Valores y vectores propios Topología en $\mathbb{R}^n$

Marcelo Gallardo

PUCP

April 23, 2025

Valores y vectores propios (1)

1. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ no singular con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. ¿Cuáles son los valores propios de la matriz A^{-1}? ¿Cuáles son sus vectores propios?
2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre A^k para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Solución: Valores y vectores propios (1)

1) Sea A una matriz cuadrada no singular con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y vectores propios $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces, si $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, al aplicar A^{-1} tenemos:

$$A^{-1}A\mathbf{v}_i = A^{-1}\lambda_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{v}_i = \lambda_i A^{-1}\mathbf{v}_i \Rightarrow A^{-1}\mathbf{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{v}_i.$$

Por tanto, los valores propios de A^{-1} son $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$, y los vectores propios son los mismos que los de A.

2) Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculamos primero sus valores propios λ resolviendo $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1 = 0,$$

lo cual da $\lambda = \pm 1$. Como los valores propios son reales y distintos, A es diagonalizable. Sea P la matriz de vectores propios y $D = \mathrm{diag}(1, -1)$, entonces:

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Continúa

- Para $\lambda = 1$: $(A - I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Para $\lambda = -1$: $(A + I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Entonces,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^k = PD^kP^{-1}.$$

O sea,

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{-1+3(-1)^k}{2} & \frac{-3+3(-1)^k}{2} \\ \frac{1-(-1)^k}{2} & \frac{3-(-1)^k}{2} \end{bmatrix}$$

Valores y vectores propios (2)

3. Pruebe que si A y B son equivalentes (en el sentido más fuerte), entonces $|A| = |B|$.
4. Pruebe que si A y B son equivalentes, entonces A^k y B^k también lo son.
5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

- Interprete el modelo. Identifique qué podrían ser x_1 y x_2.
- Analice $\lim_{k\to\infty} x_i(k)$ e interprete.

Soluciones: Valores y vectores propios (2)

3. **Equivalencia y determinante:** Dos matrices A y B son equivalentes si existen matrices invertibles P y Q tales que $A = PBQ$. Entonces:

$$|A| = |PBQ| = |P||B||Q| = |P||Q||B|.$$

   Como $Q = P^{-1}$, concluimos.

4. **Potencias de matrices equivalentes:** Supongamos $A = PBP^{-1}$. Entonces por inducción o cálculo directo:

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1},$$

   ya que $(PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^2P^{-1}$, y así sucesivamente. Por tanto, A^k y B^k son también semejantes (es decir, equivalentes por conjugación) para todo $k \in \mathbb{N}$.

Modelo de producción sencillo

Con respecto al modelo dinámico:

- $x_1(k)$ representa un insumo que se reduce progresivamente a lo largo del tiempo.
- $x_2(k)$ representa un output acumulado que se incrementa a medida que se utiliza x_1.
- $\delta \in (0,1)$ representa la **tasa de transferencia** del insumo x_1 hacia el output x_2.

Solución del sistema: Llamemos $A = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix}$. Entonces, por iteración:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Continúa

Diagonalizamos A si es posible:

$$\text{Valores propios: } \det(A-\lambda I)=(1-\delta-\lambda)(1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 1-\delta,\ \lambda_2 = 1.$$

$$\text{Vectores propios: } \begin{cases} \lambda_1 = 1-\delta \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta/(1-\delta) \end{bmatrix}, \\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos expresar:

$$x_1(k) = (1-\delta)^k x_{10}, \qquad x_2(k) = x_{20} + x_{10}(1-(1-\delta)^k).$$

Se sigue directamente que $x_1(k) \to 0$ y $x_2(k) \to x_{10} + x_{20}$.

Formas cuadráticas (1)

1. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $A^T A$ es simétrica y positivo semidefinida.
2. Sea $A = \text{Hess}(f)(\mathbf{x}_0)$. ¿Bajo qué condiciones sobre f, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ es una forma cuadrática estándar?

