PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Solucionario
PD3
Primer semestre 2025

1 Funciones convexas y cóncavas

1) Considere el cambio de variable

$$u = \frac{t}{x}.$$

Entonces,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(ux)du.$$

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{++}$:

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \int_0^1 f(u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2))du.$$

Como f es convexa:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2))du &\leq \int_0^1 [\alpha f(ux_1) + (1-\alpha)f(x_2)]du \\ &\leq \alpha \int_0^1 f(ux_1)du + (1-\alpha)\int_0^1 f(ux_2)du.\end{aligned}$$

O sea

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2).$$

Como $g(s) = e^s$ es convexa, $g \circ F$ también lo es. Esto concluye la prueba.

Alternativamente,

$$F(x) = \int_0^1 f(xu)du$$

es convexa aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$F''(x) = \int_0^1 u^2 f''(xu)du \geq 0.$$

2) Pensemos en lo siguiente, queremos $(fg)'' = (f'g + g'f)' = f''g + 2f'g' + g''f \geq 0$. Basta entonces que f y g sean crecientes y positivas.

3) Basta que $A \geq 0$, cuando es simétrica, pues $Hf = 2A$. No importan $\mathbf{b}$ y c.

4) Notar que $u(\mathbf{x})$ cuasi cóncava es probar

$$X = \left\{ \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq c \right\}$$

es convexo para todo $c \in \mathbb{R}$. En particular, trabajamos con $c > 0$ pues $x_i > 0$. Ahora bien,

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i \geq \ln c \right\}$$

es convexo pues $\ln(\cdot)$ es cóncava (se prueba por definición), los $\alpha_i \geq 0$ y la suma de cóncavas es cóncava.

5) La cuasiconcavidad de u, junto con el hecho que es C^2 asegura que

$$(**) \quad -u_{x_1}^2 u_{x_2x_2} + 2u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2} - u_{x_1x_1}u_{x_2}^2 > 0.$$

Esto se desprende del criterio de los determinantes Hessianos ampliados. Luego, por la regla de la cadena (considerando $x_2 = x_2(x_1)$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}\right) &= \frac{\frac{du_{x_1}}{dx_1}u_{x_2} - \frac{du_{x_2}}{dx_1}u_{x_1}}{u_{x_2}^2} \\
&= \frac{\left(u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_{x_2} - \left(u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2}^2\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_{x_1}}{u_{x_2}^2}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$ y las utilidades marginales son positivas,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}\right) &= \frac{1}{u_{x_2}^2}\left[u_{x_2}u_{x_1x_1} - \frac{u_{x_2}u_{x_1}u_{x_1x_2}}{u_{x_2}} - \frac{u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2}}{u_{x_2}} + \frac{u_{x_2x_2}u_{x_1}}{u_{x_2}}\right] \\
&= \frac{u_{x_1}^2 u_{x_2x_2} - 2u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2} + u_{x_1x_1}u_{x_2}^2}{u_{x_2}^3} \\
&= -\frac{**}{u_{x_2}^3} < 0.
\end{aligned}$$

La Tasa Marginal de Sustitución (TMS) decreciente implica que a medida que se intercambia más de un bien por otro, el consumidor está dispuesto a renunciar a menos del primer bien para obtener una unidad adicional del segundo. Esto refleja la ley de la utilidad marginal decreciente: el valor adicional que el consumidor asigna a una unidad adicional de un bien disminuye conforme aumenta su cantidad consumida. La respuesta es afirmativa.

