

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Examen Final (tipo A) — Primer semestre 2026

Indicaciones generales:

- Duración: 160 minutos.
 - Puntaje total: **20 puntos** (4 problemas de 5 puntos cada uno).
 - Solo se permiten 2 hojas A4 de apuntes de clase físicos. No se permite ningún equipo electrónico.
 - Justifique cada paso. La presentación y redacción influirán en la calificación.
-

Pregunta 1 (5 puntos)

Minimización del gasto con utilidad Stone–Geary.

Un consumidor tiene preferencias representadas por la función de utilidad de Stone–Geary

$$u(x_1, x_2) = \beta_1 \ln(x_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(x_2 - \gamma_2),$$

con parámetros $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$, y niveles de subsistencia $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ (se asume $x_i > \gamma_i$). Los precios son $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg 0$ y el consumidor desea alcanzar un nivel de utilidad $\bar{u}$ al menor gasto posible.

- (a) (1 pt) Plantee el problema de minimización del gasto (EMP) y escriba el lagrangiano asociado. Justifique por qué, en el óptimo, la restricción de utilidad se satisface con igualdad.
- (b) (2 pts) A partir de las condiciones de primer orden, obtenga las demandas hicksianas $h_1(\mathbf{p}, \bar{u})$ y $h_2(\mathbf{p}, \bar{u})$.
- (c) (1 pt) Obtenga la función de gasto $e(\mathbf{p}, \bar{u})$.
- (d) (1 pt) Verifique el lema de Shephard $\partial e / \partial p_1 = h_1$ y, mediante el teorema de la envolvente, muestre que $\partial e / \partial \bar{u} = \lambda$.

Pregunta 2 (5 puntos)

Optimización con restricciones de desigualdad (KKT).

Un planificador dispone de $B = 5$ unidades de un recurso para repartir entre tres proyectos. El beneficio neto de asignar $x_i \geq 0$ unidades al proyecto i es

$$U(x_1, x_2, x_3) = (10x_1 - x_1^2) + (6x_2 - x_2^2) + (2x_3 - x_3^2),$$

sujeto a la restricción de recurso $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ y a la no negatividad $x_i \geq 0$.

- (a) (1.5 pts) Escriba las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) del problema.
- (b) (1 pt) Muestre que la solución obtenida suponiendo un óptimo interior (con la restricción de recurso activa y resuelta por multiplicadores de Lagrange, ignorando la no negatividad) es infactible. Concluya por qué el problema requiere KKT.
- (c) (2.5 pts) Resuelva el problema: encuentre $\mathbf{x}^*$ y todos los multiplicadores asociados, y verifique que se trata del máximo global.

Pregunta 3 (5 puntos)

Propiedades de una relación de preferencias.

Considere las preferencias $\succsim$ sobre $\mathbb{R}_+^2$ con utilidad

$$u(x_1, x_2) = \min\{\sqrt{x_1}, x_1 + x_2\}.$$

Determine, justificando formalmente, si $\succsim$ satisface cada una de las siguientes propiedades. Si alguna falla, proporcione un contraejemplo explícito.

- (a) (1 pt) Monotonía (fuerte).
- (b) (1 pt) Continuidad.
- (c) (1 pt) Transitividad (y completitud).

- (d) (1 pt) Convexidad.
- (e) (1 pt) Convexidad estricta.

Pregunta 4 (5 puntos)

Competencia entre corporaciones: agresividad de entrada y equilibrio de Nash.

Dos corporaciones, 1 y 2, deciden simultáneamente su estrategia de entrada a un nuevo mercado, eligiendo entre tres niveles de agresividad al competir: Conservadora (C), Moderada (M) o Agresiva (A), ordenados de menor a mayor agresividad: $C < M < A$.

