PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

SOLUCIONARIO – Práctica Dirigida 3

Primer semestre 2026-1

Soluciones detalladas en azul. Cada paso está justificado; en examen se espera un nivel de detalle similar.

I. Ejercicios para la sesión de práctica

Problema 1. *Optimización irrestricta de* $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

(a) Puntos críticos. Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0.$$

Resolviendo el sistema: de la primera, $y = 3 - 2x$. Sustituyendo en la segunda: $x + 2(3 - 2x) - 6 = 0 \Rightarrow x + 6 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0$. Luego $y = 3$.

Punto crítico: $(x^*, y^*) = (0, 3)$.

(b) Clasificación. El hessiano de f es constante:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Menores principales: $\Delta_1 = 2 > 0$ y $\Delta_2 = \det H_f = 4 - 1 = 3 > 0$.

Por el criterio de Sylvester, H_f es **definida positiva**, luego $(0, 3)$ es un **mínimo local**.

(c) Carácter global. Como H_f es definida positiva *en todo* $\mathbb{R}^2$ (el hessiano es constante), f es *estrictamente convexa*. Por tanto, el mínimo local es **mínimo global único**.

Valor mínimo: $f(0, 3) = 0 + 0 + 9 - 0 - 18 = -9$. □

Problema 2. *Firma competitiva vía TFI:* $\max \pi(q; p, \alpha) = pq - \alpha q^2$.

(a) Resolución directa. La FOC es

$$\pi'(q) = p - 2\alpha q = 0 \quad \Longrightarrow \quad q^*(p, \alpha) = \frac{p}{2\alpha}.$$

La SOC: $\pi''(q) = -2\alpha < 0$ (pues $\alpha > 0$), confirmando que es un máximo. Como $p, \alpha > 0$, $q^* > 0$ es interior. ✓

(b) Estática comparativa vía TFI.

Paso 1 (Verificar las hipótesis del TFI). Definamos

$$F(q; p, \alpha) = \pi'(q; p, \alpha) = p - 2\alpha q.$$

La condición q^* óptima está definida implícitamente por $F(q^*; p, \alpha) = 0$. Para aplicar el TFI necesitamos $\partial F/\partial q \neq 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -2\alpha \neq 0 \quad (\text{pues } \alpha > 0).\checkmark$$

Observe que $\partial F/\partial q = \pi''(q)$: la condición del TFI es exactamente la *SOC estricta* del problema.

Paso 2 (Aplicar TFI). Por el TFI:

$$\frac{\partial q^*}{\partial p} = -\frac{\partial F/\partial p}{\partial F/\partial q} = -\frac{1}{-2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} > 0.$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F/\partial \alpha}{\partial F/\partial q} = -\frac{-2q^*}{-2\alpha} = -\frac{q^*}{\alpha} = -\frac{p}{2\alpha^2} < 0.$$

Verificación por cálculo directo. Derivando $q^*(p, \alpha) = \dfrac{p}{2\alpha}$:

$$\frac{\partial q^*}{\partial p} = \frac{1}{2\alpha}, \qquad \frac{\partial q^*}{\partial \alpha} = -\frac{p}{2\alpha^2}.$$

Ambos métodos coinciden. ✓

Comentario. En este problema con solución cerrada el cálculo directo es trivial, pero en problemas más complejos (donde q^* no admite forma cerrada) el TFI es *la única* herramienta disponible para hacer estática comparativa.

(c) Interpretación.

- $\partial q^*/\partial p > 0$: si el precio del bien aumenta, conviene producir más (la oferta es creciente en el precio — ley de la oferta).
- $\partial q^*/\partial \alpha < 0$: si los costos se vuelven más inclinados (mayor α), el costo marginal $2\alpha q$ sube y la firma reduce su producción. □

Beneficio máximo: $\pi^*(p, \alpha) = p \cdot \dfrac{p}{2\alpha} - \alpha \cdot \dfrac{p^2}{4\alpha^2} = \dfrac{p^2}{4\alpha}$.

Verifiquemos el teorema de la envolvente: $\dfrac{\partial \pi^*}{\partial p} = \dfrac{p}{2\alpha} = q^*$. ✓

Problema 3. *Lema de Hotelling:* $\pi(p, w) = \max_L [p\sqrt{L} - wL]$.

