

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Examen Parcial (tipo a) — Primer semestre 2026

Indicaciones: duración 170 min. Puntaje total 20 pts. Apuntes: 2 hojas A4. Se permite calculadora no programable. Justifique cada paso.

Pregunta 1

(3 puntos)

Dualidad formal–informal del mercado laboral.

En una economía con sectores formal (F) e informal (I), cada año el 25% de los formales pasa al sector informal y el 50% de los informales al formal. Sea $\mathbf{x}_t = (f_t, i_t)^\top$ con $f_t + i_t = 1$ y dinámica $\mathbf{x}_{t+1} = M\mathbf{x}_t$.

- (a) (1 pt) Identifique M y halle sus valores y vectores propios.
- (b) (1 pt) Calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_t$.
- (c) (1 pt) ¿El límite hallado en (b) depende de las condiciones iniciales? Interprete.

Pregunta 2

(5 puntos)

Optimización irrestricta en \mathbb{R}^2 .

- (a) (3 pt) Sea $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Halle todos los puntos críticos, clasifíquelos por la Hessiana y determine si f tiene óptimos globales sobre \mathbb{R}^2 .
- (b) (2 pt) Una firma con ingresos $R(x, y) = x(60 - 2x) + y(80 - 4y)$ y costos $C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 10x + 5$ vende $x, y \geq 0$ unidades de dos bienes. Plantee el beneficio de la empresa y analice si posee un máximo global.

Pregunta 3

(6 puntos)

Aplicaciones: teorema de la envolvente y TMS.

- (a) (4 pt) **Aplicación: lema de Hotelling.** Una firma elige insumos $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ (interior), $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, para maximizar

$$\pi(\mathbf{x}; p, \mathbf{w}) = pF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n w_i x_i,$$

con $F : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ estrictamente cóncava y C^1 , y que satisface las *condiciones de Inada*

$$\lim_{x_i \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial x_i} = +\infty, \quad \lim_{x_i \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

de modo que el óptimo $\mathbf{x}^*(p, \mathbf{w})$ es *interior* ($x_i^* > 0$ para todo i). Sea $\pi^*(p, \mathbf{w}) := \pi(\mathbf{x}^*; p, \mathbf{w})$ la función de beneficio.

- (i) (2 pt) Demuestre que $\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = F(\mathbf{x}^*)$ y $\frac{\partial \pi^*}{\partial w_i} = -x_i^*$ ($i = 1, \dots, n$). A esto se le conoce como Lema de Hotelling: debido a Harold Hotelling, matemático y *doctoral advisor* del Nobel y matemático Kenneth Arrow.
- (ii) (2 pt) **Caso concreto** ($n = 2$). Sea $F(x_1, x_2) = 2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$, con $p, w_1, w_2 > 0$ arbitrarios. Verifique que F es estrictamente cóncava sobre \mathbb{R}_{++}^2 y que satisface las

condiciones de Inada, halle $\mathbf{x}^*(p, \mathbf{w})$ y $\pi^*(p, \mathbf{w})$ explícitamente, y compruebe las tres identidades de Hotelling:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = F(\mathbf{x}^*), \quad \frac{\partial \pi^*}{\partial w_1} = -x_1^*, \quad \frac{\partial \pi^*}{\partial w_2} = -x_2^*.$$

- (b) (2 pt) **Tasa marginal de sustitución (TMS) decreciente.** Sea $u : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de utilidad de clase C^2 , cuasicóncava, con $u_1 > 0$, $u_2 > 0$. Sobre una curva de indiferencia $\{(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) = c\}$, x_2 es función diferenciable de x_1 : $u(x_1, x_2(x_1)) = c$. Defina

$$\text{TMS}(x_1) := \frac{u_1(x_1, x_2(x_1))}{u_2(x_1, x_2(x_1))}.$$

Recuerde que si $u \in C^2$ es cuasicóncava y $u_1, u_2 > 0$, entonces el determinante del Hessiano orlado cumple, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{++}^2$,

$$\det B(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Pruebe que TMS es no creciente en x_1 .

Pasos sugeridos. (1) Por derivación implícita: $x_2'(x_1) = -u_1/u_2$. (2) Aplique regla del cociente y regla de la cadena para expresar $\frac{d \text{TMS}}{dx_1}$ en términos de $u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}$. (3) Relacione el numerador con $-\det B(\mathbf{x})$ desarrollando este último por la primera fila.

