

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Cuarta práctica — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Puntaje total: **20 puntos**.
- Solo se permiten apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
- La presentación y redacción influirán en la calificación.

Pregunta 1 (8 puntos) – KKT y consumo intertemporal.

Parte A – Bienes sustitutos perfectos (4 puntos).

Un consumidor en \mathbb{R}_+^2 tiene utilidad lineal $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$, enfrenta precios $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg 0$ e ingreso $I > 0$. Resuelve

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} 2x_1 + 5x_2 \quad \text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \leq I.$$

1. Escriba el lagrangiano y las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT), incluyendo las restricciones de no negatividad $x_i \geq 0$. Argumente por qué la restricción presupuestaria es *activa* en el óptimo. (2 puntos).
2. Usando las condiciones KKT, obtenga la demanda óptima $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ en función del precio relativo p_1/p_2 . Distinga todos los casos. (2 puntos).

Parte B – Utilidad CRRA intertemporal (4 puntos).

Un agente vive T periodos y elige una senda de consumo (c_1, \dots, c_T) , $c_t \geq 0$, para maximizar

$$U(c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} u(c_t), \quad u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0, \sigma \neq 1, \beta \in (0, 1),$$

sujeito a la restricción presupuestaria intertemporal (riqueza inicial $W > 0$, tasa de interés $r > 0$):

$$\sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} = W.$$

1. Plantee el lagrangiano y obtenga la condición de primer orden para cada c_t . **Explique por qué basta el método de Lagrange y no se requieren las condiciones de KKT.** (1.5 puntos).
2. A partir de la condición de primer orden, muestre que $c_t = c_1 g^{t-1}$ (crecimiento geométrico) e identifique el factor g . Obtenga la forma cerrada de c_1 y de c_t . (1.5 puntos).
3. Discuta el caso de horizonte infinito $T \rightarrow \infty$: ¿bajo qué condición sobre β, r, σ existe solución finita? (1 punto).

Pregunta 2 (6 puntos) – Propiedades de preferencias.

Considere dos consumidores cuyas preferencias se representan por las funciones de utilidad siguientes:

(A) $u_A(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ sobre \mathbb{R}_+^n , con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ fijo; (B) $u_B(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_3$ sobre \mathbb{R}_+^3 .

Para cada una de ellas, determine **justificando** si la preferencia asociada es:

- (i) *continua*;
- (ii) *monótona* (y, en su caso, *fuertemente monótona*);
- (iii) *convexa*;
- (iv) *localmente no saciable* (LNS).

(Parte A: 3 puntos. Parte B: 3 puntos.)

Pregunta 3 (6 puntos) – Patologías de preferencias.

- (a) Construya un ejemplo de preferencia **no transitiva** sobre $X = \mathbb{R}_+$ y demuestre explícitamente que falla la transitividad. Dé una interpretación económica. (2 puntos).
- (b) Construya un ejemplo de preferencia **no continua** sobre \mathbb{R}_+^2 y demuestre la falla exhibiendo un conjunto de nivel superior que no es cerrado. (2 puntos).
- (c) Sea \succsim una preferencia completa, transitiva y *continua* sobre \mathbb{R}_+^n , y suponga que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Pruebe que la preferencia estricta es *robusta a perturbaciones pequeñas*: existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$ para todo \mathbf{x}' con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ y todo \mathbf{y}' con $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\| < \varepsilon$. (2 puntos).

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 26 de junio del 2026.