(a) Solución interior. La FOC es

$$\frac{\partial}{\partial L}\left[p\sqrt{L} - wL\right] = \frac{p}{2\sqrt{L}} - w = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{L^*} = \frac{p}{2w} \quad \Longrightarrow \quad L^* = \frac{p^2}{4w^2}.$$

SOC: $\dfrac{\partial^2}{\partial L^2} = -\dfrac{p}{4L^{3/2}} < 0$ para $L > 0$. ✓ (problema cóncavo).

Oferta: $y^*(p, w) = \sqrt{L^*} = \dfrac{p}{2w}$. Beneficio indirecto:

$$\pi(p, w) = p \cdot \frac{p}{2w} - w \cdot \frac{p^2}{4w^2} = \frac{p^2}{2w} - \frac{p^2}{4w} = \frac{p^2}{4w}.$$

(b) Verificación del lema de Hotelling. Derivando $\pi(p, w) = \dfrac{p^2}{4w}$:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = \frac{2p}{4w} = \frac{p}{2w} = y^*(p, w).\checkmark$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -\frac{p^2}{4w^2} = -L^*(p,w).\checkmark$$

Comentario. El lema de Hotelling es una aplicación directa del teorema de la envolvente. Si $\pi(p,w) = p \cdot y(L^*) - w \cdot L^*$ con $L^* = L^*(p,w)$, entonces al derivar respecto de p:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = y(L^*) + \underbrace{[py'(L^*) - w]}_{=0 \text{ por FOC}} \cdot \frac{\partial L^*}{\partial p} = y^*.$$

El término entre paréntesis se anula por la FOC: esa es la esencia del teorema de la envolvente. □

Problema 4. *UMP Cobb–Douglas* $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$.

Paso 1 (Lagrangiano):

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/2} x_2^{1/2} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I).$$

Paso 2 (FOC):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \tfrac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2} - \lambda p_1 = 0 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}\sqrt{x_2/x_1} = \lambda p_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \tfrac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{-1/2} - \lambda p_2 = 0 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}\sqrt{x_1/x_2} = \lambda p_2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I) = 0. \tag{3}$$

Paso 3 (Tasa marginal de sustitución): Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{x_2/x_1}{x_1/x_2} = \frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} \;\Rightarrow\; \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \;\Rightarrow\; p_2 x_2 = p_1 x_1.$$

(Para Cobb–Douglas con exponentes iguales: el gasto en cada bien es idéntico.)

Paso 4 (Restricción): De (3) y $p_2 x_2 = p_1 x_1$:

$$p_1 x_1 + p_1 x_1 = I \;\Rightarrow\; \boxed{x_1^* = \frac{I}{2p_1}, \qquad x_2^* = \frac{I}{2p_2}.}$$

Paso 5 (Multiplicador y utilidad indirecta): De (1): $\lambda^* = \dfrac{1}{2p_1}\sqrt{x_2^*/x_1^*} = \dfrac{1}{2p_1}\sqrt{p_1/p_2} = \dfrac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}$.

Utilidad indirecta:

$$v(p, I) = \sqrt{x_1^* x_2^*} = \sqrt{\frac{I^2}{4p_1 p_2}} = \frac{I}{2\sqrt{p_1 p_2}}.$$

Interpretación de λ^*. Por el teorema de la envolvente,

$$\lambda^* = \frac{\partial v}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}.\checkmark$$

Es la **utilidad marginal del ingreso**: el incremento en la utilidad máxima alcanzable cuando el ingreso aumenta una unidad. □

Problema 5. *UMP Stone–Geary:* $u = (x_1 - \gamma_1)^\alpha (x_2 - \gamma_2)^{1-\alpha}$.

(a) Reducción a Cobb–Douglas vía cambio de variable.

Definamos $y_i := x_i - \gamma_i$ (consumo *en exceso* sobre la subsistencia). Como $x_i = y_i + \gamma_i$, la restricción presupuestaria se reescribe:

$$p_1(y_1+\gamma_1)+p_2(y_2+\gamma_2)=I \iff p_1y_1+p_2y_2=\underbrace{I-p_1\gamma_1-p_2\gamma_2}_{=:\tilde{I}}.$$

El supuesto $I > p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2$ garantiza $\tilde{I} > 0$ (existe ingreso "disponible" tras cubrir la subsistencia). El problema se reduce a

$$\max_{y_1,y_2>0} y_1^{\alpha}y_2^{1-\alpha} \quad \text{s.a.} \quad p_1y_1+p_2y_2=\tilde{I},$$

que es Cobb–Douglas estándar.

