

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
SOLUCIONARIO – Práctica Dirigida 1

Primer semestre 2026-1

Las soluciones se presentan en azul. Se detallan los pasos clave; en examen se espera justificación completa.

I. Valores y Vectores Propios

Problema 1.

(a) $p(\lambda) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.

(b) Para $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, la ecuación $2v_1 + v_2 = 0$ da $S_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

Para $\lambda_2 = 5$: $(A - 5I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, la ecuación $v_1 = v_2$ da $S_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(c) $\det(A) = 12 - 2 = 10 = 2 \cdot 5 \checkmark$ $\text{tr}(A) = 7 = 2 + 5 \checkmark$

Problema 2.

Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces por inducción: $A^k\mathbf{v} = A^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A^{k-1}\mathbf{v} = \dots = \lambda^k\mathbf{v}$. Como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, se concluye λ^k es valor propio de A^k con el mismo $\mathbf{v}$. $\square$

Problema 3.

(a) $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \Rightarrow \lambda = 3$, multiplicidad algebraica $r_3 = 2$. $(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, así que $\dim \ker(A - 3I) = 1$ (multiplicidad geométrica $s_3 = 1$). $S_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

(b) Como $s_3 = 1 < r_3 = 2$, la matriz **no es diagonalizable**: no existen 2 vectores propios linealmente independientes.

Problema 4.

Valores propios: 2, 2, -1, 3.

(a) $\text{tr}(A) = 2 + 2 + (-1) + 3 = \boxed{6}$.

(b) $\det(A) = 2^2 \cdot (-1) \cdot 3 = \boxed{-12}$.

(c) $\det(A) = -12 \neq 0$, luego A es invertible.

Problema 5.

(a) Si $\lambda = 0$, entonces $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, contradiciendo que A sea invertible. Luego $\lambda \neq 0$.

(b) De $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, multiplicando por A^{-1} : $\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v} \Rightarrow A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$. $\square$

Problema 6.

(a) Si $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $T^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Como $T^2 = T$: $\lambda^2\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$, así los únicos **valores propios** posibles son $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$. $\square$

(b) Para $v \in V$: $v = \underbrace{Tv}_{\in \text{im } T} + \underbrace{(v - Tv)}_{\in \ker T}$ pues $T(v - Tv) = Tv - T^2v = 0$. La intersección es trivial: si $w = Tu$

y $Tw = 0$, entonces $w = T^2u = Tu = w \Rightarrow w = 0$. Luego $V = \ker T \oplus \text{im } T$. Como V es de dimensión finita, uniendo bases de $\ker T$ (asociadas al valor propio 0) y de $\text{im } T$ (asociadas al valor propio 1) se obtienen $n = \dim V$ vectores propios linealmente independientes, y T es diagonalizable. $\square$

Problema 7. (★)

Método general: el vector propio se halla resolviendo $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, es decir $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Para la matriz de este problema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) A es triangular superior $\Rightarrow$ valores propios = entradas de la diagonal:

$$\boxed{\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4.}$$

(b) Vectores propios:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Si λ es valor propio de A , entonces $\lambda^3 - 4$ es valor propio de $A^3 - 4I$ (por el Problema 2 y linealidad). Los valores propios de $A^3 - 4I$ son:

$$\lambda_1^3 - 4 = 4, \quad \lambda_2^3 - 4 = 23, \quad \lambda_3^3 - 4 = 60.$$

Usando $\det(M) = \prod_i \mu_i$:

$$\det(A^3 - 4I) = 4 \cdot 23 \cdot 60 = \boxed{5520}.$$

Problema 8. (★★)

(a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$.

(b) $\lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm i\pi/4}$. Módulo $r = \sqrt{2}$ (escala la norma por $\sqrt{2}$) y ángulo $\theta = \pi/4$ (rota el plano 45°): la acción de A es *rotar 45° y escalar por $\sqrt{2}$* .

