DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

PUCP

Course: MAT218 - Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Lista 5

1. Considere el siguiente problema de valor inicial

$$m\,u'' + \gamma\,u' + k\,u = 0, \qquad u(0) = u_0, \qquad u'(0) = v_0,$$

y suponga que $\gamma^2 < 4km$.

a) Resolver el problema de valor inicial.

b) Escribir la solución en la forma

$$u(t) = R\exp\left(-\frac{\gamma t}{2m}\right)\cos(\mu t - \delta).$$

Determinar R en términos de m, γ, k, u_0 y v_0.

c) Investigar la dependencia de R con respecto al coeficiente de amortiguamiento γ para valores fijos de los demás parámetros.

2. En ausencia de amortiguamiento, el movimiento de un sistema masa–resorte satisface el siguiente problema de valor inicial

$$m\,u'' + k\,u = 0, \qquad u(0) = a, \qquad u'(0) = b.$$

a) Mostrar que la energía cinética inicialmente impartida a la masa es $mb^2/2$ y que la energía potencial inicialmente almacenada en el resorte es $ka^2/2$, de modo que inicialmente la energía total en el sistema es $(ka^2 + mb^2)/2$.

b) Resolver el problema de valor inicial dado.

c) Usando la solución del inciso (b), determinar la energía total en el sistema en cualquier instante t. Su resultado debe confirmar el principio de conservación de la energía para este sistema.

3. ** Suponga que la fuerza del resorte no está dada por la ley de Hooke sino que satisface la relación

$$F_s = -(ku + \epsilon u^3),$$

donde $k > 0$ y ϵ es pequeño pero puede tener cualquier signo. El resorte se llama endureciente si $\epsilon > 0$ y reblandeciente si $\epsilon < 0$. ¿Por qué son apropiados estos términos?

a) Mostrar que el desplazamiento $u(t)$ de la masa desde su posición de equilibrio satisface la ecuación diferencial

$$mu'' + \gamma u' + ku + \epsilon u^3 = 0.$$

Suponga que las condiciones iniciales son

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1.$$

En el resto de este problema, suponga que $m = 1$, $k = 1$ y $\gamma = 0$.

b) Encontrar $u(t)$ cuando $\epsilon = 0$ y además determinar la amplitud y el período del movimiento.

c) Sea $\epsilon = 0{,}1$. Graficar una aproximación numérica de la solución. ¿El movimiento parece ser periódico? Estime la amplitud y el período.

d) Repetir el inciso (c) para $\epsilon = 0{,}2$ y $\epsilon = 0{,}3$.

e) Graficar los valores estimados de la amplitud A y del período T en función de ϵ. Describir la manera en que A y T, respectivamente, dependen de ϵ.

f) Repetir los incisos (c), (d) y (e) para valores negativos de ϵ.

4. *** Considere el oscilador no lineal descrito por la ecuación

$$x'' + x + \epsilon\nu x^3 = 0,$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$ y $\nu = \pm 1$.

En este caso, ϵ es un parámetro pequeño que mide la fuerza de la no linealidad. La **idea de Poincaré** consiste en suponer que la solución puede expandirse en una serie en potencias de ϵ,

$$x(T) \sim x_0(T) + \epsilon x_1(T) + \epsilon^2 x_2(T) + \cdots, \text{ donde } T = \omega t$$

y resolver los problemas diferenciales resultantes de manera sucesiva. Este procedimiento lleva a correcciones ordenadas de la solución lineal y permite identificar cómo la no linealidad afecta la frecuencia y la forma de la oscilación. Para evitar términos seculares (que crecen sin límite en el tiempo), se utiliza la técnica de **Poincaré–Lindstedt**, que introduce una frecuencia corregida

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \cdots.$$

Mostrar que la solución aproximada hasta orden $O(\epsilon^2)$ es

$$x \sim a\cos T + \tfrac{1}{32}\epsilon\nu a^3 \cos 3T + O(\epsilon^2),$$

con

$$T = \omega t, \qquad \omega \sim 1 + \tfrac{3}{8}\epsilon\nu a^2 - \tfrac{15}{256}\epsilon^2 a^4 + O(\epsilon^3).$$

Aquí, para simplificar la exposición, se ha asumido que la fase inicial es $\delta = 0$, de modo que la solución de orden dominante se toma como

$$x_0(T) = a\cos T.$$

Referencias

[1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., Westview Press, Boulder, CO, 2015. ISBN 978-0813349107.

[2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2017. ISBN 978-1119443766.