Soluciones: Formas cuadráticas (1)

1. **Simetría y semidefinitud de $A^T A$:** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Entonces $A^T A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.
   - Simetría:
   $$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A.$$
   Por tanto, $A^T A$ es simétrica.
   - Positividad semidefinida: Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene:
   $$\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|_2^2 \geq 0.$$
   Por tanto, todos los valores propios de $A^T A$ son reales y no negativos.
2. **Forma cuadrática estándar desde el Hessiano:** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable, y sea $A = \text{Hess}(f)(\mathbf{x}_0)$ la matriz Hessiana en un punto $\mathbf{x}_0$.
   Entonces, la forma
   $$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$
   es una forma cuadrática si A es simétrica, lo cual siempre se cumple si f es $\mathcal{C}^2$ (por el teorema de Schwarz o simetría de derivadas parciales cruzadas).
   Conclusión: $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ define una forma cuadrática estándar si f es $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$.

Formas cuadráticas (2)

3. Una firma puede escoger entre dos procesos con costos:

$$C_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$$
$$C_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2$$

   Determine qué proceso escogerá.

4. Clasifique las siguientes formas cuadráticas:

$$f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$$

3. **Comparación de procesos productivos:**

Consideramos $f(x_1, x_2, x_3) = C_1(x_1, x_2, x_3) - C_2(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} f &= (2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3) \\ &\quad - (2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2) \\ &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3. \end{aligned}$$

Como todos los términos de f son no negativos $\forall(x_1, x_2, x_3)$ y el término cuadrático $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ domina, se concluye que:

$$C_1(x) \geq C_2(x) \quad \forall x \Rightarrow \text{la firma elige el proceso } C_2.$$

Note que

$$A_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y sus valores propios son $2, 2 \pm \sqrt{2}$, todos estrictamente positivos.

Continúa

3. **Clasificación de formas cuadráticas:**
   - $f_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ Tiene determinante $= 4 \cdot 5 - 4^2 = 20 - 16 = 4 > 0$, traza > 0, y los valores propios son positivos $\Rightarrow$ definida positiva. El espectro es de hecho $(9 \pm \sqrt{65})/2$.
   - $f_2(x)$ tiene matriz asociada:
   $$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1.5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1.5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
   Determinantes principales: $\det A_{1\times 1} = 3 > 0$, $\det A_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$, pero el determinante total es negativo (verificado por cálculo directo o SAGE), $\Rightarrow$ **indefinida**. De hecho, su espectro contiene a -0.23 y 1.7 (redondeados).

Elementos de Topología (1)

1. Pruebe que $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$.
2. $(*)$ Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$. Pruebe que $\rho(A) \leq \|A\|$.
3. Pruebe que si S es abierto y A cualquier conjunto no vacío, entonces $S + A$ es abierto.

Soluciones: Topología en $\mathbb{R}^n$ (1)

1. **Límite de normas p:** Para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Como $|x_i| \le \|\mathbf{x}\|_\infty$ para todo i, se tiene:

$$\|\mathbf{x}\|_p \le (n \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

También, existe un j tal que $|x_j| = \|\mathbf{x}\|_\infty$, y:

$$\|\mathbf{x}\|_p \ge |x_j| = \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_p \le n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow \lim_{p \to \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Soluciones: Topología en $\mathbb{R}^n$ (1)

1. **Desigualdad del radio espectral:** El radio espectral de A es $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valor propio de } A\}$.
   Sea λ un valor propio de A, y $\mathbf{v} \neq 0$ su vector propio, entonces:
   $$\|A\| \geq \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\lambda \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = |\lambda|.$$
   Como esto vale para todo valor propio λ, se concluye:
   $$\rho(A) \leq \|A\|.$$
2. **Suma de conjunto abierto con cualquiera:** Simplemente
   $$S + A = \underbrace{\bigcup_{a\in A} \underbrace{S + a}_{\text{Abierto trivialmente.}}}_{\text{Abierto.}}$$

Más sobre normas matriciales.