Notación. Usamos i para referirnos a una de las corporaciones y j para la otra (su rival), con $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Denotamos por $x_i \in \{1, 2, 3\} \equiv \{C, M, A\}$ el nivel que elige la corporación i (esto es, $C = 1$, $M = 2$, $A = 3$). El pago de la corporación i se compone de tres partes:

- *Ingreso bruto* (depende solo de su propia estrategia): 3 si juega C, 5 si juega M, 8 si juega A.
- *Costo de rivalidad*: si su rival es estrictamente más agresivo ($x_j > x_i$), la corporación i pierde θ por cada nivel de diferencia, esto es $\theta(x_j - x_i)$; si el rival no es más agresivo, este costo es 0.
- *Costo de implementación*: solo la estrategia Agresiva conlleva un costo propio: jugar A cuesta 2θ (a cargo de quien la juega). Jugar C o M no tiene costo de implementación (es 0).

Suponga $\theta \geq 0$. Ejemplo de casilla: en el perfil (M, A) —corporación 1 juega M, corporación 2 juega A— la corporación 1 recibe $5 - \theta(3 - 2) = 5 - \theta$ (es superada por un nivel) y la corporación 2 recibe $8 - 2\theta$ (ingreso 8 menos su costo de implementación 2θ ; sin costo de rivalidad, por ser la más agresiva); la casilla es $(5 - \theta, 8 - 2\theta)$.

- (a) (2 pts) Construya la bimatriz de pagos 3×3 del juego en función de θ .
- (b) (1 pt) Para el caso $\theta = 0$, encuentre el equilibrio de Nash e interprete el resultado.
- (c) (2 pts) Encuentre el valor crítico θ^* tal que el perfil (A, A) es un equilibrio de Nash si y solo si $\theta \leq \theta^*$.

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 7 de julio del 2026.

Pregunta 1

(a) Planteamiento del EMP.

$$\min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad \beta_1 \ln(x_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(x_2 - \gamma_2) \geq \bar{u}, \quad x_i > \gamma_i.$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda [\beta_1 \ln(x_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(x_2 - \gamma_2) - \bar{u}].$$

Como u es estrictamente creciente en cada x_i (más consumo de cualquier bien aumenta la utilidad), si la restricción fuera no vinculante ($u(\mathbf{x}) > \bar{u}$) el consumidor podría reducir levemente algún x_i , disminuyendo el gasto sin violar $u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}$. Esto contradice que $\mathbf{x}$ minimice el gasto. Luego, en el óptimo, $u(\mathbf{x}^*) = \bar{u}$.

(b) Demandas hicksianas. Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \frac{\beta_1}{x_1 - \gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \frac{\beta_2}{x_2 - \gamma_2} = 0.$$

Despejando, con $y_i := x_i - \gamma_i$:

$$y_1 = \frac{\lambda \beta_1}{p_1}, \quad y_2 = \frac{\lambda \beta_2}{p_2}.$$

Sustituyendo en la restricción $\beta_1 \ln y_1 + \beta_2 \ln y_2 = \bar{u}$ y usando $\beta_1 + \beta_2 = 1$:

$$\ln \lambda = \bar{u} + \beta_1 \ln\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right) + \beta_2 \ln\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right) \implies \lambda = e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}.$$

Por lo tanto:

$$h_1(\mathbf{p}, \bar{u}) = \gamma_1 + \frac{\beta_1}{p_1} e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}, \quad h_2(\mathbf{p}, \bar{u}) = \gamma_2 + \frac{\beta_2}{p_2} e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}.$$

(c) Función de gasto.

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = p_1 h_1 + p_2 h_2 = p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2 + (\beta_1 + \beta_2) e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}.$$

Como $\beta_1 + \beta_2 = 1$:

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2 + e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}.$$

El primer término es el *gasto de subsistencia* (costo de alcanzar los niveles mínimos γ_1, γ_2); el segundo es el costo del “excedente” de utilidad por encima de la subsistencia.

