DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

PUCP

Course: MAT218 - Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Lista 3

1. **Soluciones de equilibrio semiestable** Algunas veces una solución de equilibrio constante tiene la propiedad de que las soluciones que están hacia uno de los lados de la solución de equilibrio tienden hacia ésta, en tanto que las soluciones que se encuentran en el otro lado se alejan de ella; en este caso, se dice que la solución de equilibrio es *semiestable*.

   (a) Considere la ecuación
   $$\frac{dN}{dt} = k(1-N)^2, \tag{1}$$
   en donde k es una constante positiva. Demuestre que $N = 1$ es el único punto crítico, con la solución de equilibrio correspondiente $\phi(t) = 1$.

   (b) Trace la gráfica de dN/dt contra N. Demuestre que N es creciente como función de t, para $N < 1$ y también para $N > 1$. Por tanto, las soluciones que están debajo de la solución de equilibrio tienden a ésta, mientras que las que están arriba crecen alejándose de ella.

   De donde, $\phi(t) = 1$ es semiestable.

   (c) Resuelva la ecuación (1) sujeta a la condición inicial $N(0) = N_0$ y confirme las conclusiones a las que se llegó en el inciso b).

2. **Teoría de la bifurcación** Para una ecuación de la forma
   $$\frac{dy}{dt} = f(a, y), \tag{i}$$
   donde a es un parámetro real, los puntos críticos (soluciones de equilibrio) usualmente dependen del valor de a. A medida que a aumenta o disminuye de manera continua, frecuentemente sucede que para cierto valor de a, llamado *punto de bifurcación*, los puntos críticos se juntan o se separan, y las soluciones de equilibrio pueden perderse o ganarse. Los puntos de bifurcación son de gran interés en muchas aplicaciones, porque cerca de ellos la naturaleza de la solución de la ecuación diferencial subyacente experimenta un cambio abrupto. Por ejemplo, en mecánica de fluidos un flujo laminar suave puede romperse y volverse turbulento. O una columna axialmente cargada puede pandearse y exhibir un gran desplazamiento lateral. O bien, al aumentar la cantidad de uno de los químicos en una cierta mezcla, pueden emerger patrones de onda espirales de colores variables en un fluido originalmente en reposo.

   Los problemas 3 al 5 describen tres tipos de bifurcaciones que pueden ocurrir en ecuaciones simples de la forma (i).

3. Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = a - y^2. \tag{ii}$$

   (a) Encuentre todos los puntos críticos para la Ec. (ii). Observe que no hay puntos críticos si $a < 0$, un punto crítico si $a = 0$, y dos puntos críticos si $a > 0$.

   (b) Dibuje la línea de fases en cada caso y determine si cada punto crítico es asintóticamente estable, semiestable o inestable.

   (c) En cada caso, esboce varias soluciones de la Ec. (ii) en el plano ty.

   (d) Si graficamos la localización de los puntos críticos como función de a en el plano ay, obtenemos el *diagrama de bifurcación* para la Ec. (ii). La bifurcación en $a = 0$ se llama una *bifurcación silla–nodo*. Este nombre es más natural en el contexto de sistemas de segundo orden, los cuales se discutirán más adelante.

4. Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = ay - y^3 = y(a - y^2). \tag{iii}$$

   (a) Considere nuevamente los casos $a < 0$, $a = 0$ y $a > 0$. En cada caso, encuentre los puntos críticos, dibuje la línea de fases y determine si cada punto crítico es asintóticamente estable, semiestable o inestable.

   (b) En cada caso esboce varias soluciones de la Ec. (iii) en el plano ty.

   (c) Dibuje el diagrama de bifurcación para la Ec. (iii), es decir, grafique la localización de los puntos críticos en función de a. Para la Ec. (iii) el punto de bifurcación en $a = 0$ se llama una *bifurcación pitchfork*. Su diagrama puede sugerir por qué este nombre es apropiado.

5. Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = ay - y^2 = y(a - y). \tag{iv}$$

   (a) Considere nuevamente los casos $a < 0$, $a = 0$ y $a > 0$. En cada caso, encuentre los puntos críticos, dibuje la línea de fases y determine si cada punto crítico es asintóticamente estable, semiestable o inestable.

