Solucionario de la Práctica 3 – MAT218 Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Profesor: Marcelo Flamarion
Jefe de Práctica: Marcelo Gallardo

PUCP, 7 de Noviembre 2025

Problema 1. Ecuación de Airy $y'' - xy = 0$

Solución. Buscamos una solución en series de potencias centrada en $x = 0$ de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Entonces

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

La ecuación $y'' - xy = 0$ produce

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Igualando coeficientes: para x^0 se obtiene $(2)(1)a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$; y para $n \geq 1$,

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}.$$

Esto enlaza los coeficientes en bloques de paso 3; por tanto hay dos familias independientes (dado que $a_2 = 0$):

$$y_1(x) : a_0 \neq 0,\ a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \quad a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5}, \ \ldots$$

$$y_1(x) = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{(6 \cdot 5)(3 \cdot 2)} + \cdots \right),$$

$$y_2(x) : a_0 = 0,\ a_1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \quad a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6}, \ \ldots$$

$$y_2(x) = a_1 \left(x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{(7 \cdot 6)(4 \cdot 3)} + \cdots \right).$$

Así, la solución general cerca de $x = 0$ es

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x),$$

que coincide (hasta constantes) con las combinaciones lineales de las funciones de Airy clásicas $\mathrm{Ai}(x)$ y $\mathrm{Bi}(x)$. □

Problema 2. Reducción de Bessel de orden 1/2

Solución. Dada la ecuación

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0,$$

considere el cambio $y(x) = x^{-1/2}v(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} y' &= -\tfrac{1}{2}x^{-3/2}v + x^{-1/2}v', \\ y'' &= \tfrac{3}{4}x^{-5/2}v - x^{-3/2}v' + x^{-1/2}v''. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando se obtiene

$$x^{-1/2}\big(x^2v'' + x^2v\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v'' + v = 0.$$

Por consiguiente, $v(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ y

$$y(x) = x^{-1/2}\big(C_1 \cos x + C_2 \sin x\big).$$

En particular, $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\sin x$ son soluciones. □

Problema 3. Solución general de sistemas

Solución. **(a)** Sistema $\begin{cases} x' = -5x + 3y, \\ y' = 2x + 7y. \end{cases}$ Sea $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-5 - \lambda)(7 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 2\lambda - 41,$$

con autovalores

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{42}.$$

Luego,

$$\mathbf{X}(t) = C_1\, e^{(1+\sqrt{42})t}\begin{pmatrix} -6 + \sqrt{42} \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\, e^{(1-\sqrt{42})t}\begin{pmatrix} -6 - \sqrt{42} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, con traza 0 y determinante -19.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 19 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{19}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{X}(t) = C_1\, e^{\sqrt{19}\,t}\begin{pmatrix} 5 - \sqrt{19} \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-\sqrt{19}\,t}\begin{pmatrix} 5 + \sqrt{19} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El origen es un punto silla inestable. □

Problema 4. Inestabilidad del origen

Solución. Considere $A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mu \neq -1$.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\mu + 1)\lambda + (\mu + 1).$$

Sean $\tau = \mu + 1$, $\Delta = \mu + 1$.

- $\mu < -1$: $\Delta < 0 \Rightarrow$ punto silla (inestable).
- $\mu > -1$: $\Delta > 0$, $\tau > 0 \Rightarrow$ inestable.
  - $-1 < \mu < 3$: $D = (\mu + 1)(\mu - 3) < 0 \Rightarrow$ espiral fuente.
  - $\mu > 3$: $D > 0 \Rightarrow$ nodo fuente.

Por tanto, $(0, 0)$ es siempre inestable, silla si $\mu < -1$ y espiral inestable si $-1 < \mu < 3$. □

Problema 5. Cálculo de e^{At}

Solución. **(a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Como $A^2 = 0$, la serie se trunca y

$$e^{At} = I + At.$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con autovalores 3 y 1, y autovectores $(1, 1)$ y $(1, -1)$:

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{t} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t} + e^{t} & e^{3t} - e^{t} \\ e^{3t} - e^{t} & e^{3t} + e^{t} \end{pmatrix}.$$

□