(d) Verificaciones. *Lema de Shephard:*

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \gamma_1 + e^{\bar{u}} \beta_1 \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1-1} \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2} = \gamma_1 + e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1-1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}.$$

Y de la parte (b): $h_1 = \gamma_1 + \frac{\beta_1}{p_1} e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}$. Como $\frac{\beta_1}{p_1} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} = \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1-1}$, se obtiene $\partial e / \partial p_1 = h_1$.
✓

Teorema de la envolvente: derivando $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ respecto de $\bar{u}$ (tratando x_1^*, x_2^* como funciones óptimas, la envolvente descarta sus efectos indirectos y solo queda el efecto directo de $\bar{u}$ sobre el lagrangiano, que es $-\lambda \cdot (-1) = \lambda$):

$$\frac{\partial e}{\partial \bar{u}} = e^{\bar{u}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2} = \lambda. \quad \checkmark$$

(Ambas identidades fueron verificadas simbólicamente y numéricamente en Python/SymPy.)

Pregunta 2

(a) **Condiciones KKT.** Escribimos el problema como $\max U(\mathbf{x})$ sujeto a $h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leq 0$ y $-x_i \leq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Con multiplicadores $\mu \geq 0$ (recurso) y $\nu_i \geq 0$ (no negatividad), el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = U(\mathbf{x}) - \mu(x_1 + x_2 + x_3 - 5) + \sum_{i=1}^3 \nu_i x_i.$$

Las condiciones KKT son:

- *Estacionariedad:* $10 - 2x_1 - \mu + \nu_1 = 0$, $6 - 2x_2 - \mu + \nu_2 = 0$, $2 - 2x_3 - \mu + \nu_3 = 0$.
- *Factibilidad primal:* $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$, $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$).
- *No negatividad de multiplicadores:* $\mu \geq 0$, $\nu_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$).
- *Holgura complementaria:* $\mu(5 - x_1 - x_2 - x_3) = 0$, $\nu_i x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

(b) **Óptimo interior es infactible.** Ignorando $x_i \geq 0$ (i.e., $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$) y suponiendo el recurso activo ($x_1 + x_2 + x_3 = 5$), las condiciones de Lagrange dan $10 - 2x_1 = 6 - 2x_2 = 2 - 2x_3 = \mu$, de donde $x_1 = \frac{10-\mu}{2}$, $x_2 = \frac{6-\mu}{2}$, $x_3 = \frac{2-\mu}{2}$. Sumando e igualando a 5:

$$\frac{18-3\mu}{2} = 5 \implies \mu = \frac{8}{3} \implies x_1 = \frac{11}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Como $x_3 = -1/3 < 0$, esta solución viola $x_3 \geq 0$: es **infactible**. El multiplicador ν_3 asociado a $x_3 \geq 0$ no puede ignorarse; se requiere resolver el sistema completo de KKT (con la posibilidad de que $x_3 = 0$, es decir, una solución de esquina).

(c) **Solución vía KKT.** Probamos la conjetura $x_3 = 0$ (restricción $x_3 \geq 0$ activa, $\nu_3 > 0$), $x_1, x_2 > 0$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0$), y recurso activo ($\mu > 0$, $x_1 + x_2 = 5$).

De la estacionariedad: $x_1 = \frac{10-\mu}{2}$, $x_2 = \frac{6-\mu}{2}$. Sumando:

$$x_1 + x_2 = \frac{16-2\mu}{2} = 5 \implies \mu = 3.$$

Entonces:

$$\boxed{x_1^* = \frac{7}{2}, \quad x_2^* = \frac{3}{2}, \quad x_3^* = 0.}$$

Multiplicadores: $\mu = 3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, y de la estacionariedad de x_3 : $\nu_3 = \mu - 2 = 1$.

Verificación de factibilidad y signos: $x_1^*, x_2^* > 0$, $x_3^* = 0 \geq 0$, $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 5 \leq 5$ (activa); $\mu = 3 \geq 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0 \geq 0$, $\nu_3 = 1 \geq 0$. ✓

Optimalidad global: el Hessiano de U es $\nabla^2 U = \text{diag}(-2, -2, -2)$, que es definida negativa para todo $\mathbf{x}$; luego U es **cóncava** en todo $\mathbb{R}^3$, y el conjunto factible (intersección de semiespacios) es convexo. Bajo estas condiciones, KKT es también **suficiente** para optimalidad global, no solo necesaria. Por lo tanto $\mathbf{x}^*$ es el máximo global, con

$$U(\mathbf{x}^*) = \left(10 \cdot \frac{7}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) + \left(6 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 0 = \frac{59}{2} = 29.5.$$

(Verificado numéricamente comparando contra 20,000 puntos aleatorios del conjunto factible: ninguno supera $U(\mathbf{x}^*) = 29.5$.)