6) Sean $u_i = e^{x_i}, v_i = e^{y_i}$ y sea $\theta \in [0, 1]$. Entonces,

$$f(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) = \log\left(\sum_{i=1}^n e^{\theta x_i + (1-\theta)y_i}\right) = \log\left(\sum_{i=1}^n u_i^\theta v_i^{(1-\theta)}\right)$$

La desigualdad de Hölder establece que:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aplicando esta desigualdad,

$$f(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) = \log\left(\sum_{i=1}^n u_i^\theta v_i^{(1-\theta)}\right) \leq \log\left[\left(\sum_{i=1}^n (u_i^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right)^\theta \left(\sum_{i=1}^n (v_i^{1-\theta})^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta}\right],$$

lo que se reduce, por la linealidad del logaritmo, a:

$$\theta \log\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) + (1-\theta)\log\left(\sum_{i=1}^n v_i\right).$$

7) Se busca minimizar el gasto en el que incurre un consumidor dado que las canastas de consumo de entre las cuales se escoge, producen un nivel de utilidad mayor o igual a $\overline{u}$. Si este parámetro aumenta, asumiendo u creciente, el gasto aumenta.

Respecto a la concavidad, simplemente:

$$\begin{aligned}
e(\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2, \overline{u}) &= \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} (\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2)\cdot \mathbf{x} \\
&= \lambda \mathbf{p}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\mathbf{p}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\
&\geq \lambda \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} + (1-\lambda) \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x} \\
&= \lambda e(\mathbf{p}_1, \overline{u}) + (1-\lambda) e(\mathbf{p}_2, \overline{u}).
\end{aligned}$$

Acá $\tilde{\mathbf{x}}$ es el que resuelve $\min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} (\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2)\cdot \mathbf{x}$.

Para el caso $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, y precios igual a 1, la solución es $(0, 5/3)$. Sucede que el bien 2 le genera estrictamente siempre más utilidad. Como los precios son iguales, es mejor concentrar todo en x_2.

Finalmente, la solución es $x_i^* = 0$ para $i = 1, ..., n-1$ y $x_n^* = \overline{u}$; le es más barato consumir solo de x_n y alcanza el mismo nivel de utilidad. El gasto incurrido es $p_n \overline{u}$.

2 Optimización en $\mathbb{R}^n$

1) El mínimo se alcanza en $(x_1, x_2) = (a, b)$ y el valor mínimo es c. Ahora bien, la función no tiene puntos máximos, es coercitiva de hecho.

2) El problema queda re-escrito

$$\max_{x_1 \geq 0} pAx_1^{\alpha} k^{\beta} - kw_2 - w_1 x_1.$$

Como $\alpha \in (0,1)$, no es óptimo que $x_1 = 0$. Así, la solución es interior. Aplicando CPO:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= \left[\frac{w_1}{k^{\beta} pA\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= \left(\frac{\alpha A p}{w_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\
q^* &= A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha p}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\pi(p, w_1, w_2, k, \alpha, \beta, A) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) (\alpha A p)^{\frac{1}{1-\alpha}} w_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

3) El problema de maximización del beneficio es

$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^{\rho}\right] - \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

Las CPO de primer orden proveen

$$\alpha_i \rho x_i^{\rho-1} = w_i \implies x_i^* = \left[\frac{w_i}{\alpha_i \rho}\right]^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Se trata de un máximo pues f es estrictamente cóncava: suma de estrictamente cóncavas, o verificar que la Hessiana es definida positiva. Finalmente,

$$\pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \rho) = \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\frac{\rho}{w_i}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} - w_i^{\frac{1-2\rho}{1-\rho}} (\alpha_i \rho)^{\frac{1}{1-\rho}}\right].$$

Ejercicio: Analice la cuasiconcavidad o cuasiconvexidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1x_2+x_3}$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1x_2 + x_3)$ en $\mathbb{R}^3_{++}$.

Para analizar la cuasiconcavidad o cuasiconvexidad de estas funciones, recordemos los siguiente conceptos.