(c) $\det(A) = 1 + 1 = 2 = (1+i)(1-i) = 2 \checkmark$ $\text{tr}(A) = 2 = (1+i) + (1-i) = 2 \checkmark$

II. Formas Cuadráticas

Problema 9.

(a) El coeficiente de $x_i x_j$ ($i \neq j$) se divide entre 2 para la posición (i, j) : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \approx 0,44$ y $4,56$. Ambos positivos $\Rightarrow f$ es **definida positiva**.

Problema 10.

Matriz simétrica: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Menores principales: $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $D_3 = 3 \cdot D_2 = 3 > 0$.

f es **definida positiva**.

Problema 11. (★)

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Valores propios: $\lambda_1 = 10$ (mult. alg. 1) y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (mult. alg. 2). Todos positivos $\Rightarrow f$ es **definida positiva**.

(c) **Demostración de la cota inferior.**

Sea A simétrica con base ortonormal de vectores propios $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 = \lambda_{\min}$.

Paso 1: expansión en la base. Como $\{\mathbf{u}_i\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, todo $\mathbf{x}$ se escribe únicamente como $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{u}_i$ con $c_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

Paso 2: norma en la base. Por ortonormalidad ($\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$):

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \left(\sum_i c_i \mathbf{u}_i \right)^\top \left(\sum_j c_j \mathbf{u}_j \right) = \sum_{i,j} c_i c_j \mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \sum_i c_i^2.$$

Paso 3: forma cuadrática en la base. Usando $A\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j$ y luego $\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$:

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \left(\sum_i c_i \mathbf{u}_i \right)^\top A \left(\sum_j c_j \mathbf{u}_j \right) = \sum_{i,j} c_i c_j \mathbf{u}_i^\top (A\mathbf{u}_j) = \sum_{i,j} c_i c_j \lambda_j \underbrace{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j}_{=\delta_{ij}} = \sum_i \lambda_i c_i^2.$$

Paso 4: cota inferior. Como $\lambda_i \geq \lambda_{\min}$ para todo i :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \lambda_i c_i^2 \geq \lambda_{\min} \sum_i c_i^2 = \lambda_{\min} \|\mathbf{x}\|^2.$$

En la esfera unitaria $\|\mathbf{x}\| = 1$: $f(\mathbf{x}) \geq \lambda_{\min} = 1$, con igualdad cuando $\mathbf{x} = \mathbf{u}_3$ (el único $c_3 = 1$, los demás nulos). El valor mínimo de f sobre la esfera unitaria es $\boxed{1}$.

Problema 12. (★★)

(a) $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 - 1 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.

Para cada valor propio se resuelve $(A - \lambda_i I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y se normaliza $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$:

Para $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 4$: $(A - 4I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matriz ortogonal Q tiene como columnas los vectores propios normalizados:

$$Q = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (Q^\top Q = I \checkmark)$$

(b) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\top Q^\top A Q \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top D \mathbf{y} = 2y_1^2 + 4y_2^2$. Término cruzado eliminado.

(c) La ecuación se transforma en $2y_1^2 + 4y_2^2 = 4$, es decir $\frac{y_1^2}{2} + y_2^2 = 1$: **elipse** con semiejes $\sqrt{2}$ y 1.

III. Aplicaciones

Problema 13.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. $D_1 = 3 > 0$, $D_2 = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow C$ es **definida positiva**.

(b) $C(\mathbf{x}) > 0$ para todo $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$; C no puede ser cero con insumos positivos.

(c) Cualquier combinación no nula de insumos genera un costo estrictamente positivo: los efectos cruzados $4x_1x_2$ no logran cancelar los costos directos.

Problema 14.

(a) A es triangular: $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 0,4$.

(b) $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$. El sistema es **estable**.

(c) Vectores propios: $\lambda_1 = 0,5$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_2 = 0,4$: $(A - 0,4I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ da $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución general: $\mathbf{x}(t) = c_1(0,5)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(0,4)^t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Con $\mathbf{x}(0)$: $c_2 = 50$, $c_1 - 3c_2 = 100 \Rightarrow c_1 = 250$.

$$\mathbf{x}(t) = 250 \cdot (0,5)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 50 \cdot (0,4)^t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 15.

