

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**  
**IOP224 – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES**

Práctica Dirigida 3

Primer semestre 2026-1

*Temas: optimización irrestricta, estática comparativa, teorema de la envolvente, multiplicadores de Lagrange y aplicaciones a microeconomía (UMP, EMP, minimización de costos, maximización del beneficio).*

**I. Ejercicios para la sesión de práctica**

**1. (Optimización irrestricta.)** Considere la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

- (a) Halle todos los puntos críticos de  $f$ .
- (b) Calcule la matriz hessiana  $H_f$  y clasifique cada punto crítico (máximo, mínimo, silla).
- (c) ¿El extremo encontrado es local o global? Justifique.

**2. (Estática comparativa vía TFI: firma competitiva.)** Una firma competitiva enfrenta un precio  $p > 0$  y produce  $q \geq 0$  unidades con función de costos  $c(q) = \alpha q^2$ ,  $\alpha > 0$ . Su beneficio es  $\pi(q; p, \alpha) = pq - \alpha q^2$ .

- (a) Plantee y resuelva el problema  $\max_{q \geq 0} \pi(q; p, \alpha)$ , verifique la SOC y obtenga  $q^*(p, \alpha)$ .
- (b) Sin sustituir  $q^*$  explícitamente, defina la *condición de primer orden* como  $F(q; p, \alpha) = \pi'(q; p, \alpha) = p - 2\alpha q = 0$ . Verifique las hipótesis del TFI ( $\partial F / \partial q \neq 0$  en el óptimo) y aplique el TFI para calcular  $\frac{\partial q^*}{\partial p}$  y  $\frac{\partial q^*}{\partial \alpha}$  a partir de

$$\frac{\partial q^*}{\partial p} = -\frac{\partial F / \partial p}{\partial F / \partial q}, \quad \frac{\partial q^*}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F / \partial \alpha}{\partial F / \partial q}.$$

Compare con el cálculo directo a partir de  $q^* = p/(2\alpha)$ .

- (c) Interprete económicamente los signos obtenidos.

**3. (Teorema de la envolvente – Lema de Hotelling.)** Un productor utiliza trabajo  $L \geq 0$  para producir un bien mediante  $f(L) = \sqrt{L}$ . Vende el producto al precio  $p > 0$  y paga el salario  $w > 0$ . Su función de beneficio es

$$\pi(p, w) = \max_{L \geq 0} [p\sqrt{L} - wL].$$

- (a) Resuelva el problema interior y obtenga  $L^*(p, w)$ , la oferta  $y^*(p, w) = \sqrt{L^*}$ , y la función de beneficio indirecta  $\pi(p, w)$ .

(b) Verifique el *lema de Hotelling*:  $\frac{\partial \pi}{\partial p} = y^*(p, w)$  y  $\frac{\partial \pi}{\partial w} = -L^*(p, w)$ .

**4. (Lagrange – UMP Cobb–Douglas.)** Un consumidor tiene preferencias  $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ , enfrenta precios  $p_1, p_2 > 0$  e ingreso  $I > 0$ . Resuelva el problema de maximización de utilidad

$$\max_{x_1, x_2 > 0} u(x_1, x_2) \quad \text{sujeto a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I,$$

vía el método de Lagrange. Obtenga las demandas marshallianas  $x_1^*(p, I)$ ,  $x_2^*(p, I)$ , el multiplicador  $\lambda^*$  y la utilidad indirecta  $v(p, I)$ . ¿Qué interpreta económicamente  $\lambda^*$ ?

**5. (UMP con preferencias Stone–Geary.)** Considere ahora un consumidor con *preferencias Stone–Geary*:

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - \gamma_1)^\alpha (x_2 - \gamma_2)^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \gamma_1, \gamma_2 \geq 0,$$

donde  $\gamma_i$  representa el *consumo de subsistencia* del bien  $i$ . Se asume  $x_i > \gamma_i$  y que el ingreso  $I$  supera el costo de la canasta de subsistencia:  $I > p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2$ .

