DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

PUCP

Course: MAT218 - Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Lista 2

1. En los siguientes ejercicios diga si es posible garantizar que el problema de valor inicial admite solución única. Cuando admita solución única, dé el mayor intervalo admisible I, abierto, que contenga la abscisa de la condición inicial.

   (a) $y' + xy = 3, \quad y(0) = 0$

   (b) $xy' + y = 3, \quad y(0) = 1$

   (c) $y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$

   (d) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}, \quad y(1) = -1$

   (e) $xy' + \dfrac{1}{2x+3}\, y = \ln|x-2|$, con cada una de las condiciones iniciales:

      (I) $y(-3) = 0$

      (II) $y(-1) = 5$

      (III) $y(1) = 7$

      (IV) $y(3) = 0$

2. En los ejercicios a seguir algunas de las ecuaciones son lineales de primera orden. Identifíquelas y halle su solución general.

   (a) $(1+x)y\,dx + x\,dy = 0$

   (b) $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} - y\tan(x) = \operatorname{sen}(x)$

   (d) $(2y - x^4)\,dx + x\,dy = 0$

3. En los siguientes ejercicios resuelva el problema de valor inicial.

   (a) $y' - xy = (1-x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad y(0) = 0$

   (b) $(y-1)x' - 3x = (y-1)^5, \quad x(-1) = 16$

   (c) Muestre que la ecuación

   $$\cos(y)\,y' + 2x\operatorname{sen}(y) = -2x$$

   puede ser transformada en una ecuación lineal y resuelva el PVI con $y(0) = 0$. (Sugerencia: $z = \operatorname{sen}(y)$)

4. En los siguientes ejercicios identifique las ecuaciones diferenciales exactas y resuélvalas.

   (a) $(x - y)\,dx + (-x + y + 2)\,dy = 0$
   (b) $y' = \dfrac{y - x + 1}{-x + y + 3}$
   (c) $(x^2 + y^2)\,dx + \left(xe^{xy} + 1\right)dy = 0$

5. En los ejercicios a seguir verifique cuáles ecuaciones son homogéneas y resuélvalas.

   (a) $(5x - y)\,dx + 3x\,dy = 0$
   (b) $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$
   (c) $xy' + y = 3$
   (d) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

6. En los siguientes ejercicios verifique si es posible encontrar un factor de integración del tipo $\lambda = \lambda(x)$ o $\lambda = \lambda(y)$ que transforme la EDO dada en una EDO exacta. En caso afirmativo, determine el factor de integración y resuelva la EDO.

   (a) $yx^3\,dx - (x^4 + y^4)\,dy = 0$
   (b) $y' = e^{2x} + y - 1$
   (c) $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$

7. **Ecuaciones de Bernoulli.** A veces es posible resolver una ecuación no lineal realizando un cambio en la variable dependiente que la convierte en una ecuación lineal. La ecuación más importante de este tipo tiene la forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n,$$

   y se llama *ecuación de Bernoulli* en honor a Jakob Bernoulli.

   Los problemas a seguir tratan con ecuaciones de este tipo.

   (a) Resuelva la ecuación de Bernoulli:
      (I) cuando $n = 0$
      (II) cuando $n = 1$
      (III) muestre que si $n \neq 0, 1$, la sustitución $v = y^{1-n}$ la reduce a una ecuación lineal. (Método de Leibniz, 1696).
   (b) $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$
   (c) $y' = \epsilon y - \sigma y^3, \quad \epsilon > 0,\ \sigma > 0$
   (d) $\dfrac{dy}{dt} = (\Gamma\cos t + T)y - y^3$

8. **Coeficientes discontinuos.** Las ecuaciones diferenciales lineales a veces ocurren en casos en los que una o ambas funciones p y g tienen discontinuidades de salto.

(a) Resuelva el PVI

$$y' + 2y = g(t), \quad y(0) = 0, \qquad g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

(b) Resuelva el PVI

$$y' + p(t)y = 0, \quad y(0) = 1, \qquad p(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Referencias

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2017. ISBN 978-1119443766.

[2] D. G. Zill, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 9th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965799.

[3] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 11th ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2017. ISBN 978-1305965720.

[4] *Notas de aula Cálculo-IIA*, Universidade Federal Fluimnense, Rio de Janeiro, 2009.