

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
Primera práctica (tipo a) — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
 - Puntaje total: **20 puntos**.
 - Solo se permiten apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
 - La presentación y redacción influirán en la calificación.
-

Pregunta 1 (6 puntos)

Dos empresas A y B compiten por cuotas en el mercado de telefonía móvil. Se normaliza a 1 la población total. En cada periodo $t = 0, 1, \dots$, el 30% de los usuarios de A migra a B y el 40% de los usuarios de B migra a A . Sea $\mathbf{s}_t = (s_t^A, s_t^B)^\top$ el vector de cuotas de mercado.

1. Escriba la dinámica $\mathbf{s}_t = M\mathbf{s}_{t-1}$, identificando la matriz $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. (2 puntos).
2. Encuentre los valores propios y vectores propios de M . (2 puntos).
3. Diagonalice M y obtenga $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s}_t$ a partir de las condiciones iniciales $s_0^A = 0.6$, $s_0^B = 0.4$.
¿Depende la cuota de mercado de largo plazo de las cuotas iniciales? (2 puntos).

Pregunta 2 (6 puntos)

Una empresa produce un bien usando los insumos x_1 y x_2 . Su función de costos es

$$C(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

y el precio de venta está vinculado con los precios de los insumos w_1, w_2 mediante

$$P(w_1, w_2) = 2w_1^2 - 3w_1w_2 + 2w_2^2.$$

1. Verifique si C y P constituyen funciones de costo y de precio válidas, es decir, si son positivas sobre $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. (3 puntos).
2. Un estudio de economistas predice que, al incorporar un tercer insumo x_3 , el costo será

$$\hat{C}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3 + x_2^2 - 5x_3^2.$$

¿Ha cometido algún error el estudio? Justifique formalmente. (3 puntos).

Pregunta 3 (4 puntos)

Una firma competitiva produce dos bienes A y B en cantidades q_A y q_B . Su beneficio es

$$\pi(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q},$$

donde $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ es la matriz de costos y $\mathbf{p} = (p_A, p_B)^\top$ es el vector de precios.

1. Explique la estructura de $\pi(\mathbf{q})$: identifique el ingreso bruto generado por las ventas de la firma y la función de costos. ¿Son los costos cuadráticos en \mathbf{q} ? (1 punto).
2. Verifique que C es definida positiva. (1 punto).
3. Al maximizar π , la firma obtiene la condición de primer orden $C\mathbf{q}^* = \mathbf{p}$.¹ Diagonalice C ortogonalmente ($C = QDQ^\top$) para resolver \mathbf{q}^* cuando $\mathbf{p} = (5, 3)^\top$. (2 puntos).

¹Esto será demostrado más adelante en el curso.

Pregunta 4 (4 puntos)

Un economista quiere medir cuán distintos son dos vectores de precios $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ y $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ en \mathbb{R}_{++}^2 y propone tres candidatos:

$$d_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2)|, \quad d_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left| \frac{p_1}{p_2} - \frac{q_1}{q_2} \right|, \quad d_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left| \log \frac{p_1}{q_1} \right| + \left| \log \frac{p_2}{q_2} \right|.$$

1. Para d_1 y d_2 : determine si son métricas; en caso negativo, provea un contraejemplo e indique qué axioma falla. (2 puntos).
2. Para d_3 : verifique que sí es una métrica comprobando todos los axiomas. Interprete económicamente d_3 y además responda lo siguiente: ¿Es d_3 sensible al cambio de unidades monetarias (de soles a dólares, por ejemplo)? (2 puntos).

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 10 de abril del 2026.

Solucionario — Primera práctica (tipo a), 2026

Pregunta 1

(1) Los flujos implican:

$$M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Las columnas de M suman 1: M es una *matriz de transición estocástica*.