- Mediante el cambio de variable  $y_i = x_i - \gamma_i$ , reduzca el UMP a un problema Cobb–Douglas en las variables  $(y_1, y_2)$  con un *ingreso efectivo*  $\tilde{I} = I - p_1 \gamma_1 - p_2 \gamma_2$ .
- Obtenga las demandas marshallianas  $x_1^*(p, I)$ ,  $x_2^*(p, I)$ . Verifique que el gasto en cada bien es lineal en los precios y el ingreso (*Sistema de Gasto Lineal*, LES).
- Interprete económicamente la estructura de la demanda: ¿qué fracción del “ingreso disponible” se gasta en cada bien?

**6. (Lagrange – Minimización del gasto del consumidor.)** Con las preferencias del Problema 4,  $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ , resuelva el problema dual:

$$\min_{x_1, x_2 > 0} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{sujeto a} \quad x_1^{1/2} x_2^{1/2} = \bar{u},$$

donde  $\bar{u} > 0$ . Obtenga las demandas hicksianas  $h_1(p, \bar{u})$ ,  $h_2(p, \bar{u})$  y la función de gasto  $e(p, \bar{u})$ . Verifique el *lema de Shephard*:  $h_i = \partial e / \partial p_i$ .

**7. (Minimización de costos del productor.)** Una firma produce un bien con la tecnología

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2},$$

donde  $x_1, x_2 \geq 0$  son cantidades de los insumos, con precios  $w_1, w_2 > 0$ . Resuelva el problema de minimización de costos

$$\min_{x_1, x_2 > 0} w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{sujeto a} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \bar{q},$$

donde  $\bar{q} > 0$  es el nivel de producción deseado.

- Obtenga las demandas condicionadas de insumos  $x_1^c(w, \bar{q})$  y  $x_2^c(w, \bar{q})$ .
- Obtenga la función de costos  $c(w, \bar{q})$  y verifique el *lema de Shephard*:  $x_i^c = \partial c / \partial w_i$ .



**II. Ejercicios para resolver en casa**

**8. (Optimización irrestricta con varios puntos críticos.)** Considere

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

- (a) Halle todos los puntos críticos.
- (b) Clasifique cada uno usando el criterio del hessiano.
- (c) ¿Existe algún extremo global de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ ? Justifique.

**9. (Estática comparativa: monopolio vía TFI.)** Un monopolista enfrenta la demanda inversa  $p(q) = a - bq$  ( $a, b > 0$ ) y produce con costo total  $c(q) = cq + F$  ( $c \in (0, a)$ ,  $F \geq 0$ ). Su beneficio es  $\pi(q; a, b, c, F) = (a - bq)q - cq - F$ .

- (a) Plantee y resuelva  $\max_{q \geq 0} \pi(q)$ . Verifique la SOC y obtenga  $q^*$  y  $p^*$  en función de los parámetros.
- (b) Defina  $F(q; a, b, c) = \pi'(q; a, b, c, F)$ . Verifique que  $\partial F / \partial q \neq 0$  en el óptimo y aplique el **Teorema de la Función Implícita** para calcular  $\frac{\partial q^*}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial q^*}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial q^*}{\partial c}$  sin sustituir la solución explícita. *Sugerencia:*  
 $\frac{\partial q^*}{\partial \theta} = -\frac{\partial F / \partial \theta}{\partial F / \partial q}$  para cada parámetro  $\theta$ .
- (c) Interprete económicamente los signos obtenidos.
- (d) ¿Cuál es el beneficio máximo  $\pi^*$ ? Verifique el teorema de la envolvente aplicado al parámetro  $a$ :  
 $\frac{\partial \pi^*}{\partial a} = q^*$ .

**10. (Envolvente: Identidad de Roy.)** Sea

$$v(p_1, p_2, I) = \max_{x_1, x_2 > 0} u(x_1, x_2) \text{ sujeto a } p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

la función de utilidad indirecta. Suponiendo que la solución es interior y los multiplicadores existen, demuestre que se cumple la *identidad de Roy*:

$$x_i^*(p, I) = -\frac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial I}, \quad i = 1, 2.$$

*Sugerencia:* aplique el teorema de la envolvente al lagrangiano respecto de  $p_i$  y de  $I$ .

