

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Práctica Dirigida 1

Primer semestre 2026-1

Tiempo estimado: **1 hora 30 minutos**

Ejercicios marcados con (★) son de dificultad media-alta; con (★★) son retadores. Los problemas adicionales refuerzan prerrequisitos de álgebra lineal.

I. Valores y Vectores Propios

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcule el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y encuentre los valores propios.
- (b) Para cada valor propio encuentre el espacio propio correspondiente.
- (c) Verifique que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ y $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. Sea A una matriz $n \times n$ y λ un valor propio con vector propio $\mathbf{v}$. Demuestre que λ^k es valor propio de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$, con el mismo vector propio.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Encuentre los valores propios y los espacios propios de A .
- (b) Determine si A es diagonalizable, justificando con las multiplicidades geométrica y algebraica.

4. El polinomio característico de una matriz A de orden 4×4 es $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Sin construir explícitamente A , determine:

- (a) $\text{tr}(A)$.
- (b) $\det(A)$.
- (c) Si A es invertible. Justifique.

5. Sea A invertible con valor propio λ y vector propio $\mathbf{v}$.

- (a) Demuestre que $\lambda \neq 0$.
- (b) Demuestre que $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1} con el mismo vector propio.

6. Sea $T : V \rightarrow V$ idempotente ($T \circ T = T$), con V de **dimensión finita**.

- (a) Demuestre que los únicos valores propios posibles son 0 y 1.
- (b) Deduzca que T es diagonalizable. (Sugerencia: muestre que $V = \ker T \oplus \text{im } T$.)

7. (★) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Encuentre los valores propios de A sin calcular el determinante. ¿Qué propiedad utiliza?
- (b) Encuentre los vectores propios asociados a cada valor propio.
- (c) Calcule $\det(A^3 - 4I)$ usando propiedades de valores propios. (Sugerencia: si λ es valor propio de A , ¿cuál es el valor propio de $A^3 - 4I$? Luego use $\det(M) = \prod_i \mu_i$ sobre los valores propios μ_i de M .)

8. (★★) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Encuentre los valores propios en $\mathbb{C}$.
- (b) Escriba $\lambda_{1,2}$ en forma polar $re^{i\theta}$. ¿Qué representan r y θ como transformación de $\mathbb{R}^2$?
- (c) Verifique $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ y $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

II. Formas Cuadráticas

9. Dada $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$:

- (a) Encuentre la matriz simétrica A tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$.
- (b) Calcule los valores propios de A y clasifique f .

10. Utilice el criterio de los menores principales dominantes para clasificar:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2.$$

11. (★) Considere:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

- (a) Escriba la matriz simétrica A asociada.
- (b) Dado que $p(\lambda) = -(\lambda - 10)(\lambda - 1)^2$, encuentre los valores propios y clasifique f .
- (c) ¿Cuál es el valor mínimo de f sobre la esfera unitaria $\|\mathbf{x}\| = 1$?

12. (★★) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Diagonalice ortogonalmente A : encuentre Q ortogonal y D diagonal con $Q^\top A Q = D$.
- (b) Con $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, elimine el término cruzado de $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ y escriba f en y_1, y_2 .
- (c) Identifique la cónica $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4$.

III. Aplicaciones

13. Una empresa enfrenta $C(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$, donde $x_1, x_2 \geq 0$ son cantidades de insumos.

- (a) Encuentre la matriz simétrica asociada y aplique el criterio de menores principales.
- (b) ¿Es C siempre no negativa? ¿Puede ser cero para insumos no nulos?
- (c) Interprete el resultado económicamente.

14. Considere el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encuentre los valores propios de la matriz de transición.
- (b) ¿El sistema converge a $\mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$? Justifique.
- (c) Encuentre la solución general $\mathbf{x}(t)$ y determine las constantes con $\mathbf{x}(0)$.

15. Una firma escoge entre dos procesos:

$$\begin{aligned} C_1(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3, \\ C_2(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

- (a) Clasifique cada función de costo como forma cuadrática.
- (b) El costo debe ser estrictamente positivo para todo $(x_1, x_2, x_3) \neq \mathbf{0}$ por una ley de eficiencia económica (no puede existir producción sin costo positivo). ¿Cuál proceso elegiría la firma? Justifique.

17. () Portafolio de mínima varianza.** La varianza de un portafolio $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^\top$ es $V(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$, con $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Clasifique Σ como forma cuadrática e interprete económicamente.
- (b) Con $w_1 + w_2 = 1$, exprese V como función de w_1 únicamente.
- (c) Encuentre (w_1^*, w_2^*) que minimizan V derivando e igualando a cero en w_1 , y calcule V^* .
- (d) ¿Qué ocurre con V^* si la covarianza entre activos se vuelve positiva? Analice cualitativamente.