(2) Polinomio característico:

$$\det(M - \lambda I) = \lambda^2 - 1.3\lambda + 0.30 = 0 \implies \boxed{\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.3.}$$

Vectores propios:

$$\lambda_1 = 1: (M - I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies -0.3v_1 + 0.4v_2 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 0.3: (M - 0.3I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies v_1 + v_2 = 0 \implies \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(3) Sea $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$, $\det P = -7$, y

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 3/7 & -4/7 \end{bmatrix}.$$

Con $\mathbf{s}_0 = (0.6, 0.4)^\top$:

$$P^{-1}\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 1/35 \end{bmatrix}.$$

Por tanto:

$$\mathbf{s}_t = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{0.3^t}{35} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Como $0.3^t \rightarrow 0$:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s}_t = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.571 \\ 0.429 \end{bmatrix}.$$

Las cuotas de mercado de largo plazo son *independientes* de las cuotas iniciales \mathbf{s}_0 : quedan determinadas únicamente por las tasas de migración entre empresas.

Pregunta 2

(1a) Matriz de C : $A_C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Criterio de Sylvester (menores principales): $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$. A_C es definida positiva $\implies C > 0$ sobre $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, y $C(\mathbf{0}) = 0$. ✓

(1b) Matriz de P : $A_P = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$. $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 - 9/4 = 7/4 > 0$. A_P es definida positiva $\implies P > 0$. ✓

(2) La matriz simétrica de \hat{C} es

$$A_{\hat{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5 \end{bmatrix}.$$

El tercer menor principal líder es $\Delta_3 = \det A_{\hat{C}}$. Sin necesidad de calcularlo, basta evaluar en $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$:

$$\hat{C}(0, 0, 1) = -5 < 0.$$

Una función de costos debe ser no negativa para cualquier combinación de insumos. **El estudio tiene un error:** \hat{C} no es definida positiva (ni semidefinida).

Pregunta 3

(1) Estructura de $\pi(\mathbf{q})$.

El beneficio se descompone en dos términos con interpretación económica directa:

$$\pi(\mathbf{q}) = \underbrace{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}_{\text{ingreso bruto}} - \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q}}_{\text{costos}}.$$

El **ingreso bruto** $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_A q_A + p_B q_B$ es la recaudación total: precio de cada bien multiplicado por la cantidad vendida. La **función de costos** $\frac{1}{2} \mathbf{q}^\top C \mathbf{q}$ es *cuadrática* en \mathbf{q} : los costos crecen con el cuadrado de las cantidades, y el término cruzado $q_A q_B$ (ponderado por $C_{12} = 1$) refleja costos compartidos entre la producción de ambos bienes.²

(2) Menores principales de $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = 9 - 1 = 8 > 0.$$

Por Sylvester, C es **definida positiva**. ✓

(3) Diagonalización ortogonal de C .

Polinomio característico: $(3 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$.

$$\boxed{\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.}$$

Vectores propios (normalizados):

$$\lambda_1 = 2: (C - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow v_1 = v_2 \cdot (-1) \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 4: (C - 4I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Esto no es casualidad: dado que C es una matriz *real y simétrica* ($C = C^\top$), el **Teorema Espectral** garantiza que vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí, y que C admite una diagonalización ortogonal $C = QDQ^\top$ con $Q^{-1} = Q^\top$. Por ello se puede normalizar cada vector propio y construir Q ortonormal. Entonces:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = QDQ^\top.$$

Resolución de $C\mathbf{q}^* = \mathbf{p}$, con $\mathbf{p} = (5, 3)^\top$.

Dado que $C = QDQ^\top$, tenemos $\mathbf{q}^* = C^{-1}\mathbf{p} = QD^{-1}Q^\top\mathbf{p}$.

Paso 1: $\tilde{\mathbf{p}} = Q^\top\mathbf{p}$. $Q^\top = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, luego

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 - 3 \\ 5 + 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Paso 2: $\tilde{\mathbf{q}} = D^{-1}\tilde{\mathbf{p}}$.

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Paso 3: $\mathbf{q}^* = Q\tilde{\mathbf{q}}$.