(a) Para C_1 : $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 2 > 0$, $D_3 = 2(15 - 1) - 2(10) = 8 > 0$. C_1 es **definida positiva**.

Para C_2 : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $D_1 = 0$, el criterio falla. Los valores propios del bloque 2×2 son $(1 \pm \sqrt{5})/2$; el menor es negativo. Además $C_2(1, -1, 0) = -1 < 0$. C_2 es **indefinida**.

(b) La firma elige **Proceso 1**. $C_1 > 0$ para todo insumo no nulo, satisfaciendo la exigencia legal de costo estrictamente positivo. C_2 puede ser negativa, lo que viola dicha ley y es además económicamente absurdo para una función de costo.

Problema 17. (★★)

(a) $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 5 > 0 \Rightarrow \Sigma$ es **definida positiva**. La varianza del portafolio es siempre positiva: no existe cartera sin riesgo.

¿Por qué la covarianza negativa permite diversificación? La varianza del portafolio se expande como:

$$V = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12},$$

donde $\sigma_{12} = \Sigma_{12} = -1 < 0$. El término cruzado $2w_1 w_2 \sigma_{12}$ es *negativo* (pues $w_1, w_2 > 0$), lo que reduce la varianza total por debajo de la media ponderada de las varianzas individuales.

La intuición económica es la siguiente: cuando $\sigma_{12} < 0$, los retornos de ambos activos se mueven en direcciones opuestas. Si el activo 1 tiene un retorno bajo en algún estado del mundo, el activo 2 tiende a tener un retorno alto, y viceversa. Al combinarlos en el portafolio, las fluctuaciones se compensan parcialmente, reduciendo la volatilidad total. Este es el principio fundamental de la diversificación en teoría de portafolio (Markowitz): el riesgo no es aditivo cuando los activos están negativamente correlacionados. En el límite extremo ($\sigma_{12} = -\sigma_1 \sigma_2$, correlación -1), existe una combinación $\mathbf{w}$ que elimina el riesgo por completo ($V = 0$).

(b) Con $w_2 = 1 - w_1$: $V = 2w_1^2 - 2w_1(1 - w_1) + 3(1 - w_1)^2 = 7w_1^2 - 8w_1 + 3$.

(c) Derivando respecto de w_1 e igualando a cero:

$$\frac{dV}{dw_1} = 14w_1 - 8 = 0 \Rightarrow w_1^* = \frac{4}{7}, \quad w_2^* = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}.$$

Como $\frac{d^2V}{dw_1^2} = 14 > 0$, se trata de un mínimo global.

$$V^* = 7 \cdot \frac{16}{49} - 8 \cdot \frac{4}{7} + 3 = \frac{16 - 32 + 21}{7} = \frac{5}{7} \approx 0,714.$$

(d) Si la covarianza sube (se vuelve positiva), los activos se mueven juntos y la diversificación pierde efectividad. El valor mínimo de la forma cuadrática V aumenta: la varianza mínima del portafolio *crece*. En el límite de correlación perfecta no hay beneficio de diversificación.

Problema 18. (★★)

(a) $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = \det C = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow C$ es **definida positiva**.

Como $C > 0$, la forma cuadrática de costo $\frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q}$ es estrictamente convexa, de modo que π es estrictamente cóncava. Existe un único máximo interior para todo $\mathbf{p}$. $\square$

(b) **Derivación de $\mathbf{q}^* = C^{-1} \mathbf{p}$ desde la definición de gradiente.**

El gradiente $\nabla_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q})$ se define como el único vector tal que:

$$f(\mathbf{q} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{q}) + [\nabla_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q})]^\top \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{cuando } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Calculamos los gradientes de cada término de $\pi(\mathbf{q}) = \mathbf{p}^\top \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q}$.

