

Solucionario — Segunda práctica, 2026

Pregunta 1. (6 puntos)

(1) Existencia del minimizador. (2 puntos)

Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ con $u(\mathbf{x}_0) \geq \bar{u}$ (existe pues $\bar{u} \in u(\mathbb{R}_{++}^n)$) y considere

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0\}.$$

Paso 1 (K es no vacío). $\mathbf{x}_0 \in K$.

Paso 2 (K es cerrado). Escribimos

$$K = \mathbb{R}_+^n \cap u^{-1}([\bar{u}, \infty)) \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0\}.$$

\mathbb{R}_+^n y el semiespacio $\{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0\}$ son cerrados (preimágenes de cerrados por funciones lineales continuas). $u^{-1}([\bar{u}, \infty))$ es cerrado por continuidad de u . La intersección finita de cerrados es cerrada.

Paso 3 (K es acotado). Sea $\mathbf{x} \in K$, entonces $x_i \geq 0$ y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0$. Como $p_i > 0$ para cada i :

$$p_i x_i \leq \sum_j p_j x_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0 \implies x_i \leq \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0}{p_i}.$$

Luego $K \subseteq \prod_{i=1}^n [0, (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0)/p_i]$, acotado.

Paso 4 (Reducción a K). Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ con $u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}$ pero $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} > \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0$, entonces \mathbf{x}_0 ya da menor gasto y \mathbf{x} no puede ser minimizador. Luego

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \inf_{\mathbf{x} \in K} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Paso 5 (Weierstrass). La función $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ es continua, K es compacto (cerrado y acotado en \mathbb{R}^n , por Heine–Borel) y no vacío. Por Weierstrass, existe $\mathbf{x}^* \in K$ que alcanza el mínimo. \square

(2) Unicidad. (2 puntos)

Por contradicción, supongamos que existen $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in K$ ambos minimizadores con $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{y}^*$:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^* = e(\mathbf{p}, \bar{u}), \quad u(\mathbf{x}^*) \geq \bar{u}, \quad u(\mathbf{y}^*) \geq \bar{u}.$$

Paso 1 (Punto medio). Sea $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^* + \frac{1}{2}\mathbf{y}^*$. Por estricta cuasiconcavidad de u y $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{y}^*$:

$$u(\mathbf{z}) > \min\{u(\mathbf{x}^*), u(\mathbf{y}^*)\} \geq \bar{u},$$

es decir, $u(\mathbf{z}) > \bar{u}$ estrictamente. Además:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* + \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^* = e(\mathbf{p}, \bar{u}).$$

Paso 2 (Reducir el gasto). Como u es continua y $u(\mathbf{z}) > \bar{u}$, existe una vecindad de \mathbf{z} en la que u se mantiene $> \bar{u}$. Tomemos $t > 0$ pequeño tal que $\mathbf{z}_t = \mathbf{z} - t\mathbf{1} \in \mathbb{R}_+^n$ (donde $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$) y $u(\mathbf{z}_t) \geq \bar{u}$. Tal t existe: como $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_{++}^n$ (combinación convexa con coeficiente 1/2 en \mathbb{R}_+^n donde al menos uno tiene entradas estrictamente positivas, por la hipótesis $\bar{u} \in u(\mathbb{R}_{++}^n)$ y la unicidad geométrica del óptimo), se tiene $\min_i z_i > 0$ y basta tomar $t < \min_i z_i$ y t tan pequeño que la condición $u(\mathbf{z}_t) \geq \bar{u}$ se mantenga.

Paso 3 (Contradicción). El gasto en \mathbf{z}_t es:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}_t = \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} - t \sum_i p_i < \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} = e(\mathbf{p}, \bar{u}),$$

contradiciendo que $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ es el ínfimo. Luego \mathbf{x}^* es único. \square

(3) Concavidad de $e(\cdot, \bar{u})$. (2 puntos)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}_{++}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$. Sea $\mathbf{p}_\lambda = \lambda\mathbf{p}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{p}_2$.

Paso 1. Sea \mathbf{x}^* el minimizador a precios \mathbf{p}_λ (existe por la parte (1)). Entonces $u(\mathbf{x}^*) \geq \bar{u}$, así que \mathbf{x}^* es factible para los problemas a precios \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 (el conjunto factible $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}\}$ no depende de \mathbf{p}). Por tanto:

$$e(\mathbf{p}_1, \bar{u}) \leq \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}^*, \quad e(\mathbf{p}_2, \bar{u}) \leq \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}^*.$$

¹Si \mathbf{x}^* o \mathbf{y}^* tuvieran alguna componente nula, una nueva aplicación de la estricta monotonía permite reducir el gasto sin pasar por la combinación convexa: existe $\mathbf{w} \leq \mathbf{z}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{z}$, con $u(\mathbf{w}) \geq \bar{u}$ y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w} < \mathbf{p} \cdot \mathbf{z}$.