(b) Demandas marshallianas. La solución Cobb–Douglas es bien conocida:

$$y_1^* = \alpha\,\frac{\tilde{I}}{p_1}, \qquad y_2^* = (1-\alpha)\,\frac{\tilde{I}}{p_2}.$$

Devolviendo a las variables originales:

$$\boxed{x_1^*(p,I)=\gamma_1+\frac{\alpha}{p_1}\big(I-p_1\gamma_1-p_2\gamma_2\big), \quad x_2^*(p,I)=\gamma_2+\frac{1-\alpha}{p_2}\big(I-p_1\gamma_1-p_2\gamma_2\big).}$$

Sistema de Gasto Lineal (LES). El gasto en cada bien es

$$p_1x_1^* = p_1\gamma_1+\alpha(I-p_1\gamma_1-p_2\gamma_2),$$

lineal en los precios y el ingreso I. Lo mismo para $p_2x_2^*$. Esta forma funcional es la *base empírica del LES* de Stone (1954).

(c) Interpretación. Estructura de dos pasos:

- *Primero*, el consumidor cubre la canasta de subsistencia (γ_1,γ_2), con un costo $p_1\gamma_1+p_2\gamma_2$.
- *Después*, asigna el ingreso disponible $\tilde{I}$ entre los dos bienes según proporciones constantes α y $1-\alpha$, como en Cobb–Douglas.

El parámetro α es la *propensión marginal a gastar* en el bien 1 fuera de la subsistencia: $\partial(p_1x_1^*)/\partial I = \alpha$. □

Problema 6. *EMP Cobb–Douglas:* $\min p_1x_1+p_2x_2$ *s.a.* $x_1^{1/2}x_2^{1/2}=\bar{u}$.

Paso 1 (Lagrangiano):

$$\mathcal{L}=p_1x_1+p_2x_2-\mu\big(x_1^{1/2}x_2^{1/2}-\bar{u}\big).$$

Paso 2 (FOC):

$$p_1=\mu\cdot\tfrac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}, \tag{1}$$
$$p_2=\mu\cdot\tfrac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{-1/2}, \tag{2}$$
$$x_1^{1/2}x_2^{1/2}=\bar{u}. \tag{3}$$

Paso 3 (TMS): Dividiendo (1)/(2):

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{x_2}{x_1} \;\Rightarrow\; x_2=\frac{p_1}{p_2}x_1. \quad (*)$$

Paso 4 (Restricción): Sustituyendo (*) en (3):

$$\sqrt{x_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} x_1} = \bar{u} \;\Rightarrow\; x_1\sqrt{p_1/p_2} = \bar{u} \;\Rightarrow\; \boxed{h_1(p, \bar{u}) = \bar{u}\sqrt{p_2/p_1}.}$$

Análogamente, $\boxed{h_2(p, \bar{u}) = \bar{u}\sqrt{p_1/p_2}.}$

Paso 5 (Función de gasto):

$$e(p, \bar{u}) = p_1 h_1 + p_2 h_2 = p_1\bar{u}\sqrt{p_2/p_1} + p_2\bar{u}\sqrt{p_1/p_2} = \bar{u}\big[\sqrt{p_1 p_2} + \sqrt{p_1 p_2}\big] = \boxed{2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}.}$$

Paso 6 (Lema de Shephard): Verifiquemos $h_i = \partial e/\partial p_i$.

