PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
SOLUCIONARIO – Práctica Dirigida 2

Primer semestre 2026-1

Soluciones detalladas en azul. Cada paso está justificado; en examen se espera un nivel de detalle similar.

I. Topología en $\mathbb{R}^n$

Problema I.1. *Probar* $B_{\|\cdot\|_1}(a;r) \subset B_{\|\cdot\|_2}(a;r) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(a;r)$.

Paso 1: $B_{\|\cdot\|_1} \subset B_{\|\cdot\|_2}$.

Sea $x \in B_{\|\cdot\|_1}(a;r)$, es decir $\|x-a\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| < r$. Debemos probar que $\|x-a\|_2 < r$. Definamos $d_i = x_i - a_i$. Usando la desigualdad clásica:

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |d_i|\right)^2.$$

Justificación: al expandir $\left(\sum |d_i|\right)^2 = \sum d_i^2 + \sum_{i\neq j} |d_i||d_j|$, el segundo sumando es ≥ 0.

Tomando raíz cuadrada (ambos lados positivos):

$$\|x-a\|_2 = \left(\sum_i d_i^2\right)^{1/2} \leq \sum_i |d_i| = \|x-a\|_1 < r.$$

Luego $x \in B_{\|\cdot\|_2}(a;r)$.

Paso 2: $B_{\|\cdot\|_2} \subset B_{\|\cdot\|_\infty}$.

Sea $x \in B_{\|\cdot\|_2}(a;r)$, es decir $\|x-a\|_2 = \left(\sum_i d_i^2\right)^{1/2} < r$.

Sea i_0 el índice donde se alcanza el máximo: $|d_{i_0}| = \max_i |d_i| = \|x-a\|_\infty$. Entonces:

$$\|x-a\|_\infty = |d_{i_0}| = \sqrt{d_{i_0}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2} = \|x-a\|_2 < r.$$

La desigualdad $d_{i_0}^2 \leq \sum_i d_i^2$ vale porque sumamos términos no negativos.

Luego $x \in B_{\|\cdot\|_\infty}(a;r)$. $\square$

Problema I.2. *Sumas de Minkowski* $A+B$.

(a) Sea $z \in A+B$, es decir $z = a+b$ con $a \in A$ y $b \in B$. Ciertamente $A+b$ es abierto. Luego,

$$A+B = \bigcup_{b\in B}(A+\{b\}).$$

Como la unión de abiertos es abierto, concluimos. $\square$

(b) Falso. Damos un contraejemplo explícito en $\mathbb{R}^2$.

Sea $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ (el eje horizontal) y $B = \{(x, 1/x) : x > 0\}$ (rama de hipérbola).

Paso 1: A es cerrado (preimagen de $\{0\}$ por la proyección continua $(x,y) \mapsto y$). B es cerrado (grafo de la función continua $x \mapsto 1/x$ en $(0,\infty)$; si $(x_n, 1/x_n) \to (a,b)$ con $x_n > 0$, entonces $a > 0$ y $b = 1/a$, así $(a,b) \in B$).

Paso 2: Para cada $n \geq 1$, tomamos $a_n = (-n, 0) \in A$ y $b_n = (n, 1/n) \in B$. Entonces

$$z_n = a_n + b_n = (-n+n,\ 0+1/n) = (0, 1/n) \in A+B.$$

Paso 3: $z_n = (0, 1/n) \to (0, 0)$. Si $(0, 0) \in A + B$, existirían $(\tilde{x}, 0) \in A$ y $(\hat{x}, 1/\hat{x}) \in B$ con $\tilde{x} + \hat{x} = 0$ y $1/\hat{x} = 0$, lo cual es imposible ($1/\hat{x} \neq 0$ para todo $\hat{x} > 0$).

Luego $(0, 0) \notin A + B$, pero es límite de elementos de $A + B$, así que $A + B$ no es cerrado. □

(c) Sea (z_n) una sucesión en $A + B$ con $z_n \to z$. Escribimos $z_n = a_n + b_n$ con $a_n \in A$ y $b_n \in B$.

Paso 1: Como A es compacto, la sucesión $(a_n) \subset A$ posee una subsucesión convergente $a_{n_k} \to a \in A$ (por Bolzano–Weierstrass).

Paso 2: Entonces $b_{n_k} = z_{n_k} - a_{n_k} \to z - a$. Como $b_{n_k} \in B$ para todo k y B es cerrado, el límite $z - a$ pertenece a B.

Paso 3: Así $z = a + (z - a)$ con $a \in A$ y $z - a \in B$, por lo que $z \in A + B$.

