PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
Cuarta práctica — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:
- Duración: 110 minutos.
- Puntaje total: **20 puntos**.
- Solo se permiten apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
- La presentación y redacción influirán en la calificación.

Pregunta 1 (8 puntos) – KKT y consumo intertemporal.

Parte A – Bienes sustitutos perfectos (4 puntos).
Un consumidor en $\mathbb{R}^2_+$ tiene utilidad lineal $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$, enfrenta precios $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg 0$ e ingreso $I > 0$. Resuelve

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \ 2x_1 + 5x_2 \quad \text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \leq I.$$

1. Escriba el lagrangiano y las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT), incluyendo las restricciones de no negatividad $x_i \geq 0$. Argumente por qué la restricción presupuestaria es *activa* en el óptimo. (2 puntos).
2. Usando las condiciones KKT, obtenga la demanda óptima $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ **en función del precio relativo** p_1/p_2. Distinga todos los casos. (2 puntos).

Parte B – Utilidad CRRA intertemporal (4 puntos).
Un agente vive T periodos y elige una senda de consumo $(c_1, \ldots, c_T)$, $c_t \geq 0$, para maximizar

$$U(c_1, \ldots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t), \qquad u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0,\ \sigma \neq 1,\ \beta \in (0,1),$$

sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal (riqueza inicial $W > 0$, tasa de interés $r > 0$):

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} = W.$$

1. Plantee el lagrangiano y obtenga la condición de primer orden para cada c_t. **Explique por qué basta el método de Lagrange y no se requieren las condiciones de KKT.** (1.5 puntos).
2. A partir de la condición de primer orden, muestre que $c_t = c_1 \, g^{t-1}$ (crecimiento geométrico) e identifique el factor g. Obtenga la forma cerrada de c_1 y de c_t. (1.5 puntos).
3. Discuta el caso de horizonte infinito $T \to \infty$: ¿bajo qué condición sobre β, r, σ existe solución finita? (1 punto).

Pregunta 2 (6 puntos) – Propiedades de preferencias.
Considere dos consumidores cuyas preferencias se representan por las funciones de utilidad siguientes:

$$\text{(A)} \quad u_A(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \ \text{ sobre } \mathbb{R}^n_+, \quad \text{con } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_{++} \text{ fijo}; \qquad \text{(B)} \quad u_B(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_3 \ \text{ sobre } \mathbb{R}^3_+.$$

Para cada una de ellas, determine **justificando** si la preferencia asociada es:

(i) *continua*;

(ii) *monótona* (y, en su caso, *fuertemente monótona*);

(iii) *convexa*;

(iv) *localmente no saciable* (LNS).

(Parte A: 3 puntos. Parte B: 3 puntos.)

Pregunta 3 (6 puntos) – Patologías de preferencias.

(a) Construya un ejemplo de preferencia **no transitiva** sobre $X = \mathbb{R}_+$ y demuestre explícitamente que falla la transitividad. Dé una interpretación económica. (2 puntos).

(b) Construya un ejemplo de preferencia **no continua** sobre $\mathbb{R}^2_+$ y demuestre la falla exhibiendo un conjunto de nivel superior que no es cerrado. (2 puntos).

(c) Sea $\succsim$ una preferencia completa, transitiva y *continua* sobre $\mathbb{R}^n_+$, y suponga que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Pruebe que la preferencia estricta es *robusta a perturbaciones pequeñas*: existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$ para todo $\mathbf{x}'$ con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ y todo $\mathbf{y}'$ con $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\| < \varepsilon$. (2 puntos).

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 26 de junio del 2026.

Solucionario – Cuarta práctica, 2026-1

Pregunta 1 – Parte A

(1) Lagrangiano y condiciones KKT. Con multiplicador $\lambda \geq 0$ para el presupuesto y $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ para $x_i \geq 0$,

$$\mathcal{L} = 2x_1 + 5x_2 - \lambda\,(p_1x_1 + p_2x_2 - I) + \mu_1x_1 + \mu_2x_2.$$

Condiciones KKT:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2 - \lambda p_1 + \mu_1 = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 5 - \lambda p_2 + \mu_2 = 0,$$

$$\lambda \geq 0, \quad \lambda\,(p_1x_1 + p_2x_2 - I) = 0, \qquad \mu_i \geq 0, \quad \mu_i x_i = 0, \qquad x_i \geq 0, \quad p_1x_1 + p_2x_2 \leq I.$$

El presupuesto es activo. De la primera ecuación, $\lambda p_1 = 2 + \mu_1 \geq 2 > 0$, luego $\lambda > 0$. Por holgura complementaria, $\lambda\,(p_1x_1 + p_2x_2 - I) = 0$ con $\lambda > 0$ obliga a $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ (la utilidad es creciente: se gasta todo el ingreso).