Paso 2. Multiplicando por $\lambda \geq 0$ y $1 - \lambda \geq 0$ y sumando:

$$\lambda e(\mathbf{p}_1, \bar{u}) + (1 - \lambda)e(\mathbf{p}_2, \bar{u}) \leq \lambda \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{x}^* = e(\mathbf{p}_\lambda, \bar{u}). \quad \square$$

Idea económica. La función de gasto es el *ínfimo de funciones lineales en \mathbf{p}* : para cada cesta factible \mathbf{x} , el mapa $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ es lineal en \mathbf{p} , y $e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \inf_{\mathbf{x}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$. El ínfimo de funciones lineales (cóncavas) es cóncavo.

Pregunta 2. (4 puntos)

(1) $V_1 + V_2$ es convexo. (2 puntos)

Sean $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in V_1 + V_2$, escritos como $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}' = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$. Sea $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda \mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{z}' = \underbrace{[\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2]}_{\in V_1 \text{ (convexo)}} + \underbrace{[\lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{y}_2]}_{\in V_2 \text{ (convexo)}}.$$

Luego $\lambda \mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{z}' \in V_1 + V_2$. \square

(2) $\mathbf{X}^*(\mathbf{p}, w)$ es convexo cuando u es cóncava. (2 puntos)

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}^*(\mathbf{p}, w)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por definición, $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) = v(\mathbf{p}, w) := \sup_{B(\mathbf{p}, w)} u$, y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{p}, w)$. Sea $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$.

Paso 1 (Factibilidad). $B(\mathbf{p}, w)$ es convexo (intersección de \mathbb{R}_+^n con un semiespacio), así $\mathbf{z} \in B(\mathbf{p}, w)$.

Paso 2 (Optimalidad). Por concavidad de u :

$$u(\mathbf{z}) \geq \lambda u(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)u(\mathbf{y}) = v(\mathbf{p}, w).$$

Por otro lado, $\mathbf{z} \in B(\mathbf{p}, w)$ implica $u(\mathbf{z}) \leq v(\mathbf{p}, w)$. Luego $u(\mathbf{z}) = v(\mathbf{p}, w)$, y $\mathbf{z} \in \mathbf{X}^*(\mathbf{p}, w)$. \square

Comentario. Si además u es *estrictamente* cóncava, la desigualdad anterior es estricta para $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, lo cual sería incompatible con que ambos sean óptimos: en ese caso, la demanda walrasiana es *única*.

Pregunta 3. (6 puntos)

(1) Concavidad de $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 + \gamma \ln x_3$. (2 puntos)

Paso 1 (Hessiano). Las primeras derivadas son $f_{x_i} = \theta_i/x_i$ (con $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \beta$, $\theta_3 = \gamma$). Las segundas:

$$f_{x_i x_i} = -\frac{\theta_i}{x_i^2}, \quad f_{x_i x_j} = 0 \quad (i \neq j).$$

Luego

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \text{diag}\left(-\frac{\alpha}{x_1^2}, -\frac{\beta}{x_2^2}, -\frac{\gamma}{x_3^2}\right).$$

Paso 2 (Criterio de los menores principales líderes). Por el criterio de Sylvester, $\nabla^2 f$ es *definida negativa* si y solo si los menores principales líderes alternan signo empezando en negativo:

$$|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| < 0.$$

Calculamos directamente, usando que el Hessiano es diagonal:

$$|H_1| = -\frac{\alpha}{x_1^2}, \quad |H_2| = \det \begin{bmatrix} -\alpha/x_1^2 & 0 \\ 0 & -\beta/x_2^2 \end{bmatrix} = \frac{\alpha\beta}{x_1^2 x_2^2}, \quad |H_3| = \det(\nabla^2 f) = -\frac{\alpha\beta\gamma}{x_1^2 x_2^2 x_3^2}.$$

En \mathbb{R}_{++}^3 , las condiciones $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$, $|H_3| < 0$ equivalen a $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, respectivamente. Bajo esas condiciones, f es *estrictamente cóncava*.