Hemos probado que todo límite de elementos de $A + B$ está en $A + B$; luego $A + B$ es cerrado. □

Problema I.3. *Compacidad del conjunto presupuestario $B(p, w)$.*

Paso 1 (Acotado): Sea $x \in B(p, w)$. Para cada $i = 1, \ldots, n$:

$$p_i x_i \leq \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = p^\top x \leq w.$$

Como $p_i > 0$ (pues $p \gg 0$), dividimos: $x_i \leq w/p_i$. Además $x \geq 0$ implica $x_i \geq 0$. Luego $B(p, w) \subset \prod_{i=1}^{n} [0,\, w/p_i]$, que es un rectángulo acotado.

Paso 2 (Cerrado): Escribimos $B(p, w) = \mathbb{R}^n_+ \cap \{x \in \mathbb{R}^n : p^\top x \leq w\}$.

$\mathbb{R}^n_+ = \{x : x_i \geq 0,\ \forall i\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x : x_i \geq 0\}$ es intersección de cerrados (cada $\{x : x_i \geq 0\}$ es la preimagen de $[0, \infty)$ por la proyección $x \mapsto x_i$, que es continua).

$\{x : p^\top x \leq w\}$ es cerrado: es la preimagen de $(-\infty, w]$ (cerrado en $\mathbb{R}$) por la función lineal continua $x \mapsto p^\top x$.

Intersección de cerrados es cerrado.

Paso 3 (Compacto): Por Heine–Borel, un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. $B(p, w)$ cumple ambas condiciones. □

II. Conjuntos Convexos

Problema II.1. *Convexidad del conjunto Leontief U.*

(a) Sean $x, y \in U$ y $t \in [0, 1]$. Debemos probar que $z := tx + (1 - t)y \in U$, es decir, que $\min_i\{z_i/a_i\} \geq c$.

Paso 1: Para cada índice i fijo, por hipótesis $x_i/a_i \geq c$ y $y_i/a_i \geq c$.

Paso 2: Calculamos:

$$\frac{z_i}{a_i} = \frac{tx_i + (1 - t)y_i}{a_i} = t \cdot \frac{x_i}{a_i} + (1 - t) \cdot \frac{y_i}{a_i} \geq tc + (1 - t)c = c.$$

Paso 3: Como esto vale para *todo* i, el mínimo sobre i también es $\geq c$: $\min_i\{z_i/a_i\} \geq c$. Luego $z \in U$. □

(b) Para $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $c = 1$: las condiciones son $x_1/1 \geq 1$ y $x_2/2 \geq 1$, es decir $x_1 \geq 1$ y $x_2 \geq 2$. El conjunto U es el "cuadrante" con vértice en $(1, 2)$ extendiéndose hacia arriba y a la derecha.

(c) U es un *conjunto de requerimiento de insumos*: si la función de producción es $f(x) = \min\{x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n\}$ (tipo Leontief), entonces $U = \{x : f(x) \geq c\}$ son las cestas de insumos que permiten producir al menos c unidades. El coeficiente a_i es la cantidad de insumo i necesaria por unidad de producto. El cuello de botella $\min_i\{x_i/a_i\}$ refleja la perfecta complementariedad: no se puede sustituir un insumo por otro.

Problema II.2. *Convexidad de $K = \{x : \|Ax - b\|_\infty \leq 1\}$.*

Sí, K es convexo.

Sean $x, y \in K$ (es decir, $\|Ax - b\|_\infty \leq 1$ y $\|Ay - b\|_\infty \leq 1$) y $\lambda \in [0, 1]$.

Paso 1: Definamos $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Calculamos $Az - b$:

$$Az - b = A(\lambda x + (1 - \lambda)y) - b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay - [\lambda + (1 - \lambda)]b = \lambda(Ax - b) + (1 - \lambda)(Ay - b).$$

Paso 2: Aplicamos la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_\infty$ y la homogeneidad:

$$\begin{aligned}\|Az-b\|_\infty &= \|\lambda(Ax-b)+(1-\lambda)(Ay-b)\|_\infty \\ &\le \|\lambda(Ax-b)\|_\infty + \|(1-\lambda)(Ay-b)\|_\infty \\ &= \lambda\|Ax-b\|_\infty + (1-\lambda)\|Ay-b\|_\infty \\ &\le \lambda\cdot 1 + (1-\lambda)\cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Paso 3: Luego $z \in K$, y K es convexo. □

Observación: en general, si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa, el conjunto de subnivel $\{x : g(x) \le c\}$ es convexo. Aquí $g(x) = \|Ax-b\|_\infty$ es convexa por ser composición de una transformación afín con una norma.

