PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Segunda práctica — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Puntaje total: **20 puntos**.
- Solo se permiten apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
- La presentación y redacción influirán en la calificación.

Pregunta 1 (6 puntos)
Función de gasto del consumidor.

Considere un consumidor con función de utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *continua, estrictamente cuasicóncava* y *estrictamente creciente*. Para un nivel de utilidad $\bar{u} \in u(\mathbb{R}^n_{++})$ y un vector de precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, la *función de gasto* se define como

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \inf\{\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+, \ u(\mathbf{x}) \geq \bar{u} \,\}.$$

Esto es, $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ es el mínimo gasto necesario para alcanzar el nivel de utilidad $\bar{u}$ a los precios $\mathbf{p}$.

1. **Existencia.** Pruebe que el ínfimo se alcanza. Es decir, existe $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n_+$ con $u(\mathbf{x}^*) \geq \bar{u}$ y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = e(\mathbf{p}, \bar{u})$.

   Idea: fije una cesta $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ con $u(\mathbf{x}_0) \geq \bar{u}$ y reduzca el problema a minimizar sobre el conjunto

   $$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \ u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}, \, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0\}.$$

   (2 puntos)

2. **Unicidad.** Pruebe que el minimizador $\mathbf{x}^*$ es *único*. (2 puntos)

3. **Concavidad en precios.** Pruebe que la función $\mathbf{p} \mapsto e(\mathbf{p}, \bar{u})$ es *cóncava* en $\mathbb{R}^n_{++}$ (manteniendo $\bar{u}$ fijo). (2 puntos)

Pregunta 2 (4 puntos)
Convexidad en producción y consumo.

1. Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ tecnologías convexas (conjuntos convexos, PD2). Pruebe que la **tecnología agregada**

   $$V_1 + V_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_1 \in V_1, \, \mathbf{x}_2 \in V_2\}$$

   es convexa. (2 puntos)

2. Sea $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad continua y **cóncava**, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $w > 0$. Pruebe que el conjunto de demandas walrasianas

   $$\mathbf{X}^*(\mathbf{p}, w) = \arg\max\{\, u(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, w) \,\}, \qquad B(\mathbf{p}, w) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq w\},$$

   es *convexo* (asuma $\mathbf{X}^*(\mathbf{p}, w) \neq \emptyset$). (2 puntos)

Pregunta 3 (6 puntos)
Topología, concavidad y cuasiconcavidad: análisis diferencial.

1. Considere $f : \mathbb{R}^3_{++} \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 + \gamma \ln x_3.$$

   Determine de manera precisa para qué valores de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la función f es *cóncava* en $\mathbb{R}^3_{++}$. Justifique mediante el Hessiano y el criterio de Sylvester. (2 puntos)

2. Considere $g : \mathbb{R}^3_{++} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + \ln x_3.$$

   Analice si g es *cóncava* en $\mathbb{R}^3_{++}$. (2 puntos)

3. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$, pruebe que

$$\lim_{p \to 0} \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n} \right)^{1/p} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n}.$$

   (2 puntos)

Pregunta 4 (4 puntos)
Función de beneficio y precios soporte.

1. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^L$ una tecnología y

$$\pi(\mathbf{p}) = \sup\{\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} : \mathbf{y} \in Y \,\}, \qquad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_{++},$$

   asumida finita en su dominio. Pruebe que π es *convexa*. (2 puntos)

2. Sea $u : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ una función de utilidad **continua**, **cuasicóncava** y **estrictamente monótona**[1]. Sea $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n_{++}$.
   Pruebe que existe un vector de precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{+} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que para toda cesta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{+}$:

$$u(\mathbf{x}) \geq u(\bar{\mathbf{x}}) \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}.$$

   (2 puntos)

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, mayo del 2026.

[1]Recuerde: u es cuasicóncava si $u(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\}$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ y $\lambda \in [0,1]$. Es estrictamente monótona si $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}$ y $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ implican $u(\mathbf{x}') > u(\mathbf{x})$.