Pregunta 4

(3 puntos)

Función de costos: propiedades de la función valor.

Considere el problema de minimización del costo:

$$c(\mathbf{w}, q) = \min_{\mathbf{z} \geq 0, f(\mathbf{z}) \geq q} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z},$$

con $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{++}^n$, $q \geq 0$ y $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ la producción. Suponga que el mínimo se alcanza. Observe que $Z(q) := \{\mathbf{z} \geq 0 : f(\mathbf{z}) \geq q\}$ no depende de \mathbf{w} .

- (1) (1 pt) Pruebe que c es creciente y homogénea de grado 1 en \mathbf{w} .
- (2) (2 pt) Determine la función de producción f si

$$c(\mathbf{w}, q) = q \cdot \min \left\{ \frac{w_1}{b_1}, \dots, \frac{w_n}{b_n} \right\}, \quad b_i > 0.$$

Interprete brevemente la tecnología.

Pregunta 5

(3 puntos)

Estática comparativa: demanda del consumidor (utilidad cuasilineal).

Un consumidor reparte su renta $M > 0$ entre dos bienes (x_1, x_2) y un bien numerario x_3 (de precio 1). Su utilidad es *cuasilineal*:

$$U(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) + x_3,$$

con $v \in C^2$ estrictamente cóncava ($v_{11} < 0$, $v_{22} < 0$, $v_{11}v_{22} - v_{12}^2 > 0$) y $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Los precios son $p_1, p_2 > 0$ y la restricción presupuestaria es $p_1x_1 + p_2x_2 + x_3 = M$.

- (a) (1 pt) Sustituyendo el bien numerario en la utilidad, escriba el problema *irrestringido* en (x_1, x_2) y el sistema de condiciones de primer orden $\mathbf{G}(x_1, x_2; p_1, p_2) = \mathbf{0}$ que define la demanda $(x_1^*(p_1, p_2), x_2^*(p_1, p_2))$ (solución interior, que tomamos por dado está en \mathbb{R}_{++}^2). Calcule el Jacobiano J respecto a (x_1, x_2) y muestre que $\det J \neq 0$ (con signo definido).
- (b) (2 pt) *Sin resolver el sistema*, use el Teorema de la Función Implícita para hallar $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$ y $\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}$. Determine el signo de $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$ (ley de la demanda) y explique de qué depende el signo de $\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}$ (bienes sustitutos vs. complementarios).
-

Profesor: Jorge Chávez. Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.
San Miguel, 19 de mayo del 2026.

Solucionario — Examen Parcial (tipo a), 2026-1

Pregunta 1. *Dualidad formal-informal.*

(a) De $f_{t+1} = 0.75 f_t + 0.5 i_t$ e $i_{t+1} = 0.25 f_t + 0.5 i_t$:

$$M = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (\text{columnas suman 1, matriz estocástica}).$$

Polinomio característico:

$$\det(M - \lambda I) = (0.75 - \lambda)(0.5 - \lambda) - (0.5)(0.25) = \lambda^2 - 1.25\lambda + 0.25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.25.$$

- $\lambda_1 = 1$: $(M - I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow -0.25v_1 + 0.5v_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (2, 1)^\top$.
- $\lambda_2 = 0.25$: $(M - 0.25I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow 0.5v_1 + 0.5v_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, -1)^\top$.

(b) Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es base de \mathbb{R}^2 , escribimos $\mathbf{x}_0 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$. Entonces

$$\mathbf{x}_t = M^t \mathbf{x}_0 = \alpha \lambda_1^t \mathbf{v}_1 + \beta \lambda_2^t \mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta (0.25)^t \mathbf{v}_2.$$

De $\mathbf{x}_0 = \alpha(2, 1)^\top + \beta(1, -1)^\top$ se obtiene $2\alpha + \beta = f_0$ y $\alpha - \beta = i_0$; sumando, $3\alpha = f_0 + i_0 = 1$, luego $\alpha = \frac{1}{3}$. Como $(0.25)^t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_t = \alpha \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} (2, 1)^\top = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^\top.$$