   (b) En cada caso esboce varias soluciones de la Ec. (iv) en el plano ty.

   (c) Dibuje el diagrama de bifurcación para la Ec. (iv). Observe que para la Ec. (iv) existe el mismo número de puntos críticos para $a < 0$ y $a > 0$, pero su estabilidad ha cambiado. Para $a < 0$ la solución de equilibrio $y = 0$ es asintóticamente estable y $y = a$ es inestable, mientras que para $a > 0$ la situación se invierte. Por lo tanto, ha habido un *intercambio de estabilidad* cuando a pasa por el punto de bifurcación $a = 0$. Este tipo de bifurcación se llama una *bifurcación transcrítica*.

6. **Fluctuación de la población** La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (k \cos t)\, P,$$

   donde k es una constante positiva, es un modelo matemático para una población $P(t)$ que experimenta fluctuaciones anuales.

Resuelva la ecuación sujeta a $P(0) = P_0$.

Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución para diferentes elecciones de P_0.

7. **Gotas de lluvia cayendo** En meteorología el término *virga* se refiere a las gotas de lluvia que caen o a partículas de hielo que se evaporan antes de llegar al suelo. Suponga que en algún tiempo, que se puede denotar por $t = 0$, las gotas de lluvia de radio r_0 caen desde el reposo de una nube y se comienzan a evaporar.

   (a) Si se supone que una gota se evapora de tal manera que su forma permanece esférica, entonces también tiene sentido suponer que la rapidez a la cual se evapora la gota de lluvia, esto es, la rapidez con la cual ésta pierde masa, es proporcional a su área superficial. Muestre que esta última suposición implica que la rapidez con la que el radio r de la gota de lluvia disminuye es una constante. Encuentre $r(t)$.

   (b) Si la dirección positiva es hacia abajo, construya un modelo matemático para la velocidad v de la gota de lluvia que cae al tiempo $t > 0$. Desprecie la resistencia del aire. *Sugerencia:* Utilice del problema anterior.

8. **Algunas enfermedades** (como la fiebre tifoidea) se propagan en gran medida por medio de *portadores*, individuos que pueden transmitir la enfermedad pero que no presentan síntomas evidentes. Sea x e y la proporción de susceptibles y portadores, respectivamente, en la población. Suponga que los portadores son identificados y removidos de la población a una tasa β, de modo que

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y. \tag{i}$$

   Suponga también que la enfermedad se propaga a una tasa proporcional al producto de x e y; así

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x y. \tag{ii}$$

   (a) Determine y en cualquier tiempo t resolviendo la Ec. (i) sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$.

   (b) Use el resultado del inciso (a) para encontrar x en cualquier tiempo t resolviendo la Ec. (ii) sujeta a la condición inicial $x(0) = x_0$.

   (c) Encuentre la proporción de la población que escapa a la epidemia hallando el valor límite de x cuando $t \to \infty$.

9. Daniel Bernoulli, en 1760, tuvo como objetivo evaluar la efectividad de un controvertido programa de inoculación contra la viruela, que en ese tiempo era una gran amenaza para la salud pública. Su modelo aplica igualmente bien a cualquier otra enfermedad que, una vez contraída y superada, confiere inmunidad de por vida.

   Considere la cohorte de individuos nacidos en un año dado ($t = 0$), y sea $n(t)$ el número de estos individuos que sobreviven después de t años. Sea $x(t)$ el número de miembros de esta cohorte que no han tenido viruela al año t y que, por lo tanto, siguen siendo susceptibles. Sea β la tasa a la cual los susceptibles contraen la viruela, y sea ν la tasa a la cual las personas que contraen viruela mueren por la enfermedad. Finalmente, sea $\mu(t)$ la tasa de mortalidad por todas las causas distintas a la viruela. Entonces, dx/dt, la tasa a la cual el número de susceptibles disminuye, está dada por

$$\frac{dx}{dt} = -[\beta + \mu(t)]x. \tag{i}$$

El primer término en el lado derecho de la Ecuación (i) es la tasa a la cual los susceptibles contraen viruela, y el segundo término es la tasa a la cual mueren por todas las demás causas. Además,

$$\frac{dn}{dt} = -\nu\beta x - \mu(t)n, \tag{ii}$$

donde dn/dt es la tasa de mortalidad de toda la cohorte, y los dos términos en el lado derecho son las tasas de mortalidad debidas a la viruela y a todas las demás causas, respectivamente.