(2) Demanda óptima vía KKT. La utilidad marginal por unidad monetaria es $2/p_1$ en el bien 1 y $5/p_2$ en el bien 2. Analizamos los casos.

Caso $x_1 > 0,\ x_2 = 0$. Entonces $\mu_1 = 0$, luego $\lambda = 2/p_1$. La segunda condición da $\mu_2 = \lambda p_2 - 5 = \dfrac{2p_2}{p_1} - 5 \geq 0 \iff \dfrac{p_1}{p_2} \leq \dfrac{2}{5}$. En este caso $\mathbf{x}^* = \left(\frac{I}{p_1}, 0\right)$.

Caso $x_1 = 0,\ x_2 > 0$. Entonces $\mu_2 = 0$, luego $\lambda = 5/p_2$. La primera condición da $\mu_1 = \lambda p_1 - 2 = \dfrac{5p_1}{p_2} - 2 \geq 0 \iff \dfrac{p_1}{p_2} \geq \dfrac{2}{5}$. En este caso $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{I}{p_2}\right)$.

Caso interior $x_1, x_2 > 0$. Entonces $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $\lambda = 2/p_1 = 5/p_2$, lo que exige exactamente $p_1/p_2 = 2/5$; cualquier punto de la recta presupuestaria es óptimo (sustitutos perfectos).

En resumen,

$$\boxed{\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) = \begin{cases} \left(\frac{I}{p_1},\, 0\right), & \text{si } \dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{2}{5}, \\ \left(0,\, \frac{I}{p_2}\right), & \text{si } \dfrac{p_1}{p_2} > \dfrac{2}{5}, \\ \text{cualquier punto de } \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = I, & \text{si } \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{2}{5}. \end{cases}}$$

El consumidor gasta todo su ingreso en el bien con *mayor utilidad marginal por sol.*

Pregunta 1 – Parte B

(1) Lagrangiano, CPO y por qué Lagrange (no KKT). Como $u'(c) = c^{-\sigma} \to +\infty$ cuando $c \to 0^+$ (condición de Inada), el óptimo es interior ($c_t > 0$) y las restricciones $c_t \geq 0$ **no se activan**; y como u es estrictamente creciente, el presupuesto es activo. Por eso basta Lagrange con la restricción de igualdad, sin las condiciones de holgura de KKT.

Con multiplicador λ,

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{\,t-1} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \lambda \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} - W \right).$$

La condición de primer orden respecto de c_t es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^{\,t-1} c_t^{-\sigma} - \lambda\,(1+r)^{-(t-1)} = 0 \implies \boxed{\beta^{\,t-1} c_t^{-\sigma} = \lambda\,(1+r)^{-(t-1)}.}$$

(2) Crecimiento geométrico y forma cerrada. Despejando c_t de la condición de primer orden:

$$c_t^{-\sigma} = \lambda\,[\beta(1+r)]^{-(t-1)} \implies c_t = \lambda^{-1/\sigma}\,[\beta(1+r)]^{(t-1)/\sigma} = c_1\, g^{\,t-1},$$

con

$$\boxed{g = [\beta(1+r)]^{1/\sigma}, \qquad c_1 = \lambda^{-1/\sigma}.}$$

(El consumo crece si $\beta(1+r)>1$, decrece si $\beta(1+r)<1$ y es constante si $\beta(1+r)=1$.) Sustituyendo $c_t = c_1 g^{t-1}$ en la restricción presupuestaria,

$$W = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_1\, g^{t-1}}{(1+r)^{t-1}} = c_1 \sum_{t=1}^{T} \rho^{t-1}, \qquad \rho := \frac{g}{1+r} = \beta^{1/\sigma}(1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}.$$

Por la suma geométrica (para $\rho \neq 1$), $\sum_{t=1}^{T} \rho^{t-1} = \dfrac{1-\rho^T}{1-\rho}$, de modo que

$$\boxed{c_1 = W\,\frac{1-\rho}{1-\rho^T}, \qquad c_t = W\,\frac{1-\rho}{1-\rho^T}\, g^{t-1}.}$$

(Si $\rho = 1$, esto es $g = 1+r$, entonces $c_1 = W/T$.)