Sea $B = A^T A$. Entonces:

$$\|B\|_F = \sqrt{\text{Tr}(B^T B)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(B)^2\right)^{1/2}$$
$$\geq \sqrt{\left(\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i(B)\right)^2} = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i(B).$$

Donde $(\lambda_i(B))_{1\leq i\leq n}$ son los valores propios (reales) de la matriz simétrica B. **Esto prueba que:**

$$\|A^T A\|_F \geq \lambda_{\max}(A^T A),$$

es decir, la norma de Frobenius de $A^T A$ es mayor o igual que el mayor valor propio de $A^T A$.

Norma matricial y valor propio máximo

Norma inducida de una matriz:

La norma de una matriz A se define como el máximo cociente entre normas:

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Esto implica inmediatamente que:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Matriz simétrica definida positiva: Si A es simétrica y definida positiva, entonces:

$$\|A\| = \lambda_{\text{max}}(A),$$

donde $\lambda_{\text{max}}(A)$ es el mayor valor propio de A.

Tomando como $\mathbf{x}$ el vector propio correspondiente a λ_{max}, se alcanza exactamente ese cociente:

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \lambda_{\text{max}}.$$

Matrices no simétricas y norma

Ningún otro vector puede producir un cociente mayor. Si $A = Q\Lambda Q^T$, con Q ortogonal, entonces la norma es simplemente:

$$\|A\| = \|\Lambda\| = \lambda_{\text{max}}.$$

Matrices no simétricas: Cuando A no es simétrica, los valores propios pueden no reflejar correctamente el "tamaño" real de la matriz.
Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pero su norma es:

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 2.$$

Tomando $\mathbf{x} = (0, 1)^T$, se obtiene $A\mathbf{x} = (2, 0)^T$, entonces:

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{2}{1} = 2.$$

Este es el máximo valor, a pesar de que $\mathbf{x}$ no es un vector propio.

Matrices simétricas y norma

Matrices simétricas no definidas positivas:

Si A es simétrica (pero no necesariamente definida positiva), la descomposición $A = Q\Lambda Q^T$ sigue siendo válida.

En este caso, la norma de A es:

$$\|A\| = \max_i |\lambda_i(A)|,$$

es decir, el valor absoluto del mayor valor propio en módulo.

Para cualquier vector propio $\mathbf{x}$ con $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, se tiene:

$$\|A\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Norma inducida por $A^T A$

Norma inducida general (caso simétrico o no):

El valor máximo del cociente cuadrático asociado a A es:

$$\|A\|^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \lambda_{\max}(A^T A).$$

Por tanto,

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}.$$

Esto permite definir la norma de cualquier matriz (simétrica o no) mediante los valores propios de $A^T A$ (una matriz simétrica y definida positiva).

Elementos de Topología (2)

4. Pruebe que $C[0,1]$ con $||\cdot||_\infty$ es completo. Analice si esto es válido usando $||\cdot||_1$.
5. Pruebe que (i) la unión finita y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, (ii) la intersección finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

Soluciones: Topología en $\mathbb{R}^n$ (2)

4. **Completitud de $C[0,1]$ con $\|\cdot\|_\infty$:**
   Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $m, n \geq N$:

   $$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

   Esto implica convergencia uniforme a una función f, y el límite uniforme de funciones continuas es continuo. Por tanto, $f \in C[0,1]$ y (f_n) converge a f en norma ∞. $\Rightarrow$ **$C[0,1]$ es completo con $\|\cdot\|_\infty$. ¿Y con $\|\cdot\|_1$?**

Continúa: L^p

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - n(x - \frac{1}{2}), & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Cada f_n es continua en $[0,1]$ y tiene un salto suavizado entre 1 y 0 centrado en $x = 1/2$.