Problema II.3. *Convexidad del conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}^n_{++} : \prod x_i^{\alpha_i} \ge 1\}$.*

Paso 1: Definamos $g : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i$. Entonces $X = \{x : g(x) \ge 0\}$ (pues $\ln \prod x_i^{\alpha_i} = \sum \alpha_i \ln x_i$).

Paso 2: Probamos que g es cóncava. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\lambda \in [0,1]$. Como ln es cóncava (dato), para cada i:

$$\ln(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) \ge \lambda \ln x_i + (1-\lambda)\ln y_i.$$

Multiplicando por $\alpha_i > 0$ y sumando:

$$\sum_i \alpha_i \ln(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) \ge \lambda \sum_i \alpha_i \ln x_i + (1-\lambda)\sum_i \alpha_i \ln y_i,$$

es decir, $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$.

Paso 3: Sean $x, y \in X$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces $g(x) \ge 0$ y $g(y) \ge 0$. Por concavidad de g:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \ge \lambda\cdot 0 + (1-\lambda)\cdot 0 = 0.$$

Luego $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$. (El conjunto de supernivel de una función cóncava es convexo.) □

Problema II.4. *Tecnología: rendimientos no crecientes + aditividad $\Leftrightarrow$ cono convexo.*

($\Leftarrow$) Cono convexo $\Rightarrow$ rendimientos no crecientes + aditividad.

Suponga que Y es cono convexo.

Paso 1 (Aditividad): Sean $y, y' \in Y$. Tomando $\alpha = \beta = 1$ en la definición de cono convexo: $1\cdot y + 1\cdot y' = y + y' \in Y$.

Paso 2 (Rendimientos no crecientes): Sea $y \in Y$ y $\alpha \in [0,1]$. Tomando $\beta = 0$: $\alpha y + 0\cdot y' = \alpha y \in Y$ (pues $\alpha \ge 0$).

($\Rightarrow$) Rendimientos no crecientes + aditividad $\Rightarrow$ cono convexo.

Sean $y, y' \in Y$ y $\alpha, \beta \ge 0$; debemos probar $\alpha y + \beta y' \in Y$.

Paso 1: Tomemos $k \in \mathbb{N}$ con $k > \max\{\alpha, \beta\}$. Por aditividad *iterada* (aplicada $k-1$ veces): $y + y + \cdots + y = ky \in Y$. Análogamente $ky' \in Y$.

Paso 2: Como $0 \le \alpha/k < 1$, por rendimientos no crecientes aplicados a $ky \in Y$:

$$\frac{\alpha}{k}\cdot(ky) = \alpha y \in Y.$$

Análogamente, $\beta y' = \frac{\beta}{k}(ky') \in Y$.

Paso 3: Por aditividad, $\alpha y + \beta y' \in Y$. □

Problema II.5. *Libre disposición.*

Sea $y \in Y$ e $y' \le y$ (componente a componente). Debemos probar $y' \in Y$.

Paso 1: Definamos $v = y' - y$. Como $y' \le y$, cada componente $v_\ell = y'_\ell - y_\ell \le 0$, así que $v \in -\mathbb{R}^L_+$.

Paso 2: Para cada $n \in \mathbb{N}$, el vector $nv \in -\mathbb{R}^L_+$ (pues $-\mathbb{R}^L_+$ es un cono). Por hipótesis, $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$, luego $nv \in Y$.

Paso 3: Consideremos la combinación convexa (con $y \in Y$ y $nv \in Y$):

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)y + \frac{1}{n}(nv) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)y + v.$$

Como Y es convexo, $x_n \in Y$ para todo n.

Paso 4: Calculamos el límite: $x_n = y + v - \frac{1}{n}y \to y + v = y'$.

Paso 5: Como $(x_n) \subset Y$ y $x_n \to y'$, la cerradura de Y garantiza $y' \in Y$. $\square$

Problema II.6. *Intersección de convexos y conjunto de puntos más cercanos a x_0.*

(a) La intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos es convexa.

Enunciado preciso. Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia arbitraria (finita, numerable o no numerable) de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$. Entonces $C = \bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ es convexo.

Sean $x, z \in C$ y $\lambda \in [0,1]$. Debemos probar que $w := \lambda x + (1-\lambda)z \in C$, es decir, que $w \in C_\alpha$ para *todo* $\alpha \in I$.

