PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Segunda práctica (tipo a)
Primer semestre 2025

Indicaciones generales:

- Duración: 100 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase físicos.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (4 puntos)

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule sus valores propios y analice si la matriz es diagonalizable.

Solución: los valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$ y los vectores propios asociados, $v_1 = (-3, -1, 1)$ y $v_2 = (-1, -1, 1)$. Por ende, la matriz no es diagonalizable.

Pregunta 2 (4 puntos)

Modelo de Leontief. Considere tres sectores productivos: el sector primario agro-exportador, el sector industrial y el sector de servicios. Suponga que, en términos de proporciones, el sector primario requiere de 0.4 de su propio sector, 0.4 del sector industrial y 0.1 del sector de servicios. Por otro lado, el sector industrial requiere de 0.2 del sector agro-exportador, 0.2 de su propio sector y del sector servicios 0.3. Finalmente, el sector servicios requiere 0.2 del sector agro-exportador, 0.1 del sector industrial y 0.3 de su propio sector. Además, se sabe que la demanda externa es $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 200 & 300 & 400 \end{bmatrix}$. Encuentre la oferta óptima (cantidad producida) por cada sector en el equilibrio (redondee a las centésimas).

Solución: El modelo de insumo-producto puede representarse mediante la matriz de coeficientes técnicos A y la demanda externa $\mathbf{d}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

- El sector **primario** provee de alimentos a los demás sectores y a sí mismo.
- El sector **industrial** provee maquinaria, desde tractores hasta computadoras, a los demás sectores y a sí mismo.
- El sector **servicios** provee, por ejemplo, servicios legales, consultorías, etc., a los demás sectores y a sí mismo.

Para encontrar la oferta total óptima $\mathbf{x}$, calculamos:

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d} \simeq \begin{bmatrix} 1081.0.81 \\ 1063.63 \\ 1181.81 \end{bmatrix}.$$

Pregunta 3 (6 puntos)

- Determine si $\bigcap_{k=1}^{\infty}[0, 1/k]$ es un conjunto cerrado.
- Sea A un conjunto abierto y B un conjunto cualquiera. Pruebe que $A - B = \{a - b : \ a \in A, b \in B\}$ es un conjunto abierto.
- En teoría microeconómica, el simplex

$$\Delta = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

es un conjunto que aparece con frecuencia (equilibrio general, loterías, teoría de juegos etc.).

  a) Grafique Δ para $n = 2$ y $n = 3$.

  b) Demuestre que Δ es un conjunto compacto para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solución: $\bigcap_{k=1}^{\infty}[0, 1/k] = \{0\}$ el cual es un conjunto cerrado. Además, es la intersección arbitraria de cerrados. Respecto a $A - B = \bigcup_{b \in B} A - \{b\}$, es abierto pues es la unión arbitraria de abiertos ($A - b$ es trivialmente abierto). Finalmente, $\Delta \subset B(\mathbf{p}, I)$ para $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ e $I = 1$. Como el conjunto Walrasiano, es acotado pues está incluido en $B_{||\cdot||_\infty}(2I/p_{\min})$, Δ también. Luego, Δ es la intersección de $\mathbb{R}_+^n$ con $f^{-1}(1)$, con $f(\mathbf{x}) = x_1 + \cdots + x_n$ (pre-imagen de un cerrado por una función continua es cerrado).

Pregunta 4 (6 puntos)

- Pruebe que $||A||_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$ define una norma sobre $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, y que

$$\sqrt{\rho(A)} \leq ||A||_F \leq \sqrt{n}\sqrt{\rho(A^T A)}, \text{ donde } : \ \rho(A) = \max_{1\leq i\leq n}\{|\lambda_i| : \ \lambda_i \text{ valor propio de } A\}.$$

- Pruebe que si A es simétrica y sus valores propios son todos estrictamente positivos, entonces A es definida positiva. **(1.5 puntos).**
- Pruebe que $||(x_1, x_2)|| = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}$ es una norma para $p = 2$. **(1.5 puntos).**

Solución: a) Para probar que $||A||_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$ define una norma sobre $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, verificamos las tres propiedades de norma.