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = 2\bar{u} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \bar{u}\sqrt{p_2/p_1} = h_1(p, \bar{u}).\checkmark$$

Simétricamente, $\dfrac{\partial e}{\partial p_2} = \bar{u}\sqrt{p_1/p_2} = h_2.\ \square$

Verificación de la dualidad. Notar que sustituyendo $\bar{u} = v(p, I) = \dfrac{I}{2\sqrt{p_1 p_2}}$ del Problema 4:

$$e\big(p, v(p, I)\big) = 2 \cdot \frac{I}{2\sqrt{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{p_1 p_2} = I.\checkmark$$

Problema 7. *Minimización de costos:* $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

Paso 1 (Lagrangiano):

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \mu\big(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - \bar{q}\big).$$

Paso 2 (FOC):

$$w_1 = \mu \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}}, \tag{1}$$

$$w_2 = \mu \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}}, \tag{2}$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \bar{q}. \tag{3}$$

Paso 3 (TMS de insumos): Dividiendo (1)/(2):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} \implies \sqrt{x_2} = \frac{w_1}{w_2}\sqrt{x_1}.$$

Paso 4 (Sustitución en restricción):

$$\sqrt{x_1} + \frac{w_1}{w_2}\sqrt{x_1} = \bar{q} \implies \sqrt{x_1} \cdot \frac{w_1 + w_2}{w_2} = \bar{q} \implies \sqrt{x_1} = \frac{\bar{q}\, w_2}{w_1 + w_2}.$$

Luego:

$$\boxed{x_1^c(w, \bar{q}) = \bar{q}^2\left(\frac{w_2}{w_1 + w_2}\right)^2, \qquad x_2^c(w, \bar{q}) = \bar{q}^2\left(\frac{w_1}{w_1 + w_2}\right)^2.}$$

Paso 5 (Función de costos):

$$c(w,\bar{q}) = w_1 x_1^c + w_2 x_2^c = \bar{q}^2 \left[\frac{w_1 w_2^2}{(w_1+w_2)^2} + \frac{w_2 w_1^2}{(w_1+w_2)^2} \right]$$
$$= \bar{q}^2 \cdot \frac{w_1 w_2 (w_1+w_2)}{(w_1+w_2)^2} = \boxed{\bar{q}^2 \cdot \frac{w_1 w_2}{w_1+w_2}.}$$

Paso 6 (Lema de Shephard). Verifiquemos $\partial c/\partial w_1 = x_1^c$:

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = \bar{q}^2 \cdot \frac{w_2(w_1+w_2) - w_1 w_2}{(w_1+w_2)^2} = \bar{q}^2 \cdot \frac{w_2^2}{(w_1+w_2)^2} = x_1^c . \checkmark$$

Simétricamente para w_2. $\square$

Observación económica. Esta tecnología ($f = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$) admite *sustitución imperfecta* entre los insumos: a diferencia de Cobb–Douglas o Leontief, las isocuantas son rectas curvadas. La participación óptima de cada insumo es proporcional al *cuadrado* del precio del otro insumo (relativo a la suma de precios).

II. Ejercicios para resolver en casa

Problema 8. *Optimización irrestricta de* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Paso 1 (Puntos críticos):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \;\Rightarrow\; y = x^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \;\Rightarrow\; x = y^2.$$

Sustituyendo: $x = (x^2)^2 = x^4 \;\Rightarrow\; x(x^3 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = 1$.

Puntos críticos: $P_0 = (0,0)$ y $P_1 = (1,1)$.

Paso 2 (Hessiano):

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

En $P_0 = (0,0)$*:* $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9 < 0$.

Como $\det H_f = -9 < 0$, el hessiano tiene un valor propio positivo y otro negativo: P_0 es un **punto silla**.

En $P_1 = (1,1)$*:* $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$. Definida positiva.

P_1 es un **mínimo local**.

Paso 3 (Carácter global): ***f*** **no tiene mínimo ni máximo global** en $\mathbb{R}^2$. En efecto, $f(x,0) = x^3$ no es acotado ni superior ni inferiormente cuando $x \to \pm\infty$. □

Problema 9. *Monopolio vía TFI con* $\pi(q) = (a - bq)q - cq - F$.

(a) FOC, SOC y solución.

$$\pi'(q) = a - 2bq - c = 0 \;\Rightarrow\; q^* = \frac{a-c}{2b}.$$

SOC: $\pi''(q) = -2b < 0$ ✓. Como $c < a$, $q^* > 0$.

Precio óptimo: $p^* = a - bq^* = a - \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{a+c}{2}$.

(b) Estática comparativa vía TFI.

Definamos $F(q; a, b, c) = \pi'(q; a, b, c, F) = a - 2bq - c$. La condición óptima es $F(q^*; a, b, c) = 0$.