18. () Estática comparativa y diagonalización en teoría de la producción.**

Una firma competitiva produce dos bienes con vector de cantidades $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\top$. El beneficio es:

$$\pi(\mathbf{q}) = \mathbf{p}^\top \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^\top$ es el vector de precios y C es la matriz de costos, que captura costos marginales crecientes e *interdependencia productiva* entre los bienes.

- (a) Verifique que C es definida positiva usando el criterio de menores principales. ¿Qué implica esto sobre la forma de π ? ¿Existe siempre un máximo interior?
- (b) La condición de primer orden $\nabla_{\mathbf{q}} \pi = \mathbf{0}$ conduce a $C \mathbf{q}^* = \mathbf{p}$. Diagonalice ortogonalmente $C = QDQ^\top$ y use $C^{-1} = QD^{-1}Q^\top$ para calcular explícitamente $\mathbf{q}^*$ cuando $\mathbf{p} = (5, 4)^\top$.
- (c) La matriz de estática comparativa es $\frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial \mathbf{p}} = C^{-1}$.
 - (i) Calcule C^{-1} explícitamente.
 - (ii) Interprete el signo de $\partial q_1^* / \partial p_2$: ¿por qué un aumento en p_2 *reduce* la producción óptima del bien 1?
 - (iii) Un impuesto específico sobre el bien 2 reduce p_2 en $\tau > 0$ unidades netas recibidas por la firma. Calcule el impacto sobre $\mathbf{q}^*$.
- (d) (★) Generalice la matriz de costos a $C(k) = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.
 - (i) Encuentre los valores propios de $C(k)$ en función de k .
 - (ii) ¿Para qué valores de k tiene la firma un máximo de beneficio bien definido (único y finito)?
 - (iii) Interprete el caso frontera $k = 2$: ¿qué ocurre con la producción óptima cuando los costos de los dos bienes son perfectamente interdependientes?

Problemas Adicionales (Bases, Transformaciones Lineales, Subespacios)

Estos ejercicios consolidan los fundamentos de álgebra lineal que sustentan los temas anteriores.

A1. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$. Si lo son, encuentre una base y su dimensión.

- (a) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_3 = 0\}$.
- (b) $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2 = 0\}$.
- (c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

A3. Sea $T : U \rightarrow V$ lineal y $v \in \text{im}(T)$. Demuestre que para cualquier $u_0 \in T^{-1}(v)$:

$$T^{-1}(v) = u_0 + \ker T.$$

Ilustre geométricamente para $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

A4. Sea $W \subset V$ un subespacio de dimensión finita. Pruebe que existe $W' \subset V$ tal que $W \cap W' = \{0\}$ y $W + W' = V$. (*Sugerencia: extienda una base de W a una base de V .*)

A5. (★) Sea $\mathcal{C} \subset L(V, V)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales *no invertibles*.

- (a) ¿Es $\mathcal{C}$ un subespacio de $L(V, V)$? Pruebe o dé un contraejemplo.

A6. (★) Sea $T : V \rightarrow W$ *aditiva* si $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in V$. Demuestre lo siguiente:

- (a) Toda función aditiva $T : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ es lineal.
- (b) Existe una función aditiva $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que *no* es lineal.
- (c) Si $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es aditiva y no lineal, entonces su gráfica $\Gamma = \{(x, T(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ es densa en $\mathbb{R}^2$.
- (d) Si $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es aditiva y continua en algún punto x_0 , entonces es lineal.

A7. (★) Sea $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ una transformación lineal tal que $T^n = 0$ para algún entero $n > 0$. Demuestre que T no es invertible, pero que $T + I$ sí lo es.

(*Sugerencia: el inverso de $T + I$ es una función polinomial de T .*)

A8. Sea $\Theta = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}^0\}$ el espacio vectorial de funciones continuas en $[0, 1]$, y sea

$$\Phi = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

el subespacio de polinomios de grado a lo sumo 2 con dominio restringido a $[0, 1]$.

- (a) ¿Son los vectores $\{x, (x^2 - 1), (x^2 + 2x + 1)\}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$?
- (b) Encuentre una base de Hamel para el subespacio Φ .
- (c) ¿Cuál es la dimensión de Φ ? ¿Y la de Θ ?

Referencias

- Fondo Editorial PUCP. *Gestión de la sostenibilidad en la moda peruana: experiencias de investigación*.
- Shannon, C. *ECON204 – Mathematics for Economists*. University of California, Berkeley.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.