(c) **No**: el límite $(2/3, 1/3)^\top$ de (b) sólo usa $f_0 + i_0 = 1$, no el reparto particular (f_0, i_0) (la componente $\beta(0.25)^t \mathbf{v}_2$ se desvanece). Interpretación: el equilibrio de largo plazo queda determinado únicamente por las tasas de transición; cualquier composición inicial converge a $2/3$ de formales y $1/3$ de informales. \square

Pregunta 2. *Optimización irrestricta en \mathbb{R}^2 .*

(a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Puntos críticos. $f_x = 4x^3 - 4y = 0$, $f_y = 4y^3 - 4x = 0 \Rightarrow y = x^3$, $x = y^3 = x^9$. Luego $x(x^8 - 1) = 0$, así $x \in \{0, 1, -1\}$ y $y = x^3$:

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (-1, -1).$$

Hessiana. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = -4$.

$$(0, 0) : H = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \det H = -16 < 0 \Rightarrow \text{silla.}$$

$$(\pm 1, \pm 1) : H = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \det H = 128 > 0, f_{xx} = 12 > 0 \Rightarrow \text{mínimo local, } f(\pm 1, \pm 1) = -2.$$

Globalidad. f es coerciva: $x^4 + y^4 \rightarrow \infty$ cuando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ y domina al término $-4xy$ (por AM-GM, $|4xy| \leq 2(x^2 + y^2)$). Continua + coerciva \Rightarrow alcanza mínimo global. Como $(\pm 1, \pm 1)$ son los únicos críticos con valor < 0 :

$$\text{Mínimo global} = -2 \text{ en } (1, 1) \text{ y } (-1, -1).$$

No hay máximo global. \square

(b) $\pi(x, y) = R - C = 70x - 3x^2 + 80y - 6y^2 - 2xy - 5$.

CPO: $\pi_x = 70 - 6x - 2y = 0$, $\pi_y = 80 - 12y - 2x = 0$. Sistema $3x + y = 35$, $x + 6y = 40 \Rightarrow (x^*, y^*) = (10, 5)$.

CSO: $H_\pi = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$, $\det H_\pi = 68 > 0$, $\pi_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow H_\pi$ definida negativa $\Rightarrow \pi$ estrictamente cóncava en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow (10, 5)$ es máximo global único.

$$\pi^* = \pi(10, 5) = 700 - 300 + 400 - 150 - 100 - 5 = 545. \quad \square$$

Pregunta 3. Hotelling y TMS.

(a.i) Hotelling general. Como F es estrictamente cóncava y C^1 y satisface las condiciones de Inada, el óptimo es interior ($x_i^* > 0$) y las CPO se cumplen *con igualdad*: no hay esquinas. Aplicamos el teorema de la envolvente al problema $\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{++}^n} \pi(\mathbf{x}; p, \mathbf{w})$, identificando los parámetros uno a uno (los restantes se mantienen constantes).

Derivada respecto a p. Con el parámetro p : $\partial\pi/\partial p = F(\mathbf{x})$. Por el teorema de la envolvente,

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial p}(p, \mathbf{w}) = \left. \frac{\partial\pi}{\partial p} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(p, \mathbf{w})} = F(\mathbf{x}^*(p, \mathbf{w})) = q^* \quad (\text{oferta óptima}).$$

Derivada respecto a w_i . Con el parámetro w_i : $\partial\pi/\partial w_i = -x_i$. Por envolvente,

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial w_i}(p, \mathbf{w}) = -x_i^*(p, \mathbf{w}) \quad (-\text{demanda óptima del insumo } i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Interpretación. Un alza marginal en el precio del producto aumenta el beneficio máximo a una tasa igual a la cantidad óptima producida; un alza marginal en el precio de un insumo lo reduce a una tasa igual a la cantidad usada de ese insumo. Esto permite recuperar oferta y demandas derivando π^* , sin resolver explícitamente las CPO.

(a.ii) Verificación concreta ($n = 2$).

Concavidad de F . $F_1 = 1/\sqrt{x_1}$, $F_2 = 1/\sqrt{x_2}$, $F_{11} = -\frac{1}{2}x_1^{-3/2} < 0$, $F_{22} = -\frac{1}{2}x_2^{-3/2} < 0$, $F_{12} = 0$. La Hessiana es diagonal con entradas negativas \Rightarrow definida negativa $\Rightarrow F$ estrictamente cóncava en \mathbb{R}_{++}^2 .

