DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

PUCP

Course: MAT218 - Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Lista 6

1. Demuestre, a partir de la definición, las transformadas de Laplace de la tabla discutida en clase.

2. **La función gamma.** La función gamma se denota por $\Gamma(p)$ y se define mediante

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p \, dx.$$

La integral converge cuando $x \to \infty$ para todo p. Para $p < 0$ también es impropia en $x = 0$, pues el integrando se vuelve no acotado al aproximarse $x \to 0$; sin embargo, puede demostrarse que converge en $x = 0$ para $p > -1$. Además, como $\Gamma(p)$ está definida para p no entero, esta función extiende el factorial a valores no enteros de la variable independiente; es consistente tomar $0! = 1$.

(a) Muestre que, para $p > 0$,
$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p).$$

(b) Muestre que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Si p es un entero positivo n, muestre que
$$\Gamma(n+1) = n!.$$

(d) Muestre que, para $p > 0$,
$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}.$$

(e) Dado que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, calcule
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad \Gamma\left(\tfrac{11}{2}\right).$$

3. Considere la transformada de Laplace de t^p, donde $p > -1$.

(a) Remítase al problema anterior y muestre que
$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p \, dt = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^p \, dx = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s > 0.$$

(b) Sea $p = n$ (un entero positivo) en el inciso (a); muestre que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0.$$

(c) Muestre que

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx, \qquad s > 0.$$

Se sabe que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}, \qquad s > 0.$$

(d) Muestre que

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\, s^{3/2}}, \qquad s > 0.$$

4. Suponga que

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Si $G(s)$ y $F(s)$ son las transformadas de Laplace de $g(t)$ y $f(t)$, respectivamente, demuestre que

$$G(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

5. Se pueden hallar de manera conveniente las transformadas de Laplace de ciertas funciones a partir de sus desarrollos en serie de Taylor.

(a) Use la serie de Taylor para $\sin t$,

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

y suponga que puede calcularse término a término la transformada de Laplace de esta serie; compruebe que

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}, \qquad s > 1.$$

(b) Sea

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Encuentre la serie de Taylor de f alrededor de $t = 0$. Suponga que la transformada de Laplace de esta función puede calcularse término a término y compruebe que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctan\frac{1}{s}, \qquad s > 1.$$

6. Suponga que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \geq 0$ y para algún número positivo fijo T; se dice que f es periódica con periodo T sobre $0 \leq t < \infty$. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1 - e^{-sT}}.$$

7. Resuelva el PVI (problema de valor inicial):

   (a) $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$

   $$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   (b) $y'' + 2y' + 2y = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$

   $$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ y } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

   (c) $y'' + 4y = \sin t - u_{2\pi}(t)\sin(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

   (d) $y'' + 4y = \sin t + u_{\pi}(t)\sin(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

   (e) $y'' + \omega^2 y = \delta\big(t - \frac{\pi}{\omega}\big), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

   (f) $y'' + y = \delta(t - \pi)\cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

   (g) $y'' + 4y = 2\,\delta\big(t - \frac{\pi}{4}\big), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

8. Considere la ecuación integral de Volterra

$$\phi(t) + \int_0^t (t - \xi)\,\phi(\xi)\,d\xi = \sin(2t).$$

   (a) Demuestre que si u es una función tal que $u''(t) = \phi(t)$, entonces

   $$u''(t) + u(t) - t\,u'(0) - u(0) = \sin(2t).$$

   (b) Demuestre que la ecuación integral dada es equivalente al problema de valor inicial

   $$u''(t) + u(t) = \sin(2t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

   (c) Resuelva la ecuación integral dada mediante la aplicación de la transformada de Laplace.

   (d) Resuelva el problema con valor inicial del inciso (b) y compruebe que la solución coincide con la obtenida en (c).

Referencias

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2017. ISBN 978-1119443766.