PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Cuarta práctica — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Puntaje total: **20 puntos**.
- Solo se permiten apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
- La presentación y redacción influirán en la calificación.

Pregunta 1 (8 puntos) – KKT y consumo intertemporal.

Parte A – Bienes sustitutos perfectos (4 puntos).
Un consumidor en $\mathbb{R}^2_+$ tiene utilidad lineal $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$, enfrenta precios $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg 0$ e ingreso $I > 0$. Resuelva

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \; 2x_1 + 5x_2 \quad \text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \leq I.$$

1. Escriba el lagrangiano y las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT), incluyendo las restricciones de no negatividad $x_i \geq 0$. (2 puntos).
2. Usando las condiciones KKT, obtenga la demanda óptima $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ en función del precio relativo p_1/p_2. Distinga todos los casos. (2 puntos).

Parte B – Utilidad CRRA intertemporal (4 puntos).
Un agente vive T periodos y elige una senda de consumo $(c_1, \ldots, c_T)$, $c_t \geq 0$, para maximizar

$$U(c_1, \ldots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{\,t-1} u(c_t), \qquad u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0,\ \sigma \neq 1,\ \beta \in (0,1),$$

sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal (riqueza inicial $W > 0$, tasa de interés $r > 0$):

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} = W.$$

1. Plantee el lagrangiano y obtenga la condición de primer orden para cada c_t. **Explique por qué basta el método de Lagrange y no se requieren las condiciones de KKT.** (1.5 puntos).
2. A partir de la condición de primer orden, muestre que $c_t = c_1\, g^{\,t-1}$ (crecimiento geométrico) e identifique el factor g. Obtenga la forma cerrada de c_1 y de c_t. (1.5 puntos).
3. Discuta el caso de horizonte infinito $T \to \infty$: ¿bajo qué condición sobre β, r, σ existe solución finita? (1 punto).

Pregunta 2 (6 puntos) – Propiedades de preferencias.
Considere dos consumidores cuyas preferencias se representan por las funciones de utilidad siguientes:

(A) $u_A(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ sobre $\mathbb{R}^n_+$, con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ fijo; (B) $u_B(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_3$ sobre $\mathbb{R}^3_+$.

Para cada una de ellas, determine **justificando** si la preferencia asociada es:

(i) *continua*;

(ii) *monótona* (y, en su caso, *fuertemente monótona*);

(iii) *convexa*;

(iv) *localmente no saciable* (LNS).

(Parte A: 3 puntos. Parte B: 3 puntos.)

Pregunta 3 (6 puntos) – Patologías de preferencias.

(a) Construya un ejemplo de preferencia **no transitiva** sobre $X = \mathbb{R}_+$ y demuestre explícitamente que falla la transitividad. (2 puntos).

(b) Construya un ejemplo de preferencia **no convexa** sobre $\mathbb{R}^n_+$. (2 puntos).

(c) Sea $\succsim$ una preferencia completa, transitiva y *continua* sobre $\mathbb{R}^n_+$, y suponga que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Pruebe que la preferencia estricta es *robusta a perturbaciones pequeñas*: existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$ para todo $\mathbf{x}'$ con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ y todo $\mathbf{y}'$ con $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\| < \varepsilon$. (2 puntos).

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 26 de junio del 2026.