PUCP

Course: MAT218 - Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Lista 7

1. Para cada item, busque una solución en serie de potencias alrededor del punto ordinário x_0. Si es posible, encuentre el término general y verifique que las soluciones forman un conjunto fundamental.

   a) $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0.$

   b) $y'' - x\,y' - y = 0, \quad x_0 = 1.$

   c) $(1 - x)\,y'' + y = 0, \quad x_0 = 0.$

   d) $y'' + x\,y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0.$

2. Considere el problema de valor inicial

$$y' = \sqrt{1 - y^2}, \qquad y(0) = 0.$$

   a) Muestre que $y = \sin x$ es solución de este problema de valor inicial.

   b) Busque una solución en forma de serie de potencias alrededor de $x = 0$. Encuentre los coeficientes hasta el término en x^3 en esta serie.

3. La ecuación diferencial de Chebyshev es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

   donde α es una constante.

   a) Determine dos soluciones en potencias de x para $|x| < 1$ y muestre que forman un conjunto fundamental de soluciones.

   b) Muestre que si α es un entero no negativo n, entonces existe una solución polinómica de grado n. Estos polinomios, adecuadamente normalizados, se llaman los polinomios de Chebyshev. Son muy útiles en problemas que requieren una aproximación polinómica de una función definida en $-1 \leq x \leq 1$.

   c) Encuentre una solución polinómica para cada uno de los casos $\alpha = n = 0, 1, 2, 3$.

4. Considere la ecuación de Bessel de orden cero

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

   (a) Muestre que $x = 0$ es un punto singular regular.
   (b) Determine dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$. (Objetivo: obtener las funciones de Bessel de orden cero $J_0(x)$ y $Y_0(x)$. Intente hacerlo sin consultar el libro de Boyce.)

5. Considere la ecuación diferencial (Bessel de orden 1/2)

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0.$$

(a) Muestre que $x = 0$ es un punto singular regular.
(b) Determine dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$.

6. Considere la ecuación diferencial (Bessel de orden uno)

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right)y = 0.$$

(a) Muestre que $x = 0$ es un punto singular regular.
(b) Determine dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$. (Objetivo: obtener las funciones de Bessel de orden uno $J_1(x)$ y $Y_1(x)$. Intente hacerlo sin consultar el libro de Boyce.)

7. Muestre que la ecuación de Bessel de orden 1/2

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0,$$

puede reducirse a

$$v'' + v = 0$$

mediante el cambio de variable dependiente $y = x^{-1/2}v(x)$. A partir de esto, concluya que

$$y_1(x) = x^{-1/2}\cos x, \qquad y_2(x) = x^{-1/2}\sin x$$

son soluciones de la ecuación de Bessel de orden 1/2.

Referencias

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2017. ISBN 978-1119443766.