Pregunta 3

(a) **Monotonía (fuerte): NO se cumple.** Se requeriría $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ siempre que $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Contraejemplo: $\mathbf{x} = (1, 5)$, $\mathbf{y} = (1, 0)$; claramente $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Sin embargo:

$$u(1, 5) = \min\{1, 6\} = 1, \quad u(1, 0) = \min\{1, 1\} = 1.$$

Aumentar x_2 manteniendo $x_1 = 1$ fijo no cambia u una vez que $x_1 + x_2 \geq \sqrt{x_1}$: el mínimo queda “atascado” en $\sqrt{x_1}$. Falla la monotonía fuerte.

(b) **Continuidad: SÍ se cumple.** $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1}$ y $g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ son ambas continuas en $\mathbb{R}_+^2$ (polinomio y raíz cuadrada de una función continua). El mínimo de dos funciones continuas es continuo: $u(\mathbf{x}) = \min\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}$ es continua en $\mathbb{R}_+^2$. Como u representa a $\lesssim$ y es continua, los conjuntos de contorno superior e inferior son cerrados, es decir, $\lesssim$ es continua.

(c) **Transitividad y completitud: SÍ se cumplen.** Toda relación de preferencias representable por una función de utilidad real $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (vía $\mathbf{x} \lesssim \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$) hereda automáticamente la completitud

y transitividad del orden usual $\geq$ en $\mathbb{R}$: dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, los números $u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ siempre son comparables (completitud), y si $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{z})$ entonces $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z})$ (transitividad). Esto no depende de la forma particular de u .

(d) Convexidad: SÍ se cumple. Basta ver que u es *cóncava*, lo cual implica cuasiconcavidad y, por tanto, que los conjuntos de contorno superior $\{\mathbf{x} : u(\mathbf{x}) \geq c\}$ son convexos. $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1}$ es cóncava (raíz cuadrada, cóncava en x_1 y constante en x_2 : su Hessiano es semidefinido negativo). $g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ es lineal, luego cóncava. El mínimo de funciones cóncavas es cóncavo, así que $u = \min\{f, g\}$ es cóncava $\Rightarrow$ cuasicóncava $\Rightarrow \succsim$ es convexa.

(e) Convexidad estricta: NO se cumple. Fijemos $c = 1/4$. En la región donde g es el mínimo activo ($x_1 + x_2 \leq \sqrt{x_1}$), el conjunto de nivel $u = c$ contiene el segmento *recto* $\{x_1 + x_2 = c : c^2 \leq x_1 \leq c\}$. Tomamos dos puntos distintos de este segmento con $c = 1/4$:

$$\mathbf{p} = \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right), \quad \mathbf{q} = \left(\frac{1}{4}, 0\right).$$

Verificación: $u(\mathbf{p}) = \min\{\sqrt{1/16}, 1/16 + 3/16\} = \min\{1/4, 1/4\} = 1/4$; $u(\mathbf{q}) = \min\{\sqrt{1/4}, 1/4\} = \min\{1/2, 1/4\} = 1/4$. El punto medio es $\mathbf{m} = \left(\frac{5}{32}, \frac{3}{32}\right)$, y

$$u(\mathbf{m}) = \min\left\{\sqrt{\frac{5}{32}}, \frac{5}{32} + \frac{3}{32}\right\} = \min\{0.395\dots, 0.25\} = \frac{1}{4}.$$

Se tiene $u(\mathbf{m}) = \frac{1}{4} = \min\{u(\mathbf{p}), u(\mathbf{q})\}$, en vez de $u(\mathbf{m}) > \frac{1}{4}$ como exigiría la convexidad estricta. El tramo lineal de u (donde domina g) rompe la convexidad estricta.