Paso 1 — Pertenencia a cada C_α. Fijemos un índice $\alpha \in I$ arbitrario. Como $x \in C = \bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$, en particular $x \in C_\alpha$. Análogamente, $z \in C_\alpha$.

Paso 2 — Aplicar convexidad de C_α. Como C_α es convexo por hipótesis, y $x, z \in C_\alpha$, la definición de convexidad garantiza: $w = \lambda x + (1-\lambda)z \in C_\alpha$.

Paso 3 — Concluir. El argumento del Paso 2 vale para *cada* $\alpha \in I$ (pues α fue arbitrario). Por lo tanto:

$$w \in C_\alpha \ \text{ para todo } \alpha \in I \quad \Longrightarrow \quad w \in \bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha = C. \quad \square$$

Nota: La prueba funciona para familias arbitrarias (no necesariamente finitas). Esto es importante para la parte (b), donde usaremos una intersección indexada por los elementos de S, que puede ser infinito.

(b) Convexidad de $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le \|x - y\|,\ \forall\, y \in S\}$.

Paso 1 — Reescribir X como intersección. Para cada $y \in S$, definimos:

$$H_y = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le \|x - y\|\}.$$

Entonces $X = \bigcap_{y\in S} H_y$, pues $x \in X$ si y sólo si $\|x - x_0\| \le \|x - y\|$ para todo $y \in S$, es decir, $x \in H_y$ para todo $y \in S$.

Paso 2 — Probar que cada H_y es convexo.

Fijemos $y \in S$.

Paso 2.1 — Elevar al cuadrado. Como ambos lados de $\|x - x_0\| \le \|x - y\|$ son no negativos, la desigualdad equivale a $\|x - x_0\|^2 \le \|x - y\|^2$.

Paso 2.2 — Expandir. Usamos $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 - 2\langle a, b\rangle + \|b\|^2$:

$$\begin{aligned}\|x - x_0\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, x_0\rangle + \|x_0\|^2,\\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Paso 2.3 — Simplificar. La desigualdad $\|x - x_0\|^2 \le \|x - y\|^2$ se convierte en:

$$\|x\|^2 - 2\langle x, x_0\rangle + \|x_0\|^2 \le \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Los términos $\|x\|^2$ se cancelan. Reagrupando:

$$2\langle x,\, y - x_0\rangle \le \|y\|^2 - \|x_0\|^2.$$

Paso 2.4 — Identificar la forma. Definiendo $a = 2(y - x_0) \in \mathbb{R}^n$ y $b = \|y\|^2 - \|x_0\|^2 \in \mathbb{R}$:

$$H_y = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \le b\}.$$

Este es un **semiespacio cerrado**, que es convexo.

Verificación de convexidad del semiespacio. Sean $x, z \in H_y$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces $a^\top x \le b$ y $a^\top z \le b$:

$$a^\top(\lambda x + (1-\lambda)z) = \lambda\, a^\top x + (1-\lambda)\, a^\top z \le \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Luego $\lambda x + (1-\lambda)z \in H_y$. ✓

Paso 3 — Aplicar la parte (a). Hemos demostrado que $X = \bigcap_{y\in S} H_y$ (Paso 1) y que cada H_y es convexo (Paso 2). Por la parte (a) (intersección de convexos es convexa), X es convexo. $\square$

Interpretación geométrica. X es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que están al menos tan cerca de x_0 como de cualquier punto de S. Para cada $y \in S$, la frontera de H_y es el *hiperplano mediador* (bisector perpendicular) entre x_0 e y. El conjunto X es la *celda de Voronoi* de x_0 respecto a $S \cup \{x_0\}$: una intersección de semiespacios cerrados, es decir, un poliedro (posiblemente no acotado), siempre convexo y cerrado.

III. Funciones Convexas y Cóncavas

Problema III.1. $h(x) = \|x\|^2$ *es convexa.*

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$. Debemos probar $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$.

Paso 1 (Expandir el lado izquierdo):

$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)^2 \\ &= \sum_i \left[\lambda^2 x_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_i y_i + (1-\lambda)^2 y_i^2\right] \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Paso 2 (Calcular la diferencia):

$$\begin{aligned} \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) - h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 \\ &\quad - \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle - (1-\lambda)^2\|y\|^2 \\ &= \lambda(1-\lambda)\|x\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + \lambda(1-\lambda)\|y\|^2 \\ &= \lambda(1-\lambda)\left[\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right] \\ &= \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

(Usamos $\lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda)$ y $(1-\lambda) - (1-\lambda)^2 = \lambda(1-\lambda)$.)