- Primero, $||A||_F \geq 0$ y $||A||_F = 0$ si y solo si $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$, lo cual ocurre únicamente cuando $A = 0$, ya que $A^T A$ es semidefinida positiva y su traza es la suma de los cuadrados de todas las entradas de A.
- Segundo, la homogeneidad se cumple pues para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $||\alpha A||_F = \sqrt{\operatorname{tr}((\alpha A)^T(\alpha A))} = \sqrt{\alpha^2 \operatorname{tr}(A^T A)} = |\alpha| \cdot ||A||_F$.
- Tercero, la desigualdad triangular se deduce observando que $||A + B||_F^2 = \operatorname{tr}((A + B)^T(A + B)) = \operatorname{tr}(A^T A) + \operatorname{tr}(B^T B) + \operatorname{tr}(A^T B + B^T A)$, y aplicando Cauchy-Schwarz sobre los vectores formados por las entradas de A y B, obtenemos $|\operatorname{tr}(A^T B)| \leq ||A||_F ||B||_F$, y de forma análoga para $\operatorname{tr}(B^T A)$, por lo que $||A + B||_F^2 \leq (||A||_F + ||B||_F)^2$, implicando $||A + B||_F \leq ||A||_F + ||B||_F$.
- Alternativamente se puede probar que la traza induce un producto interno.

Para las desigualdades

$$\sqrt{\rho(A)} \leq ||A||_F \leq \sqrt{n}\sqrt{\rho(A^TA)},$$

notamos que $\rho(A)$ denota el radio espectral de A, es decir, el máximo valor propio en módulo. Como A^TA es simétrica y semidefinida positiva, todos sus valores propios son reales y no negativos, y $||A||_F^2 = \operatorname{tr}(A^TA) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ donde λ_i son los valores propios de A^TA. Como $\operatorname{tr}(A^TA) = \sum_i \lambda_i \leq n \cdot \lambda_{\max}$, se deduce que $||A||_F^2 \leq n \cdot \rho(A^TA)$ y por tanto $||A||_F \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\rho(A^TA)}$. Ahora bien, para la otra desigualdad, se usa que $\rho(A) \leq \sum_i ||\sigma_i(A^TA)|^2 = ||A||_F$. De hecho, la desigualdad también vale para $\sqrt{\rho(A^TA)}$ y es más directo. Para más detalles, consultar SVD (bastante usado en otros contextos).[1]

- Si A es simétrica con valores propios estrictamente positivos, entonces es diagonalizable como $A = PDP^{-1}$, donde D es diagonal con los autovalores positivos en la diagonal. Como A es simétrica, se puede tomar una base ortonormal de autovectores, por lo que P es ortogonal y se tiene $P^{-1} = P^T$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$x^TAx = x^TPDP^Tx = (P^Tx)^TD(P^Tx) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 > 0,$$

  donde $z = P^Tx$ y $\lambda_i > 0$. Por tanto, A es definida positiva.

- Para $p = 2$, la función $||(x_1, x_2)|| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ es la norma euclidiana. Verificamos:
  - **Positividad:** $||(x_1, x_2)|| \geq 0$, y se anula si y solo si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
  - **Homogeneidad:** $||\alpha(x_1, x_2)|| = |\alpha| \cdot ||(x_1, x_2)||$.
  - **Desigualdad triangular:** Se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que afirma:

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||,$$

    donde $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

    Tomando raíz cuadrada se obtiene $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

  Note que esta norma proviene de un producto interno si y solo si $p = 2$. En efecto, si una norma proviene de un producto interno, necesariamente satisface la identidad de polarización, que solo es válida para el caso euclidiano.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

[1] Dos detalles importantes: Dado que $\|\cdot\|$ es una norma, entonces para cualquier $c > 0$, $c\|\cdot\|$ también define una norma. Por lo tanto, para cualquier matriz A que no sea nilpotente, se cumple que $\rho(A) > c\|A\|$ cuando c es suficientemente pequeño. Así, la respuesta a la pregunta es negativa. Sin embargo, sí se cumple que $\rho(A) \leq \|A\|$ siempre que $\|\cdot\|$ sea una norma matricial submultiplicativa, es decir, que satisfaga $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para cualquier par de matrices A y B. Sea λ un valor propio de A de módulo máximo y x un vector propio asociado. Sea y cualquier vector no nulo. Como $\|\cdot\|$ es submultiplicativa, se tiene:

$$\rho(A)\|xy^T\| = |\lambda|\|xy^T\| = \|Axy^T\| \leq \|A\|\|xy^T\|.$$

Dado que xy^T es una matriz no nula, se cumple que $\|xy^T\| > 0$. Por lo tanto, podemos concluir que $\rho(A) \leq \|A\|$. Una buena referencia es: `https://www.cis.upenn.edu/~cis5150/cis515-11-sl4.pdf`. Por otro lado: Sea $B = U\Sigma V$ la descomposición en valores singulares (SVD) de B, es decir, U y V son unitarios, y $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1(A), \ldots, \sigma_n(A))$. Entonces,

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(U\Sigma V) = \operatorname{tr}(\Sigma VU) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(A)c_{ii}, \tag{1}$$

donde c_{ii} es la entrada (i, i) de la matriz VU. Como VU es una matriz unitaria, se tiene que $|c_{ii}| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces, a partir de (1), se sigue que

$$\sum_i |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i(A). \tag{2}$$