Pregunta 4

(a) Bimatrix de pagos. Para el perfil (x_1, x_2) , el pago de la corporación i es

$$\pi_i(x_i, x_j) = \underbrace{I(x_i)}_{\text{ingreso}} - \underbrace{\theta \max\{x_j - x_i, 0\}}_{\text{rivalidad}} - \underbrace{2\theta \cdot \mathbf{1}\{x_i = A\}}_{\text{implementación}}, \quad I(C) = 3, I(M) = 5, I(A) = 8.$$

Calculando las 9 casillas (fila = corporación 1, columna = corporación 2):

	C	M	A
C	$(3, 3)$	$(3 - \theta, 5)$	$(3 - 2\theta, 8 - 2\theta)$
M	$(5, 3 - \theta)$	$(5, 5)$	$(5 - \theta, 8 - 2\theta)$
A	$(8 - 2\theta, 3 - 2\theta)$	$(8 - 2\theta, 5 - \theta)$	$(8 - 2\theta, 8 - 2\theta)$

(Consistente con el ejemplo del enunciado: la casilla (M, A) da $(5 - \theta, 8 - 2\theta)$.)

(b) Equilibrio de Nash para $\theta = 0$. Con $\theta = 0$ no hay costos de rivalidad ni de implementación: el pago de cada corporación se reduce a su ingreso bruto, $I(C) = 3 < I(M) = 5 < I(A) = 8$, **independientemente** de lo que juegue el rival. Jugar A es entonces una **estrategia estrictamente dominante** para ambas corporaciones (domina a M y a C en cada columna/fila). Por lo tanto:

El único equilibrio de Nash es (A, A) , con pagos $(8, 8)$.

Interpretación: sin costos de rivalidad, ser agresivo nunca perjudica y siempre genera mayor ingreso, así que ambas corporaciones escalan al máximo nivel de agresividad. A diferencia de un dilema del prisionero típico, aquí (A, A) no solo es el equilibrio sino también el resultado *eficiente* (el de mayor pago posible para ambas), pues la agresividad es gratuita cuando $\theta = 0$.

(c) Umbral θ^* para que (A, A) sea equilibrio de Nash. Por simetría basta analizar las desviaciones de la corporación 1 dado que la corporación 2 juega A . Pago en el perfil (A, A) : $\pi_1(A, A) = 8 - 2\theta$.

Desviación a M : $\pi_1(M, A) = 5 - \theta$ (rival más agresivo por 1 nivel). *Desviación a C :* $\pi_1(C, A) = 3 - 2\theta$ (rival más agresivo por 2 niveles).

Para que (A, A) sea Nash, ninguna desviación debe ser rentable:

$$8 - 2\theta \geq 5 - \theta \iff \theta \leq 3, \quad 8 - 2\theta \geq 3 - 2\theta \iff 8 \geq 3 \text{ (siempre cierto)}.$$

La condición que efectivamente restringe es la primera. Por lo tanto:

$\theta^* = 3.$

Interpretación económica (costo de la agresión relativo a su ventaja de ingreso): $\theta^* = 3$ coincide exactamente con la ganancia de ingreso al pasar de M a A, $I(A) - I(M) = 8 - 5 = 3$. Cuando la corporación 1 se desvía de A a M frente a un rival agresivo, deja de pagar el costo de implementación 2θ pero pasa a pagar un costo de rivalidad de θ (queda un nivel por detrás), un ahorro neto de θ ; a la vez, resigna 3 unidades de ingreso. La desviación deja de convenir exactamente cuando el ahorro en costos (θ) iguala la pérdida de ingreso (3), es decir, cuando $\theta = \theta^* = 3$. Para $\theta \leq 3$, seguir siendo agresivo compensa el costo; para $\theta > 3$, la rivalidad se vuelve demasiado cara y (A, A) deja de ser equilibrio.

Profesor del curso: Jorge Chávez.
Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 7 de julio del 2026.