Cota de convergencia en norma p**:**

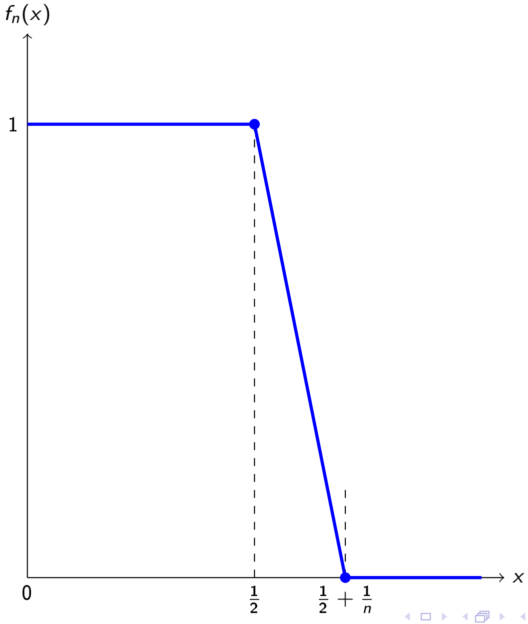
$$\|f_n - f_m\|_p = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\tfrac{1}{n}\right)^{1/p} \longrightarrow 0.$$

Por tanto, (f_n) es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_p$.

¿Cuál es el límite?

Para toda $x \in [0, \frac{1}{2})$, $f_n(x) = 1 \ \forall n \Rightarrow f(x) = 1$ Para $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, $f_n(x) = 0 \ \forall n \gg 1 \Rightarrow f(x) = 0$
Pero en $x = \frac{1}{2}$, el límite f es discontinua (salta de 1 a 0).
Conclusión: $f \notin C[0,1]$, aunque $f_n \in C[0,1]$ y $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_p$. Por tanto, $C[0,1]$ no es completo bajo $\|\cdot\|_p$ para $1 \leq p < \infty$.

Gráfica de la función $f_n(x)$ con $n = 5$



Unión finita e intersección arbitraria de cerrados:
Unión finita: Simplemente una secuencia $x_n \in \bigcup_{i=1}^{K} F_i$ termina en uno de los F_i, y como cada uno es cerrado, converge a $x \in F_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^{K} F_i$.
Conclusión: x es punto de acumulación de F_1 o de F_2, luego pertenece a $F_1 \cup F_2$. $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ es cerrado.

Intersección arbitraria: Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia cualquiera de conjuntos cerrados, entonces:

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha^c,$$

y como cada F_α^c es abierto, la unión es abierta, por lo tanto la intersección es cerrada.

Unión arbitraria de abiertos e intersección/unión finita de compactos

1) Tome $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. En particular, $x \in U_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$. Se sigue que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$. Por ende, $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

2) Sean $K_1, \cdots, K_L$ compactos. Cada uno es cerrado, por lo que su intersección (de hecho arbitraria) o unión finita, sigue siéndolo. Ahora, como son compactos, cada uno está incluido en $B_i(r_i)$, $r_i > 0$. Tome $\max_{1 \leq i \leq L} 2r_i = \theta$: $\bigcup_{i=1}^{L} K_i \subset B(2\theta)$. O sea, la unión es un conjunto acotado. Para la intersección, tome cualquier r_i:

$$\bigcap_i K_i \subset K_{i_0} \subset B_{i_0}(r_{i_0}).$$

Conjunto Walrasiano

1. Defina qué es el conjunto Walrasiano.
2. Pruebe que dicho conjunto es compacto.
3. Pruebe que dicho conjunto es convexo.
4. Grafique y analice cómo cambia dicho conjunto en función de los parámetros.

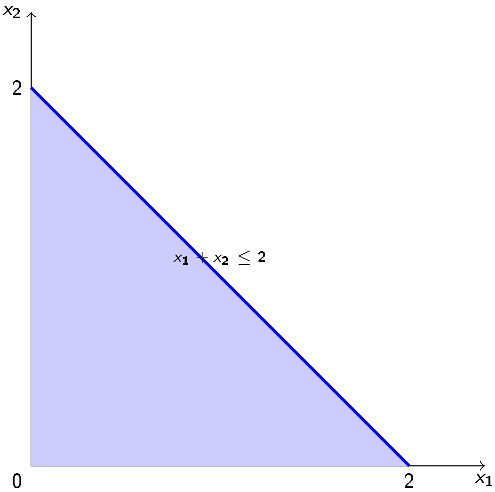
Conjunto Walrasiano

1. $B(\mathbf{p}, I) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \leq I\right\}$.
2. $B(\mathbf{p}, I) \subset B(2I/p_{\min})$ y es cerrado pues $f^{-1}(-\infty, I] \cap \mathbb{R}^L_+$, con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$.
3. Trivialmente es convexo:

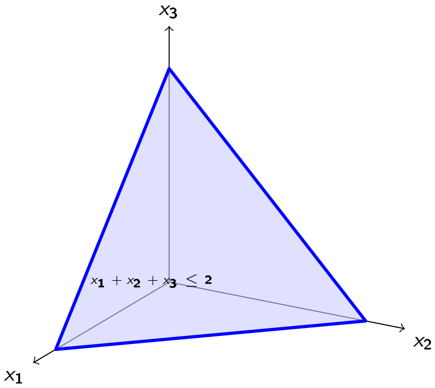
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{p}, I) \implies \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{p} \leq I \implies \lambda \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{p} \leq \lambda I \ \wedge (1-\lambda)\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{p} \leq (1-\lambda)I.$$

Sumando, se concluye.

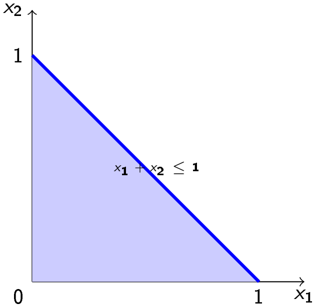
Conjunto presupuestario Walrasiano en $\mathbb{R}^2$



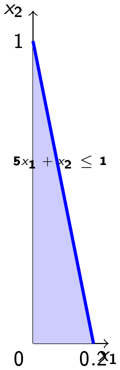
Conjunto presupuestario Walrasiano en $\mathbb{R}^3$



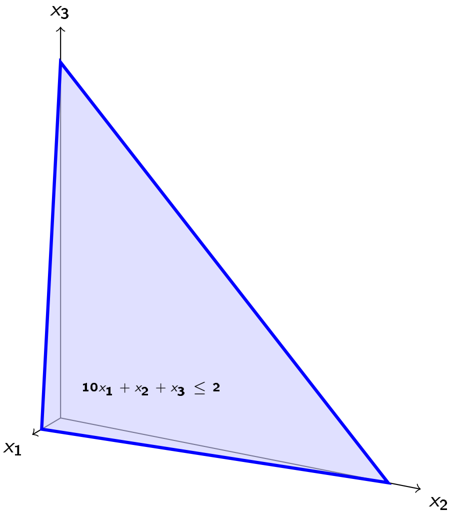
Conjunto presupuestario en $\mathbb{R}^2$, $I = 1$, $p_1 = p_2 = 1$



Conjunto presupuestario en $\mathbb{R}^2$, $p_1 = 5$, $p_2 = 1$, $I = 1$



Conjunto presupuestario en $\mathbb{R}^3$, $p_1 = 10$, $p_2 = p_3 = 1$, $I = 2$



Convexidad

- Conjuntos convexos.
- Envolvente convexa.
- Proyección.
- Separación.
- Lema de Farkas.
- Transporte óptimo y programación lineal.
- Funciones convexas y cóncavas.
- Funciones cuasi-convexas/cóncavas.
- Relaciones de preferencias.
- Optimización (sin y con restricciones): Lagrange, KKT. Aplicaciones: maximización de la utilidad, minimización del gasto, maximización del beneficio, minimización del costo.
- Estática comparativa y teorema de la envolvente.
- Equilibrio general, teoremas del bienestar.
- Optimización dinámica / juegos.

Aplicaciones

- Econometría: OLS, ML.
- Juegos: existencia del equilibrio de Nash, subastas, diseño de mecanismos (requiere medida, topología general y funcional). Teoremas de puntos fijos.
- Macroeconomía dinámica: ecuación de Bellman, contracción, enfoque variacional, control óptimo en tiempo continuo (requiere dinámica real y funcional).
- Transporte óptimo (requiere probabilidad y funcional idealmente).
- Equilibrio general en dimensión infinita ℓ^∞.