

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
Examen Final (tipo A) — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:

- Duración: 160 minutos.
- Puntaje total: **20 puntos** (4 problemas de 5 puntos cada uno).
- Solo se permiten 2 hojas A4 de apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
- Justifique cada paso. La presentación y redacción influirán en la calificación.

Pregunta 1

(5 puntos)

Minimización del gasto con utilidad Stone–Geary.

Un consumidor tiene preferencias representadas por la función de utilidad de Stone–Geary

$$u(x_1, x_2) = \beta_1 \ln(x_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(x_2 - \gamma_2),$$

con parámetros $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$, y niveles de subsistencia $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ (se asume $x_i > \gamma_i$). Los precios son $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg 0$ y el consumidor desea alcanzar un nivel de utilidad $\bar{u}$ al menor gasto posible.

- (a) (1 pt) Plantee el problema de minimización del gasto (EMP) y escriba el lagrangiano asociado. Justifique por qué, en el óptimo, la restricción de utilidad se satisface con igualdad.
- (b) (2 pts) A partir de las condiciones de primer orden, obtenga las demandas hicksianas $h_1(\mathbf{p}, \bar{u})$ y $h_2(\mathbf{p}, \bar{u})$.
- (c) (1 pt) Obtenga la función de gasto $e(\mathbf{p}, \bar{u})$.
- (d) (1 pt) Verifique el lema de Shephard $\partial e / \partial p_1 = h_1$ y, mediante el teorema de la envolvente, muestre que $\partial e / \partial \bar{u} = \lambda$.

Pregunta 2

(5 puntos)

Optimización con restricciones de desigualdad (KKT).

Un planificador dispone de $B = 5$ unidades de un recurso para repartir entre tres proyectos. El beneficio neto de asignar $x_i \geq 0$ unidades al proyecto i es

$$U(x_1, x_2, x_3) = (10x_1 - x_1^2) + (6x_2 - x_2^2) + (2x_3 - x_3^2),$$

sujeto a la restricción de recurso $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ y a la no negatividad $x_i \geq 0$.

- (a) (1.5 pts) Escriba las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) del problema.
- (b) (1 pt) Muestre que la solución obtenida suponiendo un óptimo interior (con la restricción de recurso activa y resuelta por multiplicadores de Lagrange, ignorando la no negatividad) es infactible. Concluya por qué el problema requiere KKT.
- (c) (2.5 pts) Resuelva el problema: encuentre $\mathbf{x}^*$ y todos los multiplicadores asociados, y verifique que se trata del máximo global.

Pregunta 3**(5 puntos)***Propiedades de una relación de preferencias.*

Considere las preferencias $\succsim$ sobre $\mathbb{R}_+^2$ con utilidad

$$u(x_1, x_2) = \min\{\sqrt{x_1}, x_1 + x_2\}.$$

Determine, justificando formalmente, si $\succsim$ satisface cada una de las siguientes propiedades. Si alguna falla, proporcione un contraejemplo explícito.

- (a) (1 pt) Monotonía (fuerte).
- (b) (1 pt) Continuidad.
- (c) (1 pt) Transitividad (y completitud).
- (d) (1 pt) Convexidad.
- (e) (1 pt) Convexidad estricta.

Pregunta 4**(5 puntos)***Competencia entre corporaciones: agresividad de entrada y equilibrio de Nash.*

Dos corporaciones, 1 y 2, deciden simultáneamente su estrategia de entrada a un nuevo mercado, eligiendo entre tres niveles de agresividad a la hora de competir: Conservadora (C), Moderada (M) o Agresiva (A), ordenados de menor a mayor agresividad: $C < M < A$.

Notación. Usamos i para referirnos a una de las corporaciones y j para la otra (su rival), con $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Denotamos por $x_i \in \{1, 2, 3\} \equiv \{C, M, A\}$ el nivel que elige la corporación i (esto es, $C = 1$, $M = 2$, $A = 3$). El pago de la corporación i se compone de tres partes:

- *Ingreso bruto* (depende solo de su propia estrategia): 3 si juega C , 5 si juega M , 8 si juega A .
- *Costo de rivalidad*: si su rival es estrictamente más agresivo ($x_j > x_i$), la corporación i pierde θ por cada nivel de diferencia, esto es $\theta(x_j - x_i)$; si el rival no es más agresivo, este costo es 0.
- *Costo de implementación*: solo la estrategia Agresiva conlleva un costo propio: jugar A cuesta 2θ (a cargo de quien la juega). Jugar C o M no tiene costo de implementación (es 0).

Suponga $\theta \geq 0$. *Ejemplo de casilla*: en el perfil (M, A) —corporación 1 juega M , corporación 2 juega A — la corporación 1 recibe $5 - \theta(3 - 2) = 5 - \theta$ (es superada por un nivel) y la corporación 2 recibe $8 - 2\theta$ (ingreso 8 menos su costo de implementación 2θ ; sin costo de rivalidad, por ser la más agresiva); la casilla es $(5 - \theta, 8 - 2\theta)$.

- (a) (2 pts) Construya la bimatriz de pagos 3×3 del juego en función de θ .
- (b) (1 pt) Para el caso $\theta = 0$, encuentre el equilibrio de Nash e interprete el resultado.
- (c) (2 pts) Encuentre el valor crítico θ^* tal que el perfil (A, A) es un equilibrio de Nash si y solo si $\theta \leq \theta^*$.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 7 de julio del 2026.