Paso 3 (Concluir): Como $\lambda \in [0,1]$, tenemos $\lambda(1-\lambda) \ge 0$, y $\|x-y\|^2 \ge 0$ siempre. Luego

$$\lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) - h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \ge 0. \quad \square$$

Problema III.2. *CES: homogeneidad, superaditividad, concavidad.*

(a) Homogeneidad de grado 1: $f(tx) = t\, f(x)$ para todo $t > 0$.

Contexto. Una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado k* si $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $t > 0$. Cuando $k = 1$, decimos que f exhibe *rendimientos constantes a escala*: si multiplicamos todos los insumos por un factor t, la producción se multiplica exactamente por t.

Sea $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n_+$ arbitrarios.

Paso 1 — Sustituir tx en la definición. Por definición de f:

$$f(tx) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (tx_i)^\rho\right)^{1/\rho}.$$

Paso 2 — Aplicar las leyes de exponentes. Para cada sumando, usamos que $(tx_i)^\rho = t^\rho \cdot x_i^\rho$ (válido pues $t > 0$, $x_i \ge 0$ y $\rho \in (0,1)$). Sustituyendo:

$$f(tx) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, t^\rho\, x_i^\rho\right)^{1/\rho}.$$

Paso 3 — Extraer la constante t^ρ de la suma. Como t^ρ no depende del índice i, la factorizamos:

$$f(tx) = \left(t^\rho \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i^\rho\right)^{1/\rho}.$$

Paso 4 — Aplicar la propiedad de la potencia de un producto. Recordemos que $(A \cdot B)^{1/\rho} = A^{1/\rho} \cdot B^{1/\rho}$ cuando $A, B \geq 0$. Con $A = t^\rho$ y $B = \sum \alpha_i x_i^\rho$:

$$f(tx) = \left(t^\rho\right)^{1/\rho} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \, x_i^\rho\right)^{1/\rho} = t^{\rho/\rho} \cdot f(x) = t \, f(x). \quad \square$$

Observación. La clave es que el exponente ρ aparece tanto dentro de cada x_i^ρ como en la potencia exterior $1/\rho$. Al escalar por t, el factor t^ρ “pasa” por la potencia exterior y se convierte en $t^{\rho \cdot (1/\rho)} = t^1$.

(b) Superaditividad: $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n_+$.

Contexto. Una función es *superaditiva* si la producción conjunta de dos cestas de insumos es al menos tan grande como la suma de las producciones individuales. Económicamente, refleja “sinergias” en la producción. La herramienta clave es la *desigualdad de Minkowski para* $0 < p < 1$.

Nota sobre la desigualdad de Minkowski. Cuando $p \geq 1$, la desigualdad clásica va en sentido $\leq$ (subaditiva). Sin embargo, para $0 < p < 1$ la desigualdad se *invierte* y va en sentido $\geq$. Este hecho depende de la concavidad de $t \mapsto t^p$ cuando $0 < p < 1$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ arbitrarios.

Paso 1 — Identificar la estructura. Observamos que f tiene exactamente la forma de la desigualdad de Minkowski con $p = \rho \in (0, 1)$:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \, x_i^\rho\right)^{1/\rho}.$$

Paso 2 — Escribir $f(x + y)$ explícitamente.

$$f(x + y) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \, (x_i + y_i)^\rho\right)^{1/\rho}.$$

Paso 3 — Aplicar la desigualdad de Minkowski. Ponemos $a_i = x_i \geq 0$ y $b_i = y_i \geq 0$ en la desigualdad enunciada (con $p = \rho$):

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i + y_i)^\rho\right)^{1/\rho}}_{= f(x+y)} \geq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \, x_i^\rho\right)^{1/\rho}}_{= f(x)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \, y_i^\rho\right)^{1/\rho}}_{= f(y)}.$$

Paso 4 — Conclusión. Directamente: $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$. $\square$

Observación. La superaditividad es una propiedad más fuerte que la concavidad para funciones homogéneas de grado 1. Como veremos en la parte (c), la combinación homogeneidad de grado 1 + superaditividad implica concavidad.

(c) Concavidad: $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$.

Estrategia. La idea central es *descomponer* la combinación convexa $\lambda x + (1 - \lambda)y$ en una *suma* de dos vectores, aplicar superaditividad, y usar homogeneidad para “sacar” los escalares.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si $\lambda \in \{0, 1\}$, la desigualdad es trivial (se reduce a $f(x) \geq f(x)$ o $f(y) \geq f(y)$). Supongamos $\lambda \in (0, 1)$.

Paso 1 — Reescribir la combinación convexa como suma.

