DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

Course: MAT218 - Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Lista 8

1. Encontrar la solución general de los siguientes sistemas:

   (a) $\begin{cases} x' = -5x + 3y, \\ y' = 2x + 7y, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -5x + 3y, \\ y' = -2x + 5y, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y, \\ y' = -x - \frac{1}{2}y, \end{cases}$

2. Determine las condiciones de la constante real μ tal que $(0,0)$ sea un centro para el sistema lineal
$$\begin{cases} x' = -\mu x + y, \\ y' = -x + \mu y. \end{cases}$$

3. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ la respuesta de un sistema dinámico lineal
$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y, \\ y' = \beta x + \alpha y, \end{cases}$$
que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Determine las condiciones sobre las constantes reales α y β que aseguren que
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = (0,0).$$
¿Puede $(0,0)$ ser un nodo o un punto silla?

4. Demuestre que el sistema lineal no homogéneo
$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}$$
tiene un punto crítico único $\mathbf{X}_1$ cuando $\Delta = \det A \neq 0$. Concluyendo que, si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución del sistema no homogéneo, $\tau < 0$ y $\Delta > 0$, entonces
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1.$$
[**Sugerencia:** $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_c(t) + \mathbf{X}_1$.]

5. Demuestre que $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable del sistema autónomo no lineal
$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + y^2, \\ y' = \beta x + \alpha y - xy, \end{cases}$$
cuando $\alpha < 0$ y un punto crítico inestable cuando $\alpha > 0$. [**Sugerencia:** Cambie a coordenadas polares].

6. *a*) Demuestre que $(0,0)$ es un punto crítico aislado del sistema autónomo plano

$$\begin{cases} x' = x^4 - 2xy^3, \\ y' = 2x^3y - y^4, \end{cases}$$

pero que con la linealización no se obtiene información útil acerca de la naturaleza de este punto crítico.

b) Utilice el método del plano fase para demostrar que $x^3+y^3 = 3cxy$. A esta curva clásica se le llama *hoja o folium de Descartes*. Las ecuaciones paramétricas de una de estas hojas son

$$x = \frac{3ct}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3ct^2}{1+t^3}.$$

[**Sugerencia:** La ecuación diferencial en x y y es homogénea.]

c) Con un programa para graficar o un programa de solución numérica, trace las curvas solución. Con base en sus gráficas, ¿clasificaría el punto crítico como estable o como inestable? ¿Clasificaría el punto crítico como nodo, punto silla, centro o punto espiral? Explique por qué.

7. La ecuación no lineal

$$mx'' + kx + k_1x^3 = 0 \quad \text{para } k > 0$$

representa un modelo general de las oscilaciones libres no amortiguadas, de una masa m fija a un resorte. Si $k_1 > 0$, el resorte se llama *duro* (vea el ejemplo 1 de la sección 5.3). Determine la naturaleza de las soluciones de

$$x'' + x + x^3 = 0$$

en una vecindad de $(0,0)$.

8. Una solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' + x - x^3 = 0$$

satisface $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$. Aplique el método del plano fase para determinar cuándo la solución resultante es periódica.

9. **Péndulo amortiguado.** Si suponemos que actúa una fuerza de amortiguamiento en dirección opuesta a la del movimiento de un péndulo, con una magnitud directamente proporcional a la velocidad angular $d\theta/dt$, el ángulo de desplazamiento θ del péndulo satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - \beta\frac{d\theta}{dt}.$$

a) Escriba la ecuación diferencial de segundo orden en forma de un sistema autónomo plano y determine todos los puntos críticos.

b) Determine una condición sobre m, l y β que haga que $(0,0)$ sea un punto espiral estable.

10. Una oscilación no amortiguada satisface una ecuación diferencial no lineal de segundo orden de la forma

$$x'' + f(x) = 0,$$

donde $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $-d < x < d$. Utilice el método del plano fase para investigar si es posible que el punto crítico $(0,0)$ sea un punto espiral estable.

[**Sugerencia:** Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,du$ y demuestre que $y^2 + 2F(x) = c$.]

11. En cada uno de los problemas (a)–(d) construya una función de Liapunov de la forma $V(x,y) = a\,x^2 + c\,y^2$, determinando a y c. A continuación, demuestre que el punto crítico en el origen es del tipo indicado.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = -x^3 + xy^2, \qquad \dfrac{dy}{dt} = -2x^2y - y^3;$ *asintóticamente estable.*

(b) $\dfrac{dx}{dt} = -\tfrac{1}{2}x^3 + 2xy^2, \qquad \dfrac{dy}{dt} = -y^3;$ *asintóticamente estable.*

(c) $\dfrac{dx}{dt} = -x^3 + 2y^3, \qquad \dfrac{dy}{dt} = -2xy^2;$ *estable (al menos).*

(d) $\dfrac{dx}{dt} = x^3 - y^3, \qquad \dfrac{dy}{dt} = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3;$ *inestable.*

Referencias

[1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., Westview Press, Boulder, CO, 2015. ISBN 978-0813349107.

[2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2017. ISBN 978-1119443766.

[3] D. G. Zill, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 9th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965799.

[4] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 11th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965720.