Término lineal: $f_1(\mathbf{q}) = \mathbf{p}^\top \mathbf{q}$.

$$f_1(\mathbf{q} + \mathbf{h}) = \mathbf{p}^\top (\mathbf{q} + \mathbf{h}) = \underbrace{\mathbf{p}^\top \mathbf{q}}_{f_1(\mathbf{q})} + \mathbf{p}^\top \mathbf{h}.$$

El término lineal en $\mathbf{h}$ es $\mathbf{p}^\top \mathbf{h}$, sin término de orden superior. Por lo tanto $\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}^\top \mathbf{q}) = \mathbf{p}$.

Término cuadrático: $f_2(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q}$.

$$f_2(\mathbf{q} + \mathbf{h}) = \frac{1}{2} (\mathbf{q} + \mathbf{h})^\top C (\mathbf{q} + \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^\top C \mathbf{q} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{h}^\top C \mathbf{h}}_{O(\|\mathbf{h}\|^2)}.$$

Como C es simétrica, $\mathbf{q}^\top C \mathbf{h} = (\mathbf{q}^\top C \mathbf{h})^\top = \mathbf{h}^\top C^\top \mathbf{q} = \mathbf{h}^\top C \mathbf{q}$ (ambos términos son escalares iguales). Entonces:

$$f_2(\mathbf{q} + \mathbf{h}) = f_2(\mathbf{q}) + \underbrace{(C\mathbf{q})^\top \mathbf{h}}_{\text{lineal en } \mathbf{h}} + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Por unicidad del gradiente: $\nabla_{\mathbf{q}}(\frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q}) = C\mathbf{q}$.

Condición de primer orden.

$$\nabla_{\mathbf{q}} \pi = \mathbf{p} - C\mathbf{q} = \mathbf{0} \implies C\mathbf{q}^* = \mathbf{p} \implies \boxed{\mathbf{q}^* = C^{-1}\mathbf{p}}. \quad \square$$

Diagonalización: $p(\lambda) = (2 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$, así $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Para $\lambda_1 = 1$: $(C - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 3$: $(C - 3I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = QD^{-1}Q^\top = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{q}^* = C^{-1}\mathbf{p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

(c.i) $C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

(c.ii) $\frac{\partial q_1^*}{\partial p_2} = -\frac{1}{3} < 0.$

Económicamente: cuando p_2 sube, la firma desplaza recursos hacia el bien 2. Como la tecnología exhibe *economías de alcance negativas* (la interacción en C implica que producir más de ambos bienes es costoso), la firma reduce q_1^* .

(c.iii) El impuesto reduce el precio neto: $\tilde{\mathbf{p}} = (p_1, p_2 - \tau)^\top$.

$$\Delta \mathbf{q}^* = C^{-1} \Delta \mathbf{p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau \end{pmatrix} = \frac{\tau}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El bien 1 *aumenta* $(+\tau/3)$ y el bien 2 *reduce* $(-2\tau/3)$ su producción.

(d.i) $(\lambda - 2)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm k.$

(d.ii) $C(k) > 0 \Leftrightarrow 2 - k > 0$ y $2 + k > 0$, es decir $\boxed{-2 < k < 2}.$

(d.iii) Si $k = 2$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$. $C(2)$ es semidefinida positiva; en la dirección del vector propio nulo $\mathbf{u}_1 = (1, -1)^\top / \sqrt{2}$, el costo no crece y el beneficio es ilimitado. **No existe un óptimo finito** salvo que $\mathbf{p} \perp \mathbf{u}_1$.

Problemas Adicionales (Bases, Transformaciones Lineales, Subespacios)

Problema A1.

(a) S_1 : contiene $\mathbf{0}$, es cerrado bajo suma y escalar. **Es subespacio.** $x_1 = 2x_3$: parametrizando $x_2 = s, x_3 = t$, base $\{(0, 1, 0), (2, 0, 1)\}$, dimensión 2.

(b) $(1, -1, 0) + (1, -1, 0) = (2, -2, 0)$: $4 + (-2) = 2 \neq 0$. **No es subespacio** (no cerrado bajo suma).

(c) $\mathbf{0} \notin S_3$ ($0 \neq 1$). **No es subespacio.**

Problema A3.