Definición 1. Los **determinantes hessianos ampliados** de una función $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(S)$, son los determinantes

$$M_r(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_r(\boldsymbol{x}) \\ f_1(\boldsymbol{x}) & f_{11}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{1r}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r(\boldsymbol{x}) & f_{r1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{rr}(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}.$$

Teorema 2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, abierto y no vacío y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Entonces:*

1. *Si f es cuasiconvexa, entonces $M_r(\boldsymbol{x}) \leq 0$ para todo $r = 1, \ldots, n$ y todo $\boldsymbol{x} \in S$.*
2. *Si $M_r(\boldsymbol{x}) < 0$ para todo $r = 1, \ldots, n$ y todo $\boldsymbol{x} \in S$, entonces f es estrictamente cuasiconvexa.*
3. *Si f es cuasicóncava entonces $(-1)^r M_r(\boldsymbol{x}) \geq 0$ para todo $r = 1, \ldots, n$ y todo $\boldsymbol{x} \in S$.*
4. *Si $(-1)^r M_r(\boldsymbol{x}) > 0$ para todo $r = 1, \ldots, n$ y todo $\boldsymbol{x} \in S$, entonces f es estrictamente cuasicóncava.*

a) Este teorema puede ser aplicado pues la función $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ es ciertamente[1] clase C^2 y tanto $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}^3_{++}$ son conjuntos convexos. Luego, calculamos $M_r(\boldsymbol{x})$ para φ, $r = 1, ..., n = 3$

$$M_1(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} = -x_2^2$$

$$M_2(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x_1x_2$$

$$M_3(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Luego, ciertamente $M_3 > 0$ por lo que, por el Teorema (2), la función no puede ser cuasiconvexa o estrictamente cuasiconvexa. Luego $(-1)^3 M_3 = -1 < 0$, por lo que, nuevamente por el Teorema (2), la función no puede ser cuasicóncava o estrictamente cuasicóncava. Note que esto es independiente de S pues M_3 no depende de $\boldsymbol{x}$. Para concluir el análisis en relación a las funciones $f(x_1, x_2, x_3) = e^{\varphi(\boldsymbol{x})}$ y $f(x_1, x_2, x_3) = \ln^{\varphi(\boldsymbol{x})}$, requerimos del siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un conjunto convexo no vacío y sea $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente tal que $f(S) \subset A$.*

- *Si f es cuasiconvexa, entonces $g \circ f$ es cuasiconvexa.*
- *Si f es cuasicóncava, entonces $g \circ f$ es cuasicóncava.*

a) En relación al Teorema (3), definiendo $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1x_2+x_3}$ y $g(\cdot) \triangleq \ln(\cdot)$, al ser $\ln(\cdot)$ una función creciente y $f(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^+$, podemos aplicarlo. Si $e^{x_1x_2+x_3}$ fuese cuasiconvexa (cuasicóncava), $x_1x_2 + x_3$ sería cuasiconvexa (cuasicóncava). No obstante, esto es falso. Por ende, $e^{x_1x_2+x_3}$ no es ni cuasiconvexa ni cuasicóncava.

[1] Por aritmética y composición de funciones C^∞

b) Análogamente, tomando esta vez $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 x_2 + x_3)$, y $g(\cdot) \triangleq e^{(\cdot)}$, al ser $e^{(\cdot)}$ una función creciente y $\ln(\mathbb{R}^3_{++}) \subseteq \mathbb{R}$, es posible aplicar el Teorema (3). Si $\ln(x_1 x_2 + x_3)$ fuese cuasiconvexa (cuasicóncava), $x_1 x_2 + x_3$ sería cuasiconvexa (cuasicóncava). No obstante, esto es falso. Por ende, $\ln(x_1 x_2 + x_3)$ no es ni cuasiconvexa ni cuasicóncava.

PC3: puntos importantes

1. Probar que funciones son convexas o cóncavas por definición.
2. Probar que funciones son cuasiconvexas o cuasicóncavas usando alguna de las definiciones equivalentes.
3. Problemas de maximización y minimización sobre $\mathbb{R}^n$.
4. Aplicaciones de lo estudiado:
   - Problema de maximización de la utilidad.
   - Problema de maximización del beneficio.
5. Referencias adicionales: Mas-Colell et al. (1995) capítulos 3 y 5.