

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Tercera práctica — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
 - Puntaje total: **20 puntos**.
 - Solo se permiten apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
 - La presentación y redacción influirán en la calificación.
-

Pregunta 1 (5 puntos) – Maximización del beneficio.

Una empresa competitiva produce un único bien, que vende al precio $p > 0$, empleando dos insumos $x_1, x_2 \geq 0$ cuyos precios son $w_1, w_2 > 0$. La función de producción es

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$

1. Plantee el problema de maximización del beneficio. (1 punto).
2. ¿Qué condición sobre f asegura que la solución es *interior* (es decir, $x_1^*, x_2^* > 0$)? Verifíquela. (1 punto).
3. Plantee las condiciones de primer orden (CPO) y obtenga las demandas óptimas de insumos $x_1^*(p, \mathbf{w})$, $x_2^*(p, \mathbf{w})$, donde $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$. (2 puntos).
4. Aplique el **Lema de Hotelling** para calcular $\frac{\partial \pi^*}{\partial w_i}$ y $\frac{\partial \pi^*}{\partial p}$. (1 punto).

Pregunta 2 (12 puntos) – UMP, EMP y dualidad.

Considere tres consumidores en \mathbb{R}_{++}^2 , con precios $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg 0$ e ingreso $I > 0$, cuyas funciones de utilidad son, respectivamente,

(C1) Cobb–Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$, $a \in (0, 1)$; (C2) Leontief: $u(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{b}, \frac{x_2}{c}\right\}$, $b, c > 0$;

(C3) cuasilineal: $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$.

Denote por $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ la demanda *marshalliana* (walrasiana), $v(\mathbf{p}, I)$ la utilidad indirecta, $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{u})$ la demanda *hicksiana* y $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ la función de gasto.

- (a) Plantee el problema de maximización de la utilidad (UMP) y el de minimización del gasto (EMP) para cada consumidor. (1.5 puntos).
- (b) Resuelva el UMP para cada consumidor: obtenga $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ y $v(\mathbf{p}, I)$. (1.5 puntos).
- (c) Resuelva el EMP para cada consumidor: obtenga $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{u})$ y $e(\mathbf{p}, \bar{u})$. (1.5 puntos).
- (d) **Dualidad.** Enuncie los teoremas de dualidad UMP–EMP vistos en la PD3 (solo en v y e) y verifíquelos para cada consumidor. (4 puntos).
- (e) Enuncie y verifique el **Lema de Shephard** para el bien 1 en cada caso. (1.5 puntos).
- (f) Enuncie y verifique la **identidad de Roy** para el bien 2 en cada caso. (2 puntos).

Pregunta 3 (3 puntos) – Minimización del costo con tecnología CES.

Una empresa produce con la tecnología CES en \mathbb{R}_+^n

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^\rho\right)^{1/\rho}, \quad \rho \in (0, 1),$$

y enfrenta precios de insumos $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \gg 0$. Desea producir un nivel $q > 0$ al mínimo costo.

1. Plantee el problema de minimización del costo. (1 punto).
2. Resuélvalo: obtenga las demandas condicionadas $x_i^*(\mathbf{w}, q)$ y la función de costos $c(\mathbf{w}, q)$. (1 punto).
3. Verifique el **Lema de Shephard** $\frac{\partial c}{\partial w_i} = ?$. (1 punto).

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 12 de junio del 2026.