(3) Horizonte infinito $T \to \infty$. La serie $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1}$ converge si y solo si $\rho < 1$. Como

$$\rho < 1 \iff \beta^{1/\sigma}(1+r)^{(1-\sigma)/\sigma} < 1 \iff \beta(1+r)^{1-\sigma} < 1,$$

la condición de existencia de solución finita es $\boxed{\beta(1+r)^{1-\sigma} < 1.}$ Bajo ella, $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} = \dfrac{1}{1-\rho}$ y

$$c_1 = W(1-\rho), \qquad c_t = W(1-\rho)\, g^{t-1}.$$

Si $\rho \geq 1$, el valor presente del consumo planificado diverge y no existe senda factible óptima. Económicamente, $\rho < 1$ exige que el consumo no crezca más rápido que la tasa a la que se descuenta, garantizando riqueza finita.

Pregunta 2

(A) $u_A(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2$ sobre $\mathbb{R}^n_+$ (punto de saciedad $\mathbf{x}_0$).

(i) Continua. Sí. u_A es composición de la norma (continua) con la resta y el cuadrado; es continua. Por tanto los conjuntos $\{u_A \geq c\}$ y $\{u_A \leq c\}$ son cerrados. ✓

(ii) Monótona. No. En el punto de saciedad, "más" empeora. Contraejemplo: tome $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + (1,\ldots,1) \gg \mathbf{x}_0$. Entonces $u_A(\mathbf{y}) = -n < 0 = u_A(\mathbf{x}_0)$, de modo que $\mathbf{y} \gg \mathbf{x}$ pero $\mathbf{y} \prec \mathbf{x}$. Falla incluso la monotonía débil (y, a fortiori, la fuerte).

(iii) Convexa. Sí. La función $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2$ es convexa, luego $u_A = -\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2$ es *cóncava*; toda función cóncava es cuasicóncava, así que sus conjuntos de nivel superior $\{\mathbf{y} : u_A(\mathbf{y}) \geq c\}$ (bolas cerradas centradas en $\mathbf{x}_0$) son convexos. La preferencia es convexa (de hecho estrictamente convexa). ✓

(iv) LNS. No. En el punto $\mathbf{x}_0$, u_A alcanza su *máximo global* ($u_A(\mathbf{x}_0) = 0 \geq u_A(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{y}$). Por tanto ningún $\mathbf{y}$ cercano a $\mathbf{x}_0$ cumple $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}_0$: la LNS falla en $\mathbf{x}_0$.

(B) $u_B(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_3$ sobre $\mathbb{R}^3_+$.

(i) Continua. Sí. Es un polinomio, luego continua; los conjuntos de nivel son cerrados. ✓

(ii) Monótona. Sí; fuertemente monótona, no. Las derivadas parciales son $\partial_1 u_B = x_2 \geq 0$, $\partial_2 u_B = x_1 \geq 0$, $\partial_3 u_B = 1 > 0$. Si $\mathbf{y} \gg \mathbf{x} \geq 0$, entonces

$$y_1y_2 - x_1x_2 = y_2(y_1-x_1) + x_1(y_2-x_2) > 0 \quad \text{y} \quad y_3 - x_3 > 0,$$

luego $u_B(\mathbf{y}) > u_B(\mathbf{x})$: *es monótona*. Pero *no es fuertemente monótona*: con $\mathbf{x} = (0,0,0)$ e $\mathbf{y} = (1,0,0) \geq \mathbf{x}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, se tiene $u_B(\mathbf{y}) = 0 = u_B(\mathbf{x})$, así que $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ (no $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$).

(iii) Convexa. No. u_B no es cuasicóncava. Contraejemplo: sean $\mathbf{a} = (1,1,0)$ y $\mathbf{b} = (0,0,1)$, con $u_B(\mathbf{a}) = u_B(\mathbf{b}) = 1$. El punto medio $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ cumple

$$u_B(\mathbf{m}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} < 1 = \min\{u_B(\mathbf{a}), u_B(\mathbf{b})\}.$$

Luego el conjunto $\{\mathbf{y} : u_B(\mathbf{y}) \geq 1\}$ no es convexo (contiene $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ pero no $\mathbf{m}$).

(iv) LNS. Sí. Para cualquier $\mathbf{x}$ y $\varepsilon > 0$, tome $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_3$. Entonces $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ y $u_B(\mathbf{y}) = x_1x_2 + (x_3 + \frac{\varepsilon}{2}) > u_B(\mathbf{x})$, así que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. La LNS se cumple en todo punto. ✓

Comentario. Las dos preferencias son “complementarias”: (A) es continua y convexa pero ni monótona ni LNS (tiene saciedad); (B) es continua, monótona y LNS pero no convexa. Esto ilustra que las cuatro propiedades son lógicamente independientes.