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}.$$

²Que C sea **definida positiva** implica que los costos son estrictamente positivos para cualquier $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ (producir siempre cuesta algo) y que crecen en todas las direcciones, lo que hace a π estrictamente cóncava y garantiza que el problema de maximización tenga solución única.

Verificación: $C\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}$. ✓

Pregunta 4

Recordamos los cuatro axiomas de métrica en X : para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$,

- (i) *No negatividad*: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$.
- (ii) *Identidad*: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- (iii) *Simetría*: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- (iv) *Desigualdad triangular*: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

d_1 **no es métrica**. Falla el axioma (ii).

Contraejemplo: $\mathbf{p} = (2, 1)$, $\mathbf{q} = (1, 2)$.

$$d_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |(2 - 1) + (1 - 2)| = 0, \quad \text{pero } \mathbf{p} \neq \mathbf{q}.$$

Intuición económica: d_1 mide únicamente la diferencia en el *gasto total* $(p_1 + p_2) - (q_1 + q_2)$. Dos vectores de precios completamente distintos —uno concentrado en el bien 1 y el otro en el bien 2— pueden tener el mismo nivel de gasto y quedar a “distancia cero”.

d_2 **no es métrica** (sobre \mathbb{R}_{++}^2). Falla el axioma (ii).

La cantidad p_1/p_2 es el *precio relativo* del bien 1 en términos del bien 2.³ Entonces $d_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ no implica $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, sino solo que \mathbf{p} y \mathbf{q} son proporcionales. Esto ocurre ante una inflación uniforme⁴: si todos los precios se duplican, el precio relativo no varía y d_2 registra cero.

Contraejemplo: $\mathbf{p} = (1, 1)$, $\mathbf{q} = (3, 3)$.

$$d_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left| \frac{1}{1} - \frac{3}{3} \right| = 0, \quad \text{pero } \mathbf{p} \neq \mathbf{q}.$$

d_3 **sí es métrica**. Verificamos los cuatro axiomas.

- (i) *No negatividad*: $d_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\log(p_1/q_1)| + |\log(p_2/q_2)| \geq 0$. ✓
- (ii) *Identidad*: $d_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow |\log(p_1/q_1)| = 0$ y $|\log(p_2/q_2)| = 0 \Leftrightarrow p_1 = q_1$ y $p_2 = q_2 \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{q}$. ✓
- (iii) *Simetría*: $|\log(p_i/q_i)| = |-\log(q_i/p_i)| = |\log(q_i/p_i)|$, luego $d_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_3(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. ✓
- (iv) *Desigualdad triangular*: Para cualquier $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_{++}^2$ y cada $i = 1, 2$:

$$\left| \log \frac{p_i}{r_i} \right| = \left| \log \frac{p_i}{q_i} + \log \frac{q_i}{r_i} \right| \leq \left| \log \frac{p_i}{q_i} \right| + \left| \log \frac{q_i}{r_i} \right|.$$

Sumando sobre $i = 1, 2$: $d_3(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leq d_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d_3(\mathbf{q}, \mathbf{r})$. ✓

Interpretación económica. d_3 mide la suma de las *variaciones porcentuales* en cada precio: $|\log(p_i/q_i)| \approx |(p_i - q_i)/q_i|$ para cambios pequeños. A diferencia de d_1 y d_2 , captura tanto el nivel como la composición de los precios. Más aún, d_3 es **invariante al cambio de unidades monetarias**: si todos los precios se expresan en dólares en lugar de soles (es decir, $p_i \mapsto \alpha p_i$ y $q_i \mapsto \alpha q_i$ para $\alpha > 0$), entonces

$$\left| \log \frac{\alpha p_i}{\alpha q_i} \right| = \left| \log \frac{p_i}{q_i} \right|,$$

y la distancia no cambia.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 10 de abril del 2026.

³En economía, el precio relativo p_1/p_2 indica cuántas unidades del bien 2 hay que sacrificar para obtener una unidad adicional del bien 1.

⁴La *inflación* es el aumento generalizado del nivel de precios. Si todos los precios suben en la misma proporción, los precios relativos no cambian.