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \underbrace{\lambda x}_{\in \mathbb{R}^n_+} + \underbrace{(1 - \lambda)y}_{\in \mathbb{R}^n_+}.$$

Ambos vectores pertenecen a $\mathbb{R}^n_+$ pues $\lambda > 0$, $1 - \lambda > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Paso 2 — Aplicar superaditividad (parte (b)). Con $u = \lambda x$ y $v = (1 - \lambda)y$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f(u + v) \geq f(u) + f(v) = f(\lambda x) + f((1 - \lambda)y).$$

Paso 3 — Aplicar homogeneidad de grado 1 (parte (a)).

$$f(\lambda x) = \lambda\, f(x) \qquad (\text{con } t = \lambda > 0),$$
$$f((1-\lambda)y) = (1-\lambda)\, f(y) \qquad (\text{con } t = 1-\lambda > 0).$$

Paso 4 — Combinar. Sustituyendo el Paso 3 en la desigualdad del Paso 2:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y). \quad \square$$

Resumen de la lógica:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{\text{superadit.}}{\geq} f(\lambda x) + f((1-\lambda)y) \underset{\text{homog.}}{=} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Resultado general: Toda función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ que sea homogénea de grado 1 y superaditiva es cóncava. Esta es una propiedad general, no específica de la CES.

Problema III.3. $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ *es convexa.*

Sean $x, y \in D_1 \cap D_2$ y $\lambda \in [0,1]$. Debemos probar $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$.

Paso 1 (Cota para f): Por convexidad de f:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Como $f(x) \leq \max\{f(x), g(x)\} = h(x)$ y $f(y) \leq h(y)$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y). \quad (\star)$$

Paso 2 (Cota para g): Análogamente, por convexidad de g y $g \leq h$:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y). \quad (\star\star)$$

Paso 3 (Tomar el máximo): El máximo de dos cantidades, cada una $\leq M$, también es $\leq M$. De $(\star)$ y $(\star\star)$:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \max\{f(\lambda x + (1-\lambda)y),\, g(\lambda x + (1-\lambda)y)\} \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y). \quad \square$$

Problema III.4. *Desigualdades integrales.*

(a) Sea f convexa y continua en $[a, b]$.

Paso 1 (Parametrizar): Para $t \in [0,1]$, definimos $x(t) = (1-t)a + tb$. Observamos que $x(0) = a$, $x(1) = b$, y $dx = (b-a)\,dt$.

Paso 2 (Aplicar convexidad): Como $x(t)$ es combinación convexa de a y b con pesos $(1-t)$ y t, la definición de convexidad da:

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b), \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Paso 3 (Integrar): Integramos ambos lados en t de 0 a 1:

$$\int_0^1 f((1-t)a + tb)\,dt \leq f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 t\,dt.$$

Paso 4 (Calcular las integrales):

$$\text{Lado derecho} = f(a)\cdot\frac{1}{2} + f(b)\cdot\frac{1}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

$$\text{Lado izquierdo} = \int_0^1 f(x(t))\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

donde usamos la sustitución $x = (1-t)a + tb$, $dx = (b-a)\,dt$.

Paso 5: Uniendo: $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. $\square$

(b) Sea f convexa y continua, $h>0$.

Paso 1 (Cambio de variable): Con $t = x + sh$ y $dt = h\,ds$, cuando t va de $x-h$ a $x+h$, s va de -1 a 1:

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x+sh)\,ds.$$

Paso 2 (Agrupar términos simétricos): Separamos la integral en $[0,1]$:

$$f_h(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[f(x+sh) + f(x-sh)\big]\,ds.$$

(Justificación: $\int_{-1}^{1} g(s)\,ds = \int_0^1 [g(s)+g(-s)]\,ds$ para cualquier g integrable.)

Paso 3 (Aplicar convexidad): Para cada $s \in [0,1]$, observamos que x es el punto medio:

$$x = \frac{1}{2}(x+sh) + \frac{1}{2}(x-sh).$$

Por convexidad de f (con $\lambda = 1/2$):

$$f(x) \leq \frac{1}{2}\big[f(x+sh) + f(x-sh)\big],$$

es decir, $f(x+sh) + f(x-sh) \geq 2f(x)$.

Paso 4 (Integrar la desigualdad):

$$f_h(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[f(x+sh) + f(x-sh)\big]\,ds \geq \frac{1}{2}\int_0^1 2f(x)\,ds = f(x). \quad \square$$

Problemas Adicionales

Problema A1. *Imagen de convexo bajo transformación lineal.*

Sean $y_1 = T(x_1)$, $y_2 = T(x_2) \in T(A)$ (con $x_1, x_2 \in A$) y $\lambda \in [0,1]$.