($\subset$) $T(u - u_0) = T(u) - T(u_0) = v - v = \mathbf{0}$, luego $u - u_0 \in \ker T$, i.e., $u = u_0 + (u - u_0) \in u_0 + \ker T$.

($\supset$) Si $z \in \ker T$: $T(u_0 + z) = v + \mathbf{0} = v$, luego $u_0 + z \in T^{-1}(v)$. $\square$

Geométricamente para $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$: $\ker T = \{(t, -t)\}$ es la recta diagonal. Si $v = 3$ y $u_0 = (1, 2)$, entonces $T^{-1}(3) = \{(1+t, 2-t) : t \in \mathbb{R}\}$, recta paralela al núcleo.

Problema A4.

Sea $\{w_1, \dots, w_k\}$ base de W . Por el teorema de extensión de bases existe $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ tal que $\{w_1, \dots, w_n\}$ es base de V . Definir $W' = \text{span}\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$.

Intersección trivial: si $v \in W \cap W'$, las coordenadas en la base son todas nulas, luego $v = \mathbf{0}$.

Suma total: todo $v = \sum c_i w_i = \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i w_i}_{\in W} + \underbrace{\sum_{i>k} c_i w_i}_{\in W'}$. $\square$

Problema A5. (★)

(a) **No es subespacio.** Contraejemplo en $V = \mathbb{R}^2$: $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son no invertibles, pero $T_1 + T_2 = I$ sí lo es. No es cerrado bajo suma. $\square$

Problema A6. (★)

Observaciones previas. Tomando $x = y = 0$: $T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0$. Tomando $y = -x$: $T(-x) = -T(x)$. Por inducción, $T(nx) = nT(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; usando negativos, $T(-nx) = -nT(x)$; y para $p/q \in \mathbb{Q}$: $qT(p/q \cdot x) = T(px) = pT(x) \Rightarrow T((p/q)x) = (p/q)T(x)$. Toda función aditiva es, pues, $\mathbb{Q}$ -lineal.

(a) Sea $c = T(1)$. Para cualquier $x = p/q \in \mathbb{Q}$:

$$T(x) = T\left(\frac{p}{q} \cdot 1\right) = \frac{p}{q} T(1) = cx.$$

Luego $T(x) = cx$ es lineal. $\square$

(b) Por el Lema de Zorn, $\mathbb{R}$ posee una *base de Hamel* B sobre $\mathbb{Q}$: todo $x \in \mathbb{R}$ se escribe de manera única como combinación $\mathbb{Q}$ -finita de elementos de B . Como $\mathbb{R}$ es no numerable y $\mathbb{Q}$ es numerable, $|B| > 1$; tome $b_1 \neq b_2 \in B$. Defina T poniendo $T(b_1) = b_2$, $T(b_2) = b_1$, $T(b) = b$ para $b \in B \setminus \{b_1, b_2\}$, y extienda $\mathbb{Q}$ -linealmente a todo $\mathbb{R}$. Entonces T es aditiva. Si fuese $\mathbb{R}$ -lineal, $T(x) = cx$ para algún $c \in \mathbb{R}$; pero $T(b_1) = cb_1 = b_2$ y $T(b_2) = cb_2 = b_1$ implicarían $b_1^2 = b_2^2$, contradiciendo la independencia $\mathbb{Q}$ -lineal de $\{b_1, b_2\}$. Luego T no es lineal. $\square$