Condiciones de Inada. $F_i = 1/\sqrt{x_i} \rightarrow +\infty$ cuando $x_i \rightarrow 0^+$ y $F_i \rightarrow 0$ cuando $x_i \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$); luego el óptimo es interior.

Cálculo del óptimo. $\pi(\mathbf{x}; p, \mathbf{w}) = 2p\sqrt{x_1} + 2p\sqrt{x_2} - w_1x_1 - w_2x_2$. CPO:

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_1} = \frac{p}{\sqrt{x_1}} - w_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^*} = \frac{p}{w_1} \Rightarrow x_1^*(p, \mathbf{w}) = \frac{p^2}{w_1^2},$$

y análogamente $x_2^*(p, \mathbf{w}) = p^2/w_2^2$. La Hessiana de π hereda la de F (multiplicada por $p > 0$): sigue siendo definida negativa \Rightarrow máximo global único.

Función de beneficio.

$$\pi^*(p, \mathbf{w}) = 2p \cdot \frac{p}{w_1} + 2p \cdot \frac{p}{w_2} - w_1 \cdot \frac{p^2}{w_1^2} - w_2 \cdot \frac{p^2}{w_2^2} = \frac{2p^2}{w_1} + \frac{2p^2}{w_2} - \frac{p^2}{w_1} - \frac{p^2}{w_2} = \frac{p^2}{w_1} + \frac{p^2}{w_2}.$$

Verificación de Hotelling. Como $\sqrt{x_1^*} = p/w_1$ y $\sqrt{x_2^*} = p/w_2$, se tiene $F(\mathbf{x}^*) = 2(\sqrt{x_1^*} + \sqrt{x_2^*}) = \frac{2p}{w_1} + \frac{2p}{w_2}$, y

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi^*}{\partial p} &= \frac{2p}{w_1} + \frac{2p}{w_2} = F(\mathbf{x}^*). \quad \checkmark \\ \frac{\partial\pi^*}{\partial w_1} &= -\frac{p^2}{w_1^2} = -x_1^*, \quad \frac{\partial\pi^*}{\partial w_2} = -\frac{p^2}{w_2^2} = -x_2^*. \quad \checkmark \end{aligned}$$

(b) TMS no creciente.

Paso 1. Derivando $u(x_1, x_2(x_1)) = c$ respecto a x_1 :

$$u_1 + u_2 x_2'(x_1) = 0 \Rightarrow x_2'(x_1) = -u_1/u_2.$$

Paso 2. Por regla de la cadena a lo largo de la curva (con $x_2' = -u_1/u_2$):

$$\frac{du_1}{dx_1} = u_{11} + u_{12}x_2' = u_{11} - \frac{u_{12}u_1}{u_2}, \quad \frac{du_2}{dx_1} = u_{12} + u_{22}x_2' = u_{12} - \frac{u_{22}u_1}{u_2}.$$

Aplicando regla del cociente a $\text{TMS} = u_1/u_2$:

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_2 \frac{du_1}{dx_1} - u_1 \frac{du_2}{dx_1}}{u_2^2} = \frac{1}{u_2^3} (u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2).$$

Paso 3. Desarrollando $\det B$ por la primera fila:

$$\det B = -u_1(u_1u_{22} - u_{12}u_2) + u_2(u_1u_{12} - u_{11}u_2) = -(u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2).$$

Conclusión.

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{-\det B(\mathbf{x})}{u_2^3} \leq 0,$$

pues $\det B(\mathbf{x}) \geq 0$ por cuasiconcavidad y $u_2^3 > 0$. La TMS es no creciente. \square

Pregunta 4. *Función de costos.*

(1) Monotonía y homogeneidad.

Monótona: sea $\mathbf{w}^1 \leq \mathbf{w}^2$ y \mathbf{z}_2^* óptimo a precios \mathbf{w}^2 . Como $Z(q)$ no depende de \mathbf{w} , \mathbf{z}_2^* es factible a precios \mathbf{w}^1 y $\mathbf{z}_2^* \geq 0$:

$$c(\mathbf{w}^1, q) \leq \mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{z}_2^* \leq \mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{z}_2^* = c(\mathbf{w}^2, q).$$

Homogénea de grado 1 en \mathbf{w} : para $\lambda > 0$, $c(\lambda\mathbf{w}, q) = \min_{Z(q)} \lambda\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = \lambda c(\mathbf{w}, q)$ (el escalar sale del mínimo). \square

(2) Recuperación de la tecnología.