Hipótesis del TFI:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -2b < 0, \quad \text{no nulo.}\checkmark$$

(Equivalente a la SOC estricta.) Aplicamos el TFI con la fórmula $\partial q^*/\partial\theta = -\frac{\partial F/\partial\theta}{\partial F/\partial q}$ para cada parámetro $\theta \in \{a, b, c\}$:

$$\frac{\partial q^*}{\partial a} = -\frac{1}{-2b} = \frac{1}{2b} > 0,$$
$$\frac{\partial q^*}{\partial b} = -\frac{-2q^*}{-2b} = -\frac{q^*}{b} = -\frac{a-c}{2b^2} < 0,$$
$$\frac{\partial q^*}{\partial c} = -\frac{-1}{-2b} = -\frac{1}{2b} < 0.$$

Verificación por cálculo directo. Derivando $q^* = \dfrac{a-c}{2b}$: $\frac{\partial q^*}{\partial a} = \frac{1}{2b}$, $\frac{\partial q^*}{\partial b} = -\frac{a-c}{2b^2}$, $\frac{\partial q^*}{\partial c} = -\frac{1}{2b}$. Coincide con TFI. ✓

(c) Interpretación.

- $\partial q^*/\partial a > 0$: una demanda más alta (mayor a) lleva a producir más.
- $\partial q^*/\partial b < 0$: una demanda con pendiente más inclinada (mayor b, equivalentemente demanda menos elástica) reduce la cantidad óptima del monopolista.
- $\partial q^*/\partial c < 0$: si sube el costo marginal, el monopolista produce menos.

(d) Beneficio máximo:

$$\pi^* = \left(\tfrac{a+c}{2}\right)\left(\tfrac{a-c}{2b}\right) - c \cdot \tfrac{a-c}{2b} - F = \frac{(a-c)(a+c-2c)}{4b} - F = \frac{(a-c)^2}{4b} - F.$$

Envolvente respecto de a:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial a} = \frac{2(a-c)}{4b} = \frac{a-c}{2b} = q^*.\checkmark$$

Esta es la versión monopolista del lema de Hotelling: la sensibilidad del beneficio a un cambio del parámetro de demanda equivale (en signo) a la cantidad óptima. $\square$

Problema 10. *Identidad de Roy.*

Paso 1 (Planteamiento por envolvente). El lagrangiano del UMP es

$$\mathcal{L}(x, \lambda; p, I) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I).$$

En la óptima interior $x^* = x^*(p, I), \lambda^* = \lambda^*(p, I)$, se cumple $v(p, I) = \mathcal{L}(x^*, \lambda^*; p, I)$ *y además la condición de primer orden* anula los términos cruzados al derivar respecto de los parámetros (*teorema de la envolvente*).

Paso 2 (Derivar respecto de p_i):

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}\right|_{x^*, \lambda^*} = -\lambda^* \, x_i^*.$$

(Los términos $(\partial \mathcal{L}/\partial x) \cdot (\partial x^*/\partial p_i)$ y $(\partial \mathcal{L}/\partial \lambda) \cdot (\partial \lambda^*/\partial p_i)$ son cero por las FOC.)

Paso 3 (Derivar respecto de I):

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I}\right|_{x^*, \lambda^*} = \lambda^*.$$

Paso 4 (Dividir):

$$-\frac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial I} = -\frac{-\lambda^* x_i^*}{\lambda^*} = x_i^*. \quad \square$$

Verificación con $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

UMP: usando proporcionalidad de gasto típica de Cobb–Douglas con exponentes $(1, 1)$ (equivalente a $(1/2, 1/2)$ por monotonicidad):

$$x_1^* = \frac{I}{2p_1}, \qquad x_2^* = \frac{I}{2p_2}.$$

Utilidad indirecta:

$$v(p, I) = x_1^* x_2^* = \frac{I^2}{4p_1 p_2}.$$

Derivadas:

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = -\frac{I^2}{4p_1^2 p_2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial I} = \frac{I}{2p_1 p_2}.$$

Identidad de Roy:

$$-\frac{\partial v/\partial p_1}{\partial v/\partial I} = -\frac{-I^2/(4p_1^2 p_2)}{I/(2p_1p_2)} = \frac{I^2/(4p_1^2p_2)}{I/(2p_1p_2)} = \frac{I}{2p_1} = x_1^*.\checkmark$$

Problema 11. *Elección intertemporal: del caso $T = 2$ al caso general T.*

(a) Caso de 2 períodos ($T = 2$).