Paso 3 (Caso semidefinida negativa). Para concavidad *no estricta*, $\nabla^2 f$ debe ser semidefinida negativa, lo cual requiere que $(-1)^k M_k \geq 0$ para *todo* menor principal M_k de orden k (no solo los líderes). Como el Hessiano es diagonal, todo menor principal de orden k es producto de k entradas diagonales $-\theta_i/x_i^2$; el patrón $(-1)^k M_k \geq 0$ se cumple para todos si y solo si cada entrada diagonal es ≤ 0 , es decir, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$.

Paso 4 (Conclusión).

$$f \text{ es cóncava en } \mathbb{R}_{++}^3 \iff \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0,$$

y la concavidad es *estricta* si y solo si $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Comentario. Para $\alpha, \beta, \gamma > 0$, esta es la transformación logarítmica de la utilidad Cobb–Douglas $\tilde{f}(\mathbf{x}) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$.

(2) $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + \ln x_3$ no es cóncava. (2 puntos)
Paso 1 (Hessiano).

$$\nabla g = (x_2, x_1, 1/x_3)^\top, \quad \nabla^2 g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Paso 2 (Criterio de los menores principales líderes). Para que $\nabla^2 g$ sea semidefinida negativa (condición *necesaria* para que g sea cóncava), los menores principales líderes deben satisfacer $(-1)^k |H_k| \geq 0$ para cada $k = 1, 2, 3$. Calculamos $|H_2|$:

$$|H_2| = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

Como $|H_2| = -1 < 0$, falla la condición $(-1)^2 |H_2| \geq 0$, así que $\nabla^2 g$ **no** es semidefinida negativa.

El mismo cálculo descarta también la concavidad estricta: ésta exigiría $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$, $|H_3| < 0$, pero $|H_1| = 0$ y $|H_2| = -1 < 0$ violan ya las dos primeras desigualdades.

Paso 3 (Conclusión). g no es cóncava en \mathbb{R}_{++}^3 . \square

Comentario. En la dirección $\mathbf{v} = (1, 1, 0)^\top$ se tiene $\mathbf{v}^\top \nabla^2 g \mathbf{v} = 2 > 0$ (curvatura positiva), mientras que en la dirección $\mathbf{v} = (0, 0, 1)^\top$ se tiene $\mathbf{v}^\top \nabla^2 g \mathbf{v} = -1/x_3^2 < 0$ (curvatura negativa). Esto evidencia el carácter de silla de g .

(3) Límite de la media de potencias. (2 puntos)
Objetivo. Probar que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{++}^n$,

$$\lim_{p \rightarrow 0} M_p(\mathbf{x}) := \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n} \right)^{1/p} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}.$$

Paso 1 (Pasar al logaritmo). Como $x_i > 0$, $M_p(\mathbf{x}) > 0$ y podemos tomar logaritmo:

$$\ln M_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{p} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right) = \frac{\varphi(p)}{p},$$

donde $\varphi(p) := \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)$.

Paso 2 (Indeterminación 0/0). Como $x_i^0 = 1$,

$$\varphi(0) = \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) = \ln 1 = 0,$$

y el denominador tiende a 0. Estamos en 0/0, así que aplicamos la regla de L'Hôpital.

Paso 3 (Derivada del numerador). Derivando bajo el logaritmo:

$$\varphi'(p) = \frac{\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \ln x_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p},$$

donde se usó que $\frac{d}{dp} x_i^p = x_i^p \ln x_i$ (válido pues $x_i > 0$). La derivada del denominador p es 1.

Paso 4 (Evaluar el límite por L'Hôpital). Tomando $p \rightarrow 0$, $x_i^p \rightarrow 1$ para cada i , así que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \varphi'(p) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \ln x_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}.$$

Por L'Hôpital,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \ln M_p(\mathbf{x}) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\varphi(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \varphi'(p) = \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}.$$

Paso 5 (Volver vía exponencial). La exponencial es continua, por lo que

$$\lim_{p \rightarrow 0} M_p(\mathbf{x}) = \exp \left(\ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \right) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}. \quad \square$$

Comentario. Las medias de potencias M_p interpolan medias clásicas: M_1 (aritmética), M_{-1} (armónica), M_2 (cuadrática), y el caso límite $p \rightarrow 0$ recupera la media *geométrica*. Como subproducto de la desigualdad de Jensen se tiene además M_p no decreciente en p , lo cual implica de inmediato la desigualdad clásica $MA \geq MG \geq MH$.