Respuesta: $f(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n b_i z_i$ (tecnología lineal, insumos perfectamente sustitutos).

Justificación. Con esa f , el problema de la firma es el LP

$$\min \sum_i w_i z_i \quad \text{s.a.} \quad \sum_i b_i z_i \geq q, \quad \mathbf{z} \geq 0.$$

Reescribiendo z_i en unidades de producto contribuido, $y_i := b_i z_i \geq 0$, entonces $z_i = y_i/b_i$ y el problema es

$$\min \sum_i \frac{w_i}{b_i} y_i \quad \text{s.a.} \quad \sum_i y_i \geq q, \quad \mathbf{y} \geq 0.$$

La solución concentra todo en $i^* \in \arg \min_i \{w_i/b_i\}$: $y_{i^*} = q$ y los demás $y_i = 0$. El costo óptimo es

$$c(\mathbf{w}, q) = \frac{w_{i^*}}{b_{i^*}} \cdot q = q \cdot \min_i \left\{ \frac{w_i}{b_i} \right\}. \quad \checkmark$$

Interpretación. b_i es la productividad marginal (constante) del insumo i . Como los insumos son sustitutos perfectos, la firma usa sólo el insumo con menor costo por unidad de producto w_i/b_i . \square

Pregunta 5. *Demanda del consumidor cuasilineal (Teorema de la Función Implícita).*

(a) De la restricción presupuestaria, $x_3 = M - p_1x_1 - p_2x_2$. Sustituyendo en U , el problema queda *irrestringido* en (x_1, x_2) :

$$\max_{x_1, x_2} v(x_1, x_2) + (M - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Las condiciones de primer orden dan el sistema $\mathbf{G}(x_1, x_2; p_1, p_2) = \mathbf{0}$:

$$G_1 := v_1(x_1, x_2) - p_1 = 0, \quad G_2 := v_2(x_1, x_2) - p_2 = 0.$$

El Jacobiano respecto a las endógenas (x_1, x_2) es la Hessiana de v :

$$J = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}, \quad \det J = v_{11}v_{22} - v_{12}^2 > 0 (\neq 0),$$

positivo por la concavidad estricta de v (esto es además la CSO: Hessiana definida negativa, pues $v_{11} < 0$ y $\det J > 0$). Como $\det J \neq 0$ y $\mathbf{G} \in C^1$, el Teorema de la Función Implícita garantiza $x_1^*(p_1, p_2)$, $x_2^*(p_1, p_2)$ de clase C^1 .

(b) Diferenciando respecto a p_1 (p_2 fijo), con $\partial G_1/\partial p_1 = -1$ y $\partial G_2/\partial p_1 = 0$:

$$J \begin{pmatrix} \partial x_1^*/\partial p_1 \\ \partial x_2^*/\partial p_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial G_1/\partial p_1 \\ \partial G_2/\partial p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por la regla de Cramer:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{1}{\det J} \det \begin{pmatrix} 1 & v_{12} \\ 0 & v_{22} \end{pmatrix} = \frac{v_{22}}{\det J} < 0,$$

pues $v_{22} < 0$ y $\det J > 0$: es la *ley de la demanda* (al subir p_1 , la cantidad demandada del bien 1 baja). Y

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{1}{\det J} \det \begin{pmatrix} v_{11} & 1 \\ v_{12} & 0 \end{pmatrix} = \frac{-v_{12}}{\det J}, \quad \text{sgn} \left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \right) = -\text{sgn}(v_{12}),$$

ya que $\det J > 0$. Así, si $v_{12} > 0$ los bienes son *complementarios* ($\partial x_2^*/\partial p_1 < 0$); si $v_{12} < 0$ son *sustitutos* ($\partial x_2^*/\partial p_1 > 0$); si $v_{12} = 0$, independientes.

Ausencia de efecto renta. La renta M desaparece de las CPO, así que x_1^*, x_2^* no dependen de M : con utilidad cuasilineal el efecto renta sobre (x_1, x_2) es nulo y toda la respuesta a un cambio de precio es efecto sustitución. (En particular se cumple la simetría exacta $\partial x_1^*/\partial p_2 = -v_{12}/\det J = \partial x_2^*/\partial p_1$.)

□

Profesor: Jorge Chávez. Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 19 de mayo del 2026.