Verifique la identidad de Roy en el caso  $u(x_1, x_2) = x_1x_2$  con  $p_1, p_2, I > 0$ : calcule las demandas marshallianas, la utilidad indirecta y compruebe la fórmula.

**11. (Elección intertemporal: del caso de 2 períodos al caso general  $T$ .)** Un consumidor vive  $T$  períodos, indexados  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ . En el período  $t$  recibe un ingreso exógeno  $w_t \geq 0$ , consume  $c_t > 0$ , y puede prestar o pedir prestado a una tasa de interés  $r > 0$  (constante). Sus preferencias son

$$U(c_0, c_1, \dots, c_{T-1}) = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln c_t, \quad \beta \in (0, 1),$$

y la restricción presupuestaria intertemporal es

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{w_t}{(1+r)^t} =: W,$$

donde  $W > 0$  es la *riqueza descontada total* (valor presente de los ingresos).

**(a) Caso de 2 períodos.** Tome  $T = 2$ . Resuelva el problema vía Lagrange y obtenga  $c_0^*, c_1^*$ . Identifique cuándo el consumidor es *prestamista* ( $c_0^* < w_0$ ) y cuándo es *prestatarario*. Considerando el caso  $w_1 = 0$ , calcule  $\partial c_0^*/\partial r$  e interprete económicamente (efectos sustitución vs ingreso bajo utilidad logarítmica).

**(b) Caso general  $T$ .** Para  $T$  arbitrario:

- (i) Plantee el lagrangiano y derive las condiciones de primer orden (la *ecuación de Euler* relacionando  $c_t$  con  $c_{t+1}$ ).
- (ii) Demuestre que el consumo óptimo crece de manera geométrica:  $c_t^* = [\beta(1+r)]^t c_0^*$ .
- (iii) Use la restricción presupuestaria para obtener

$$c_0^* = \frac{1-\beta}{1-\beta^T} W.$$

(Sugerencia: la suma geométrica  $\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t = \frac{1-\beta^T}{1-\beta}$ .)

- (iv) Discuta la trayectoria de  $c_t^*$ :
  - Si  $\beta(1+r) > 1$ : ¿crece o decrece el consumo?
  - Si  $\beta(1+r) = 1$ : ¿qué ocurre?
  - Si  $\beta(1+r) < 1$ : ¿crece o decrece?

Interprete el papel de la *paciencia*  $\beta$  y la tasa  $r$ .

- (v) Verifique que en el límite  $T \rightarrow \infty$  (vida infinita) y  $\beta < 1$ ,  $c_0^* \rightarrow (1-\beta)W$ .

**12. (Problema dual del productor.)** Una empresa produce con tecnología  $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$ , donde  $x_1, x_2 \geq 0$  son insumos con precios  $w_1, w_2 > 0$ . El precio del producto es  $p > 0$ .

- (a) **Minimización de costos:** Resuelva  $\min_{x_1, x_2 > 0} w_1 x_1 + w_2 x_2$  s.a.  $x_1^{1/4} x_2^{1/4} = \bar{q}$ . Obtenga las demandas condicionadas  $x_i^c(w, \bar{q})$  y la función de costos  $c(w, \bar{q})$ .
- (b) Verifique el *lema de Shephard*:  $x_i^c = \partial c / \partial w_i$ .
- (c) **Maximización de beneficios:** Resuelva  $\max_{q \geq 0} pq - c(w, q)$ . Obtenga la oferta  $q^*(p, w)$  y la función de beneficio  $\pi^*(p, w)$ .
- (d) Verifique el *lema de Hotelling*:  $q^* = \partial \pi^* / \partial p$  y  $x_i^* = -\partial \pi^* / \partial w_i$  (donde  $x_i^* = x_i^c(w, q^*)$  son las demandas no condicionadas).

**Referencias**

- Fondo Editorial PUCP. *Álgebra Lineal y Optimización para el Análisis Económico* de Chávez y Gallardo (2025).

- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.
- 

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.