PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Solucionario de la Primera práctica (tipo a)
Primer semestre 2025

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, se aceptan tablets).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (2 puntos)
Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$, pruebe que si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, entonces $||\mathbf{x}|| \leq ||\mathbf{x} + a\mathbf{y}||$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Solución: Simplemente:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x} + a\mathbf{y}||^2 &= \langle \mathbf{x} + a\mathbf{y}, \mathbf{x} + a\mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2a \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}_{=0} + a^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= ||\mathbf{x}||^2 + a^2 ||\mathbf{y}||^2 \\ &\geq ||\mathbf{x}||^2. \end{aligned}$$

Pregunta 2 (4 puntos)
Analice si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, **justifique**:

1. $S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2^2 \geq 1\}$.
2. $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x_1 = 3x_2 - 5\}$.
3. $S_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 0\}$.
4. $S_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 9x_1 - 8x_2 = 0\}$.

Solución:

1) No pues $(1, 1) \in S_1$ pero $(-1)(1, 1) = (-1, -1) \notin S_1$.

2) No pues el vector nulo $(0, 0) \notin S_2$.

3) Sí: es una recta que contiene al origen.

4) Sí: igual que S_3 (mismo argumento).

Pregunta 3 (4 puntos)
Resuelva las siguientes cuestiones:

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que $T(1,0) = (1,3)$ y $T(0,1) = (1,1)$. Obtenga $T(2,5)$. En general, ¿cómo es $T(x_1, x_2)$?
- Sea T una transformación lineal. Pruebe que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son ld, entonces $T\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2, \ldots, T\mathbf{x}_n$ también son ld.

Solución:

1) Note que, por linealidad,

$$T(2,5) = T(2(1,0) + 5(0,1)) = 2T(1,0) + 5T(0,1) = 2(1,3) + 5(1,1) = (7,11).$$

En general,

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

2) Si $x_1, \cdots, x_n$ son ld, existen α_i no todos nulos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0.$$

Luego, como T es lineal

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i) = T(0) = 0.$$

Pero entonces, como los α_i no son todos nulos, $\{T(x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ forma un conjunto ld.

Pregunta 4 (4 puntos)

Considere el sistema de ecuaciones de demanda para **dos** bienes, donde la cantidad demandada de cada bien q_i no solo depende de su propio precio p_i, sino también del precio del otro bien p_{-i}.

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 \\ q_2 &= \alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2. \end{aligned}$$

- Escriba el sistema en forma matricial.
- Si los bienes son sustitutos y normales, determine el signo de los coeficientes. *Ser sustituto significa que el consumidor puede reemplazar el consumo del bien 1 con el bien 2 y viceversa (celulares Apple vs celulares Samsung). Un bien normal es un bien cuya demanda cae con el precio.*

Solución:

1) Matricialmente el sistema se escribe

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

2) Si los bienes son normales, $\alpha_{11}, \alpha_{22} < 0$. Si son sustituos, $\alpha_{12}, \alpha_{21} > 0$.

Pregunta 4 (4 puntos)
Considere una función de producción tipo Cobb-Douglas: $F(x_1, x_2, x_3) = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$, donde x_1 denota capital, x_2 trabajo, x_3 denota tierras (terreno) y $A > 0$ es una constante.

- ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros α_i, F es homogénea de grado 1? Es decir, cumple con la condición de homogeneidad de las transformaciones lineales para $\lambda \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$?
- ¿Es $F : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$ una transformación lineal para $\alpha_i = 1/3$ y $A = 2$?

- ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros α_i un incremento en los insumos genera un incremento en la producción?
- ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros α_i la tasa de crecimiento de la producción respecto de sus factores (insumos), $\partial F/\partial x_i$ es cada vez menor?

1) Debemos tener $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

2) No, no verifica linealidad (más si homogeneidad de grado 1).

3) Debemos tener $\alpha_i \geq 0$.

4) Debemos tener $\alpha_i \in (0, 1)$.

Pregunta 5 (2 puntos)

Claudio habla frances y alemán; Cesar habla inglés, frances e italiano; Eduardo habla inglés, italiano y español; Manuel habla todos los idiomas que los demás hablan excepto el francés; y nadie habla ningún otro idioma. Construya una matriz $A = (a_{ij})$, donde las **filas representan a las personas** y las **columnas representan los idiomas**. Defina $a_{ij} = 1$ si la persona i habla el idioma j, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Explique el significado de las matrices AA^T y A^TA.

Solución.

- **Personas (filas):**
  - Claudio
  - César
  - Eduardo
  - Manuel
- **Idiomas (columnas):**
  - Inglés
  - Francés
  - Alemán
  - Italiano
  - Español

La matriz A (filas: personas, columnas: idiomas en el orden indicado) es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Interpretacion de AA^T:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Cada entrada (i, j) de AA^T indica la cantidad de **idiomas en comun entre la persona i y la persona j**.

- Las diagonales muestran cuantos idiomas habla cada persona.

- Las entradas fuera de la diagonal muestran el solapamiento linguistico entre personas.

Interpretacion de $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Cada entrada (j, k) de $A^T A$ representa cuantas **personas hablan simultaneamente los idiomas** j **y** k.

- Las diagonales representan cuantas personas hablan cada idioma.
- Las otras entradas muestran cuanta superposicion hay entre los idiomas.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 11 de abril del 2025.