Reescribiendo, $U = \ln c_0 + \beta \ln c_1$ y la restricción $c_0 + \dfrac{c_1}{1+r} = w_0 + \dfrac{w_1}{1+r} =: W$.

Paso 1 (Lagrangiano):

$$\mathcal{L} = \ln c_0 + \beta \ln c_1 - \mu\Big(c_0 + \tfrac{c_1}{1+r} - W\Big).$$

Paso 2 (FOC):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c_0} = \mu, \\ &\frac{\beta}{c_1} = \frac{\mu}{1+r} \implies c_1 = \beta(1+r)c_0. \end{aligned}$$

Paso 3 (Restricción): $c_0 + \dfrac{\beta(1+r)c_0}{1+r} = W \;\Rightarrow\; c_0(1+\beta) = W.$

$$\boxed{c_0^* = \frac{W}{1+\beta}, \qquad c_1^* = \frac{\beta(1+r)W}{1+\beta}.}$$

Prestamista vs prestatario:

- *Prestamista* ($c_0^* < w_0$): $\dfrac{W}{1+\beta} < w_0 \Leftrightarrow \frac{w_1}{1+r} < \beta w_0$.
- *Prestatario*: la desigualdad opuesta.

Caso $w_1 = 0$: Entonces $W = w_0$ y $c_0^* = \dfrac{w_0}{1+\beta}$, que *no depende de* r: $\partial c_0^*/\partial r = 0$.

Interpretación. Con utilidad logarítmica la elasticidad de sustitución intertemporal es igual a 1, lo que hace que los efectos sustitución e ingreso de un cambio en r se cancelen exactamente sobre c_0^*. Una r mayor encarece c_0 relativo a c_1 (incentivo a ahorrar $\to$ menos c_0), pero a la vez aumenta el ingreso del ahorrista (más poder de compra futuro $\to$ más c_0); en el caso log, ambos efectos se neutralizan.

(b) Caso general con T períodos.

(i) Lagrangiano y FOC (ecuación de Euler). El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln c_t - \mu\Big(\sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{(1+r)^t} - W\Big).$$

Derivando respecto de c_t para cada $t = 0, 1, \ldots, T-1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{c_t} - \frac{\mu}{(1+r)^t} = 0 \implies c_t = \frac{\beta^t(1+r)^t}{\mu}. \quad (\star)$$

Comparando consumos consecutivos (*ecuación de Euler*):

$$\boxed{\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1+r), \quad \text{para todo } t = 0, 1, \ldots, T-2.}$$

(ii) Crecimiento geométrico. De ($\star$) con t y $t = 0$:

$$\frac{c_t}{c_0} = \frac{\beta^t(1+r)^t/\mu}{1/\mu} = \big[\beta(1+r)\big]^t \implies \boxed{c_t^* = \big[\beta(1+r)\big]^t c_0^*.}$$

(iii) Aplicar la restricción presupuestaria. Sustituyendo $c_t^* = [\beta(1+r)]^t c_0^*$:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{[\beta(1+r)]^t c_0^*}{(1+r)^t} = W \implies c_0^* \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t = W.$$

Usando la suma geométrica $\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t = \dfrac{1-\beta^T}{1-\beta}$:

$$\boxed{c_0^* = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\, W, \qquad c_t^* = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\big[\beta(1+r)\big]^t\, W.}$$

Verificación con $T = 2$: $c_0^* = \dfrac{1-\beta}{1-\beta^2} W = \dfrac{1-\beta}{(1-\beta)(1+\beta)} W = \dfrac{W}{1+\beta}$. ✓ Coincide con la parte (a).