Paso 1: Por linealidad de T: $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda T(x_1) + (1-\lambda)T(x_2) = T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$.

Paso 2: Como A es convexo, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$.

Paso 3: Luego $T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in T(A)$. $\square$

Problema A2. *Intersección de convexos.*

Sean $x, y \in \bigcap_{i=1}^{k} C_i$ y $\lambda \in [0,1]$.

Paso 1: Para cada i: $x, y \in C_i$ y C_i convexo $\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C_i$.

Paso 2: Como esto vale para todo $i = 1, \ldots, k$: $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_i C_i$. $\square$

Aplicación: $\{x : Ax \le b\} = \bigcap_{i=1}^{m}\{x : a_i^\top x \le b_i\}$. Cada semiplano $H_i = \{x : a_i^\top x \le b_i\}$ es convexo (para $x, y \in H_i$: $a_i^\top(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda a_i^\top x + (1-\lambda)a_i^\top y \le \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i$). La intersección finita de convexos es convexa.

Problema A3. $\alpha f + \beta g$ *preserva convexidad.*

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$.

Paso 1: Por convexidad de f: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Paso 2: Análogamente para g: $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$.

Paso 3: Multiplicando por $\alpha \ge 0$ y $\beta \ge 0$ respectivamente y sumando:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &\le \alpha[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] + \beta[\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)] \\ &= \lambda[\alpha f(x) + \beta g(x)] + (1-\lambda)[\alpha f(y) + \beta g(y)] \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g)(x) + (1-\lambda)(\alpha f + \beta g)(y). \quad \square\end{aligned}$$

Problema A4. $C([0,1])$ *con norma del supremo.*

(a) No converge en $\|\cdot\|_\infty$.

Paso 1 (Límite puntual): $f_n(0) = 0$ para todo n. Para $t > 0$ fijo: $f_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2} \le \dfrac{nt}{n^2t^2} = \dfrac{1}{nt} \to 0$. Así $f_n \to 0$ puntualmente.

Paso 2 (Supremo): Con la sustitución $u = nt$, $f_n(t) = g(u)$ donde $g(u) = u/(1+u^2)$. Derivando: $g'(u) = (1-u^2)/(1+u^2)^2$. El máximo se alcanza en $u = 1$ (i.e., $t = 1/n$) con valor $g(1) = 1/2$. Luego $\|f_n\|_\infty = 1/2$ para todo $n \ge 1$.

Paso 3 (Contradicción): Si $f_n \to \varphi$ en $\|\cdot\|_\infty$, la convergencia uniforme implica convergencia puntual, forzando $\varphi \equiv 0$. Pero $\|f_n - 0\|_\infty = 1/2 \not\to 0$. Contradicción. La sucesión (f_n) es una "joroba móvil" de altura constante $1/2$. $\square$

(b) $C([0,1])$ es completo (Banach).

Sea (f_n) de Cauchy en $\|\cdot\|_\infty$.

Paso 1 (Límite puntual): Para cada $t \in [0,1]$ fijo:

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le \sup_{s\in[0,1]} |f_n(s) - f_m(s)| = \|f_n - f_m\|_\infty \to 0.$$

Luego $(f_n(t))_{n\ge1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, el límite existe: definimos $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$.

Paso 2 (Convergencia uniforme): Dado $\varepsilon > 0$, por la condición de Cauchy $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ para todo $n, m \ge N$.

Fijemos $n \ge N$ y cualquier $t \in [0,1]$. Para todo $m \ge N$: $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$. Haciendo $m \to \infty$: $|f_n(t) - f(t)| \le \varepsilon$. Como esto vale para todo t:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \le \varepsilon, \qquad \forall\, n \ge N.$$

Paso 3 (Continuidad del límite): El límite uniforme de funciones continuas es continuo (teorema clásico de análisis). Como cada $f_n \in C([0,1])$ y $f_n \to f$ uniformemente, $f \in C([0,1])$. $\square$

Problema A5. $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Sea $M = \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Si $M = 0$, entonces $x = 0$ y $\|x\|_p = 0$ para todo p; trivial.

Supongamos $M > 0$.