(a) Sea $z = x/n$, y muestre que z satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z(1 - \nu z), \qquad z(0) = 1. \tag{iii}$$

Observe que el problema de valor inicial (iii) no depende de $\mu(t)$.

(b) Encuentre $z(t)$ resolviendo la Ecuación (iii).

(c) Bernoulli estimó que $\nu = \beta = \frac{1}{8}$. Usando estos valores, determine la proporción de individuos de 20 años que no han tenido viruela.

Nota: Sobre la base del modelo descrito y los mejores datos de mortalidad disponibles en ese momento, Bernoulli calculó que si las muertes por viruela pudieran eliminarse ($\nu = 0$), entonces aproximadamente 3 años podrían añadirse a la esperanza de vida promedio (en 1760) de 26 años y 7 meses. Por lo tanto, apoyó el programa de inoculación.

10. * **Problema de la braquistócrona** Uno de los problemas famosos en la historia de las matemáticas es el de la braquistócrona; hallar la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará sin fricción en el tiempo mínimo, de un punto P a otro Q, en donde el segundo punto está más bajo que el primero, pero no directamente debajo de éste.

Este problema fue propuesto por Johann Bernoulli como un desafío para los matemáticos de su época. Johann Bernoulli y su hermano Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz y el Marqués de L'Hopital encontraron soluciones correctas. El problema de la braquistócrona es importante en el desarrollo de las matemáticas como uno de los precursores del cálculo de variaciones. Al resolver este problema es conveniente tomar el origen como el punto superior P y orientar los ejes como se muestra en la figura 2.7.4. El punto inferior Q tiene las coordenadas (x_0, y_0). Entonces, es posible demostrar que la curva de tiempo mínimo queda definida por una función $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$(1 + y'^2)y = k^2, \tag{i}$$

en donde k^2 es cierta constante positiva que debe determinarse posteriormente.

(a) Despeje y' en la ecuación (i). ¿Por qué es necesario elegir la raíz cuadrada positiva?

(b) Introduzca la nueva variable t mediante la relación

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 t. \tag{ii}$$

Demuestre que la ecuación que encontró en el inciso a) toma entonces la forma

$$2k^2 \operatorname{sen}^2 t \, dt = dx. \tag{iii}$$

(c) Si se hace $\theta = 2t$, demuestre que la solución de (iii) para la que $x = 0$ cuando $y = 0$ se expresa por

$$x = \tfrac{k^2}{2}\Big(\theta - \operatorname{sen}\theta\Big), \qquad y = \tfrac{k^2}{2}\Big(1 - \cos\theta\Big). \tag{iv}$$

Las ecuaciones (iv) son ecuaciones paramétricas de la solución de (i) que pasa por $(0, 0)$. La gráfica de las ecuaciones (iv) se llama *cicloide*. Si se hace una elección adecuada de la constante k, entonces la cicloide también pasa por el punto (x_0, y_0) y es la solución del problema de la braquistócrona. Es posible eliminar θ y obtener la solución en la forma $y = \phi(x)$; sin embargo, es más fácil usar las ecuaciones paramétricas.

11. **Un modelo de pesca** La ecuación

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - H$$

proporciona un modelo extremadamente simple de una pesquería. En ausencia de pesca, se supone que la población crece logísticamente. Los efectos de la pesca se modelan mediante el término $-H$, lo cual indica que los peces se capturan o “cosechan” a una tasa constante $H > 0$, independiente de su población N. (Esto supone que los pescadores no se preocupan por agotar la población de peces, sino que simplemente capturan la misma cantidad de peces cada día).

(a) Muestre que el sistema puede reescribirse en forma adimensional como

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - h,$$

para cantidades adimensionales adecuadamente definidas x, τ, h.

