})$ y ciertamente $\overline{\varphi}(t_0) = x_0$. O sea, el problema $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene solución. Queda entonces pendiente el segundo punto, es decir, que si φ_1 y φ_2 son dos soluciones de (3), entonces $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, para todo $t \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$. Como $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, definimos

$$I = \{t \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2} : \ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}.$$

Por definición, I es no vacío y cerrado en $I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$ pues se trata de la preimagen de un cerrado, el $\{0\}$, por una función continua, $\phi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Si probamos que I es también abierto en $I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$, podremos concluir que $I = I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$ (pues I es conexo). Tomemos $\tilde{t}_0 \in I$. Por definición,

$$\varphi_1(\tilde{t}_0) = \varphi_2(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0.$$

De este modo, aplicando la misma construcción del punto fijo a $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$, establecemos que, para cierto $\gamma > 0$ de modo que $\varphi_j(t) \in \overline{B}(\tilde{x}_0, \theta)$ y

$$\varphi_j'(t) = f(t, \varphi_j(t)), \ t \in B(\tilde{t}_0, \gamma).$$

Acá γ juega el rol de ε y θ el rol de δ. Sin embargo, por la unicidad del punto fijo, $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in B(\tilde{t}_0, \gamma)$. Esto prueba que $B(\tilde{t}_0, \gamma) \subset I$ para cualquier $\tilde{t}_0 \in I$, i.e., I es abierto en $I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$. Como los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez en $I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$ son el vacío o él mismo, $t_0 \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$ y se trata de un conjunto conexo (intervalo), concluimos que $I = I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$.
$\square$

Lima, agosto del 2025.

References

Marcelo Viana, J. E. (2021). *Differential Equations A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice*. American Mathematical Society, 1 edition.

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, 3 edition.