(c) Como T no es $\mathbb{R}$ -lineal, existen $x_1, x_2 \neq 0$ con $T(x_1)/x_1 \neq T(x_2)/x_2$. Los vectores $\mathbf{v} = (x_1, T(x_1))$ y $\mathbf{w} = (x_2, T(x_2))$ en $\mathbb{R}^2$ son $\mathbb{R}$ -linealmente independientes (su determinante $x_1 T(x_2) - x_2 T(x_1) \neq 0$). Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Q}$, por $\mathbb{Q}$ -linealidad de T :

$$T(px_1 + qx_2) = pT(x_1) + qT(x_2),$$

luego $p\mathbf{v} + q\mathbf{w} = (px_1 + qx_2, pT(x_1) + qT(x_2)) \in \Gamma$. Como $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son $\mathbb{R}$ -l.i., la aplicación $(p, q) \mapsto p\mathbf{v} + q\mathbf{w}$ de $\mathbb{Q}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tiene imagen densa (dado cualquier punto $z \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$, existen $p, q \in \mathbb{Q}$ con $\|p\mathbf{v} + q\mathbf{w} - z\| < \varepsilon$). Por lo tanto $\Gamma \supset \{p\mathbf{v} + q\mathbf{w} : p, q \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}^2$. $\square$

(d) Si T es continua en x_0 , para cualquier $y \in \mathbb{R}$ y $h \rightarrow 0$:

$$T(y+h) - T(y) = T(h) = T((x_0+h) - x_0) = T(x_0+h) - T(x_0) \rightarrow 0,$$

luego T es continua en todo punto. La gráfica de una función continua es *cerrada*: si $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (a, b)$ entonces $T(a) = \lim T(x_n) = b$. Por el inciso (c), si T no fuese lineal, Γ sería densa en $\mathbb{R}^2$; un conjunto cerrado y denso en $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}^2$ mismo, pero Γ corta cada línea vertical en exactamente un punto: contradicción. Luego T es $\mathbb{R}$ -lineal, y como es continua y satisface $T(qx) = qT(x)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$, por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se concluye $T(x) = cx$ con $c = T(1)$. $\square$

Problema A7. (★)

T **no es invertible**. Si T fuese invertible, T^n también lo sería (composición de n isomorfismos). Pero $T^n = 0$ no es invertible (su imagen es $\{\mathbf{0}\}$). Contradicción. $\square$

$T + I$ **es invertible**. Considere el polinomio

$$P(T) = I - T + T^2 - T^3 + \cdots + (-1)^{n-1}T^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-T)^k.$$

Multiplicando:

$$(I + T)P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k T^k + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} T^k = I + \sum_{k=1}^{n-1} [(-1)^k + (-1)^{k-1}] T^k + (-1)^{n-1} T^n.$$

Cada término intermedio se cancela $((-1)^k + (-1)^{k-1} = 0)$ y $T^n = 0$, luego $(I + T)P(T) = I$. Análogamente $P(T)(I + T) = I$. Por lo tanto $(T + I)^{-1} = P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k T^k$, que es una función polinomial de T . $\square$

Problema A8.

(a) Se buscan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (no todos nulos) tales que $\alpha x + \beta(x^2 - 1) + \gamma(x^2 + 2x + 1) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Agrupando por grados:

$$(\beta + \gamma)x^2 + (\alpha + 2\gamma)x + (-\beta + \gamma) = 0 \text{ para todo } x.$$

Igualando coeficientes a cero: $\beta + \gamma = 0$, $\alpha + 2\gamma = 0$, $-\beta + \gamma = 0$. De las ecuaciones primera y tercera: $\beta = -\gamma$ y $\beta = \gamma$, luego $\gamma = \beta = 0$; de la segunda, $\alpha = 0$. La única solución es trivial: **los tres vectores son linealmente independientes**. $\square$

(b) Todo elemento de Φ es $a + bx + cx^2$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{1, x, x^2\}$ genera Φ y es linealmente independiente (polinomios de grados distintos no pueden cancelarse para todo x). Por lo tanto $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ es una **base de Hamel** para Φ .

(c) $\dim(\Phi) = 3$ (la base $\mathcal{B}$ tiene 3 elementos).

$\Theta = \mathcal{C}^0([0, 1])$ es de dimensión **infinita**: el conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ es linealmente independiente en Θ (ninguna combinación finita no trivial de potencias puede ser idénticamente cero en $[0, 1]$ por el argumento de grado), y genera un subespacio propiamente contenido en Θ . Así no existe ninguna base finita; $\dim(\Theta) = \infty$.