(b) Dibuje el campo vectorial para diferentes valores de h.

(c) Demuestre que ocurre una bifurcación en cierto valor h_c e identifique el tipo de bifurcación.

(d) Discuta el comportamiento a largo plazo de la población de peces para $h < h_c$ y $h > h_c$, e interprete biológicamente cada caso.

Comentario: Este modelo tiene un inconveniente: ¡la población puede hacerse negativa! Un mejor modelo tendría un punto fijo en población cero para todos los valores de H. Vea el siguiente ejercicio para una mejora de este tipo.

12. *** **Modelo mejorado de una pesquería** Una refinación del modelo del ejercicio anterior es

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - H\frac{N}{A+N},$$

donde $H > 0$ y $A > 0$. Este modelo es más realista en dos aspectos: (i) tiene un punto fijo en $N = 0$ para todos los valores de los parámetros, y (ii) la tasa de captura de peces disminuye con N. Esto es plausible: cuando hay menos peces disponibles, es más difícil encontrarlos y por lo tanto la captura diaria disminuye.

(a) Dé una interpretación biológica del parámetro A. ¿Qué mide?

(b) Muestre que el sistema puede reescribirse en forma adimensional como

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - h\frac{x}{a+x},$$

para cantidades adimensionales adecuadamente definidas x, τ, a, h.

(c) Demuestre que el sistema puede tener uno, dos o tres puntos fijos, dependiendo de los valores de a y h. Clasifique la estabilidad de los puntos fijos en cada caso.

(d) Analice la dinámica cerca de $x = 0$ y muestre que ocurre una bifurcación cuando $h = a$. ¿Qué tipo de bifurcación es?

(e) Muestre que ocurre otra bifurcación cuando

$$h = \tfrac{1}{4}(a+1)^2, \quad a < a_c,$$

donde a_c debe determinarse. Clasifique esta bifurcación.

(f) Trace el diagrama de estabilidad del sistema en el espacio de parámetros (a, h). ¿Puede ocurrir histéresis en alguna de las regiones de estabilidad?

13. *** **Un interruptor bioquímico** Las franjas de las cebras y los patrones en las alas de las mariposas son dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Explicar el desarrollo de estos patrones es uno de los problemas más destacados de la biología; véase Murray (2003) para una excelente revisión.

Como un ingrediente en un modelo de formación de patrones, Lewis et al. (1977) consideraron un ejemplo sencillo de un *interruptor bioquímico*, en el cual un gen G es activado por una sustancia bioquímica de señal S. Por ejemplo, el gen puede estar normalmente inactivo pero puede "encenderse" para producir un pigmento u otro producto génico cuando la concentración de S excede cierto umbral.

Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y suponga que la concentración s_0 de S es fija. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2},$$

donde las k son constantes positivas. La producción de g es estimulada por s_0 con una tasa k_1, y por un proceso *autocatalítico* o de retroalimentación positiva (el término no lineal). También existe una degradación lineal de g a una tasa k_2.

Problemas:

(a) Muestre que el sistema puede escribirse en la forma adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2},$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son parámetros adimensionales.

(b) Muestre que si $s = 0$, existen dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe determinarse.

(c) Suponga que inicialmente no hay producto génico, es decir, $g(0) = 0$, y que s se incrementa lentamente desde cero (la señal activadora se enciende). ¿Qué sucede con $g(t)$? ¿Qué ocurre si luego s regresa a cero? ¿El gen se apaga nuevamente?

(d) Encuentre las ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s), e identifique y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

(e) Utilice la computadora para dar una gráfica cuantitativamente precisa del diagrama de estabilidad en el espacio (r, s).

Referencias: Para una discusión adicional de este modelo, véase Lewis et al. (1977); Edelstein–Keshet (1988), Sección 7.5; o Murray (2002), Capítulo 6.

Referencias

[1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., Westview Press, Boulder, CO, 2015. ISBN 978-0813349107.

[2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2017. ISBN 978-1119443766.

[3] D. G. Zill, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 9th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965799.

[4] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 11th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965720.