Pregunta 3

(a) Preferencia no transitiva (semiorden de umbral). Sobre $X = \mathbb{R}_+$ (p. ej. cantidades de dinero) defina, con umbral 1,

$$x \succsim y \iff x \geq y - 1.$$

Es completa: si fuese $x < y-1$ y $y < x-1$, sumando daría $x+y < x+y-2$, absurdo; luego para todo x, y vale $x \succsim y$ o $y \succsim x$. La relación estricta es $x \succ y \iff x > y+1$ y la indiferencia $x \sim y \iff |x-y| \leq 1$.
Falla la transitividad. Tome $x = 0,\ y = 1,\ z = 2$:

$$0 \succsim 1\ (\,0 \geq 1-1 = 0\,) \quad \text{y} \quad 1 \succsim 2\ (\,1 \geq 2-1 = 1\,),$$

pero $0 \succsim 2$ exigiría $0 \geq 2-1 = 1$, lo cual es falso; de hecho $2 \succ 0$. Así $0 \succsim 1 \succsim 2$ pero $0 \not\succsim 2$: **no es transitiva**.
Interpretación. El consumidor no distingue diferencias menores al umbral (“diferencia apenas perceptible”): es indiferente entre 0 y 1, y entre 1 y 2, pero sí percibe la diferencia entre 0 y 2. La indiferencia encadenada acumula diferencias imperceptibles hasta volverse perceptible.

(b) Preferencia no continua (orden lexicográfico). Sobre $\mathbb{R}^2_+$ defina

$$\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y} \iff [x_1 > y_1] \ \text{ o } \ [x_1 = y_1 \text{ y } x_2 > y_2]\,.$$

Falla la continuidad. Considere $\mathbf{y} = (0,1)$ y la sucesión $\mathbf{x}^n = (1/n,\, 0) \to (0,0)$. Para todo n, $\mathbf{x}^n \succ_L \mathbf{y}$ porque $1/n > 0$; es decir, $\mathbf{x}^n \in \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \succsim_L \mathbf{y}\}$. Sin embargo, el límite $(0,0)$ satisface $(0,0) \prec_L (0,1) = \mathbf{y}$ (igual primera coordenada y $0 < 1$), de modo que $(0,0) \notin \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \succsim_L \mathbf{y}\}$. El conjunto de nivel superior $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \succsim_L \mathbf{y}\}$ **no es cerrado**: contiene toda la sucesión $\mathbf{x}^n$ pero no su límite. Luego la preferencia no es continua.

(c) Robustez de la preferencia estricta. Sea $\succsim$ completa, transitiva y continua, y $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Por continuidad, los conjuntos de nivel *estrictos* $\{\mathbf{z} : \mathbf{z} \succ \mathbf{a}\}$ y $\{\mathbf{z} : \mathbf{z} \prec \mathbf{a}\}$ son *abiertos* (complementos de cerrados). Distinguimos dos casos.
Caso 1: existe $\boldsymbol{z}$ con $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$. Los conjuntos $U = \{\mathbf{x}' : \mathbf{x}' \succ \mathbf{z}\}$ y $V = \{\mathbf{y}' : \mathbf{y}' \prec \mathbf{z}\}$ son abiertos y contienen a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respectivamente. Tome $\varepsilon > 0$ tal que las bolas $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset U$ y $B(\mathbf{y}, \varepsilon) \subset V$. Entonces, para $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ e $\mathbf{y}' \in B(\mathbf{y}, \varepsilon)$: $\mathbf{x}' \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}'$, y por transitividad $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$.
Caso 2: no existe ningún $\boldsymbol{z}$ con $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$. Los conjuntos $U = \{\mathbf{x}' : \mathbf{x}' \succ \mathbf{y}\}$ y $V = \{\mathbf{y}' : \mathbf{x} \succ \mathbf{y}'\}$ son abiertos y contienen a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Tome $\varepsilon > 0$ con $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset U$ y $B(\mathbf{y}, \varepsilon) \subset V$, y sean $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ (luego $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}$) e $\mathbf{y}' \in B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ (luego $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}'$). Por completitud, comparamos $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}'$: si fuese $\mathbf{y}' \succsim \mathbf{x}'$, encadenando obtendríamos

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}' \succsim \mathbf{x}' \succ \mathbf{y} \implies \mathbf{x} \succ \mathbf{x}' \succ \mathbf{y},$$

es decir $\mathbf{x}'$ estaría estrictamente entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, contradiciendo la hipótesis del Caso 2. Por tanto $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$.

En ambos casos existe $\varepsilon > 0$ con la propiedad buscada. □

Observación. La continuidad hace que la preferencia estricta sea “estable”: pequeños errores de medición en las canastas no invierten una comparación estricta. Es la propiedad que garantiza, por ejemplo, que la demanda varíe de forma controlada ante perturbaciones de precios e ingreso.

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 26 de junio del 2026.