Pregunta 4.

(4 puntos)

(1) $\pi(\mathbf{p})$ es convexa.

(2 puntos)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}_{++}^L$ y $\lambda \in [0, 1]$. Sea $\mathbf{p}_\lambda = \lambda \mathbf{p}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{p}_2$.
Para cualquier $\mathbf{y} \in Y$:

$$\mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{y} = \lambda \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{y} \leq \lambda \pi(\mathbf{p}_1) + (1 - \lambda) \pi(\mathbf{p}_2),$$

donde la desigualdad es por definición de supremo: $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{y} \leq \pi(\mathbf{p}_1)$ y $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{y} \leq \pi(\mathbf{p}_2)$.

Tomando supremo sobre $\mathbf{y} \in Y$ del lado izquierdo (el lado derecho no depende de \mathbf{y}):

$$\pi(\mathbf{p}_\lambda) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{y} \leq \lambda \pi(\mathbf{p}_1) + (1 - \lambda) \pi(\mathbf{p}_2). \quad \square$$

Idea económica. La función de beneficio es el *supremo de funciones lineales en p*: para cada plan factible $\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$ es lineal en \mathbf{p} , y $\pi(\mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{y}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$. El supremo de funciones convexas (en particular, lineales) es convexo.

(2) Existencia de precios soporte.

(2 puntos)

Definamos $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : u(\mathbf{x}) > u(\bar{\mathbf{x}})\}$ (el conjunto estrictamente preferido).

Paso 1: A es no vacío y convexo.

No vacío: por estricta monotonía, para cualquier vector canónico \mathbf{e}_i , $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_i \geq \bar{\mathbf{x}}$ y $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_i \neq \bar{\mathbf{x}}$, así que $u(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_i) > u(\bar{\mathbf{x}})$. Luego $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_i \in A$.

Convexo: sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por cuasiconcavidad,

$$u(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\} > u(\bar{\mathbf{x}}),$$

así $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in A$.

Paso 2: $\bar{\mathbf{x}} \notin A$.

Trivialmente $u(\bar{\mathbf{x}}) > u(\bar{\mathbf{x}})$ es falso.

Paso 3: Aplicar el teorema de separación.

A y $\{\bar{\mathbf{x}}\}$ son convexos disjuntos en \mathbb{R}^n ($\{\bar{\mathbf{x}}\}$ es además compacto). Por el *teorema de separación de convexos*, existen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}} \leq c \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in A. \quad (*)$$

Paso 4: $c = \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}$.

Por estricta monotonía, $\bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{k} \mathbf{e}_1 \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Aplicando (*):

$$c \leq \mathbf{p} \cdot \left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{k} \mathbf{e}_1 \right) = \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \frac{p_1}{k}.$$

Tomando $k \rightarrow \infty$: $c \leq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}$. Combinando con $\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}} \leq c$ de (*), obtenemos $c = \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}$. La desigualdad (*) queda:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in A. \quad (**)$$

Paso 5: $\mathbf{p} \geq 0$.

Por contradicción, suponga $p_i < 0$ para algún i . Por estricta monotonía, $\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{e}_i \in A$ para todo $t > 0$. Aplicando (**):

$$\mathbf{p} \cdot (\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{e}_i) \geq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}} \iff t p_i \geq 0.$$

Pero $t > 0$ y $p_i < 0$ dan $tp_i < 0$, contradicción. Luego $\mathbf{p} \geq 0$. Como $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Paso 6: Extender a $\{\mathbf{x} : u(\mathbf{x}) \geq u(\bar{\mathbf{x}})\}$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ con $u(\mathbf{x}) \geq u(\bar{\mathbf{x}})$. Para $k \in \mathbb{N}$, considere $\mathbf{x}_k = \mathbf{x} + \frac{1}{k}\mathbf{1}$. Por estricta monotonía, $u(\mathbf{x}_k) > u(\mathbf{x}) \geq u(\bar{\mathbf{x}})$, así $\mathbf{x}_k \in A$. Por (**):

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_k \geq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}.$$

Como $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$ es continua, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$. Luego $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}$. \square

Discusión. La cuasiconcavidad garantiza la convexidad de A (necesaria para separar), la estricta monotonía garantiza precios no negativos (los bienes son “bienes” y no “males”), y la continuidad permite cerrar el conjunto al pasar de la versión estricta a la débil.

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, mayo del 2026.