(iv) Trayectoria del consumo. La razón $c_{t+1}/c_t = \beta(1+r)$ determina la forma de la senda óptima:

- *Si $\beta(1+r) > 1$:* c_t^* es **creciente** en t. Esto ocurre cuando el *retorno del ahorro* (r) es *mayor* que la *impaciencia* ($1/\beta - 1 \approx -\ln\beta$). El consumidor prefiere postergar consumo para aprovechar el interés.
- *Si $\beta(1+r) = 1$:* $c_t^* = c_0^*$ es **constante** (*suavizamiento perfecto del consumo*). Esta es la *Hipótesis del Ingreso Permanente* de Friedman: el consumo se suaviza a lo largo del tiempo cuando paciencia y retorno se equilibran.
- *Si $\beta(1+r) < 1$:* c_t^* es **decreciente**. El consumidor es "muy impaciente" relativo al retorno del ahorro y prefiere consumir hoy.

(v) Límite $T \to \infty$. Como $\beta \in (0, 1)$, se tiene $\beta^T \to 0$. Luego:

$$\lim_{T\to\infty} c_0^* = \lim_{T\to\infty} \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\, W = (1-\beta)W.$$

Este es el *consumo óptimo de vida infinita*: una fracción $(1-\beta)$ de la riqueza presente. Más paciente el consumidor (mayor β), más cerca de cero es esa fracción (consume menos hoy, ahorra más). □

Problema 12. *Dualidad del productor con $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$.*

(a) Minimización de costos.

Lagrangiano: $\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \mu(x_1^{1/4} x_2^{1/4} - \bar{q})$.

FOC:

$$\begin{aligned} w_1 &= \mu \cdot \tfrac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4}, \\ w_2 &= \mu \cdot \tfrac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4}. \end{aligned}$$

Dividiendo: $\dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{w_1}{w_2}x_1$. Sustituyendo en la restricción $x_1^{1/4}x_2^{1/4} = \bar{q}$, es decir $\sqrt[4]{x_1x_2} = \bar{q}$:

$$x_1 \cdot \frac{w_1}{w_2}x_1 = \bar{q}^4 \;\Rightarrow\; x_1^2 = \bar{q}^4\frac{w_2}{w_1} \;\Rightarrow\; \boxed{x_1^c = \bar{q}^2\sqrt{w_2/w_1}, \qquad x_2^c = \bar{q}^2\sqrt{w_1/w_2}.}$$

Función de costos:

$$c(w,\bar{q}) = w_1x_1^c + w_2x_2^c = \bar{q}^2\left[\sqrt{w_1w_2} + \sqrt{w_1w_2}\right] = 2\bar{q}^2\sqrt{w_1w_2}.$$

(b) Lema de Shephard:

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = 2\bar{q}^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{w_2/w_1} = \bar{q}^2\sqrt{w_2/w_1} = x_1^c.\checkmark$$

Simétricamente para w_2.

(c) Maximización de beneficios.

$$\max_{q\geq 0}\; pq - c(w,q) = pq - 2q^2\sqrt{w_1w_2}.$$

FOC: $p - 4q\sqrt{w_1w_2} = 0 \;\Rightarrow\; q^* = \dfrac{p}{4\sqrt{w_1w_2}}$. SOC: $-4\sqrt{w_1w_2} < 0$. ✓

Beneficio indirecto:

$$\pi^*(p,w) = p \cdot \frac{p}{4\sqrt{w_1w_2}} - 2\left(\tfrac{p}{4\sqrt{w_1w_2}}\right)^2\sqrt{w_1w_2} = \frac{p^2}{4\sqrt{w_1w_2}} - \frac{p^2}{8\sqrt{w_1w_2}} = \frac{p^2}{8\sqrt{w_1w_2}}.$$

(d) Lema de Hotelling:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = \frac{2p}{8\sqrt{w_1w_2}} = \frac{p}{4\sqrt{w_1w_2}} = q^*.\checkmark$$

Para w_1: usando que $\sqrt{w_1w_2} = w_1^{1/2}w_2^{1/2}$,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_1} = \frac{p^2}{8} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) w_1^{-3/2}w_2^{-1/2} = -\frac{p^2}{16\, w_1\sqrt{w_1w_2}}.$$

Por otra parte, la demanda no condicionada del insumo 1 es $x_1^* = x_1^c(w,q^*)$:

$$x_1^* = (q^*)^2\sqrt{w_2/w_1} = \frac{p^2}{16w_1w_2}\sqrt{w_2/w_1} = \frac{p^2}{16\, w_1\sqrt{w_1w_2}}.$$

Luego $\partial\pi^*/\partial w_1 = -x_1^*$. ✓ □