Paso 1 (Factorizar):

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = M\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{M}\right)^p\right)^{1/p}.$$

Paso 2 (Acotar la suma): Sea $r_i = |x_i|/M \in [0,1]$ con al menos un $r_{i_0} = 1$. Entonces:

$$1 = r_{i_0}^p \le \sum_{i=1}^n r_i^p \le n \quad \text{(pues cada } r_i^p \le 1).$$

Paso 3 (Tomar raíz p-ésima): $1 \le \left(\sum r_i^p\right)^{1/p} \le n^{1/p}$. Como $n^{1/p} = e^{(\ln n)/p} \to e^0 = 1$ cuando $p \to \infty$, por el teorema del sándwich: $\left(\sum r_i^p\right)^{1/p} \to 1$.

Paso 4: $\|x\|_p = M \cdot \left(\sum r_i^p\right)^{1/p} \to M \cdot 1 = M = \|x\|_\infty$. $\square$

Problema A6. *Cerrado + convexo en punto medio $\Rightarrow$ convexo.*

Sean $a, b \in C$ arbitrarios. Definamos $D = \{\lambda \in [0,1] : \lambda a + (1-\lambda)b \in C\}$. Debemos probar $D = [0,1]$ (es decir, todo punto del segmento $[a,b]$ está en C).

Paso 1 (D contiene los racionales diádicos):

Base: $\lambda = 0$ da $b \in C$ y $\lambda = 1$ da $a \in C$; luego $0, 1 \in D$.

Paso inductivo: si $\lambda_1, \lambda_2 \in D$, entonces $x_1 = \lambda_1 a + (1-\lambda_1)b \in C$ y $x_2 = \lambda_2 a + (1-\lambda_2)b \in C$. Por convexidad en punto medio:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} a + \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) b \in C,$$

luego $(\lambda_1 + \lambda_2)/2 \in D$.

Partiendo de $\{0,1\} \subset D$: $1/2 \in D$; luego $1/4 = (0 + 1/2)/2 \in D$, $3/4 = (1/2 + 1)/2 \in D$; por inducción, $\{k/2^n : 0 \le k \le 2^n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset D$.

Paso 2 (D es cerrado en $[0,1]$): Sea $(\lambda_j) \subset D$ con $\lambda_j \to \lambda \in [0,1]$. Entonces $\lambda_j a + (1-\lambda_j)b \in C$ para todo j, y $\lambda_j a + (1-\lambda_j)b \to \lambda a + (1-\lambda)b$. Como C es cerrado, $\lambda a + (1-\lambda)b \in C$, así que $\lambda \in D$.

Paso 3 (Conclusión): Los racionales diádicos $\{k/2^n\}$ son *densos* en $[0,1]$ (todo real en $[0,1]$ es límite de una sucesión de diádicos). Hemos probado que D contiene un subconjunto denso y es cerrado. Un subconjunto cerrado y denso de $[0,1]$ es $[0,1]$ mismo. Luego $D = [0,1]$. $\square$

Problema A7. $f(x) = \ln(\sum e^{x_i})$ *es convexa.*

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in (0,1)$. Debemos probar $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Definamos $S(x) = \sum_{i=1}^n e^{x_i}$, de modo que $f(x) = \ln S(x)$.

Paso 1 (Reescribir la suma):

$$S(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda x_i + (1-\lambda)y_i} = \sum_{i=1}^n \left(e^{x_i}\right)^\lambda \left(e^{y_i}\right)^{1-\lambda}.$$

Paso 2 (Aplicar Hölder): Sean $p = 1/\lambda > 1$ y $q = 1/(1-\lambda) > 1$. Verificamos: $1/p + 1/q = \lambda + (1-\lambda) = 1$. ✓ Definamos $u_i = (e^{x_i})^\lambda$ y $v_i = (e^{y_i})^{1-\lambda}$. Por la desigualdad de Hölder:

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \le \left(\sum_{i=1}^n u_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n v_i^q\right)^{1/q}.$$

Paso 3 (Calcular las potencias):

$$u_i^p = \big((e^{x_i})^{\lambda}\big)^{1/\lambda} = e^{x_i}, \qquad \text{luego} \quad \sum u_i^p = S(x).$$
$$v_i^q = \big((e^{y_i})^{1-\lambda}\big)^{1/(1-\lambda)} = e^{y_i}, \qquad \text{luego} \quad \sum v_i^q = S(y).$$

Paso 4 (Sustituir):

$$S(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sum u_i v_i \leq S(x)^{\lambda} \cdot S(y)^{1-\lambda}.$$

Paso 5 (Tomar logaritmo): Como ln es creciente:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \ln S(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \ln\big(S(x)^{\lambda} \cdot S(y)^{1-\lambda}\big) \\ &= \lambda \ln S(x) + (1-\lambda) \ln S(y) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \quad \square \end{aligned}$$