PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Lista de ejercicios 3
Primer semestre 2025

1 Práctica Dirigida 3

1. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ convexa y diferenciable. Pruebe que la función

$$g(x) = \exp \left[\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right], \ x > 0,$$

es convexa.

2. Proponga condiciones bajo las cuales el producto de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexas y de clase C^2 es una función convexa.

3. Sea $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$, donde $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. ¿Bajo qué condiciones sobre $A, \mathbf{b}$ y c la función f es convexa?

4. Demuestre que

$$u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \ \alpha_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, ..., n$$

es cuasicóncava sobre $\mathbb{R}^n_{++}$.

5. Sea $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de utilidad cuasicóncava y de clase C^2, con utilidades marginales estrictamente positivas.

   - Demuestre que su tasa marginal de sustitución (TMS) u_{x_1}/u_{x_2} es decreciente en x_1. Para esto, suponga que x_2 es función diferenciable de x_1, $x_2 = x_2(x_1)$. Además analice esto desde la perspectiva de una curva de nivel.
   - ¿Es cierto que cuando la TMS es decreciente el consumidor está dispuesto a dar cada vez más unidades del bien x_1 por una unidad del bien x_2 cuando su consumo en x_1 es mucho mayor que el de x_2? Justifique su respuesta.

6. Pruebe que

$$f(x_1, ..., x_n) = \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right)$$

es convexa sobre $\mathbb{R}^n$. <u>Sugerencia.</u> Aplique la desigualdad de Holder: dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in]1, \infty[$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$.

7. Considere el problema de minimización del gasto:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \ & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s. a.} : \ & u(\mathbf{x}) \geq \overline{u} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde u es una función de utilidad continua tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1, \ \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \Rightarrow u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$ y $u(\mathbf{0}) = 0$. Por otro lado, $\overline{u}$ es un parámetro positivo, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ representa una canasta de consumo.

- Explique con detalle la formulación del problema. Definimos la función «valor óptimo» por

$$e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

¿Qué espera que suceda con la función valor óptimo si $\overline{u}$ aumenta?

- Demuestre que la función valor óptimo es cóncava con respecto al vector de precios $\mathbf{p}$. ¿A qué se debe esto (analice)?
- Resuelva el problema gráficamente si $n = 2$, $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, $\overline{u} = 5$ y $p_1 = p_2 = 1$. Interprete la solución.
- Resuelva el problema cuando $u(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$. Interprete su solución.

1.1 Optimización en $\mathbb{R}^n$

- Lista 1 del capítulo 8.
- Lista 2 del capítulo 8.

1. Encuentre y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:
   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$.
   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
   (c) $f(x, y) = e^x \cos y$.
   (d) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$.
   (e) $f(x, y) = x \sin y$.
   (f) $f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$.
2. Sea $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$.
   (a) Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función f.
   (b) ¿Tiene f extremos absolutos? (Sugerencia: considere la recta $y = x$).
3. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^{2m} + (x_2 - b)^{2n} + c,$$

   donde a, b y c son constantes y $m, n \in \mathbb{N}$.
   - ¿Cuál es el punto mínimo de la función f?
   - ¿Cuál es valor mínimo de la función f?
   - ¿Tiene puntos máximos la función f?
4. Considere el siguiente problema de maximización del beneficio «en el corto plazo» (lo que significa que uno de los dos insumos está fijo, por ejemplo $x_2 = k$):

$$\max_{x_1, q \geq 0} \ pq - w_1 x_1 - w_2 k$$
$$A x_1^{\alpha} k^{\beta} = q$$

   con $\alpha, \beta \in]0, 1[$, $A, k, w_1, w_2, p > 0$. Plantee el problema como un problema de optimización en una única variable y explique por qué la solución es interior. Luego, obtenga la solución al problema (x_1^*), la producción óptima q^* y la función valor óptimo $\pi(p, w_1, w_2, k, \alpha, \beta, A)$.
5. Analice la convexidad (concavidad) de las siguientes funciones:
   (a) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 5)$
   (b) $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

(c) $f(x) = e^{|x|}$

(d) $f(x, y) = \ln(x + y)$

(e) $f(x, y) = x + y - e^x - e^y$

(f) $f(x, y, z) = x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 6xy - 2xz + 12yz$

6. Estudiar para qué valores de los parámetros a y b son cóncavas o convexas las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - az^2 + 4xy + 3yz$

   (b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + az^2 - 3bxy$

7. Determine el mayor conjunto S sobre el cual la función f sea convexa:

   (a) $f(x, y, z) = x^2y^2 + 4x^2$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{2x + y}$

   (c) $f(x, y) = x^3 - xy + 3y^3 + 5$

8. Pruebe que cualquier función $f : I \to \mathbb{R}$ monótona es cuasiconvexa y cuasicóncava a la vez.

9. Usando la definición de concavidad, pruebe que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2$, es cóncava. Estudie si es estrictamente cóncava.

10. Sean $f, g : S \to \mathbb{R}$, donde $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo. Pruebe las siguientes afirmaciones:

    (a) Si f y g son convexas, entonces la función $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ es convexa.

    (b) Si f y g son cóncavas, entonces la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ es cóncava.

11. Halle los valores de la constante a para los cuales la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2ax_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

    es convexa.

12. Estudiar la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

    (a) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 - e^{x_1} - e^{x_1 + \frac{x_2}{2}}$

    (b) $g(x_1, x_2) = e^{2x_1 + x_2} + e^{2x_1 - x_2} - 2x_1 - 3x_2$

    (c) $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_2)^2$

13. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 - x_1^3.$$

    Hallar el mayor conjunto convexo S para el cual f es cóncava.

14. Sea $f : S \to \mathbb{R}$, donde $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 1, x_2 > 1\}$, y

$$f(x_1, x_2) = (\ln x_1)^a (\ln x_2)^b,$$

    con $a > 0$, $b > 0$ y $a + b < 1$. Probar que f es estrictamente cóncava.

15. Sea f una función convexa, y sea $g(x) = af(x) + b$. Halle todos los valores de a y b para los cuales g es cóncava.

2 Ejercicios suplementarios

1. Sean $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ y $b_i \in \mathbb{R}$. Demuestre que la siguiente función es convexa:

$$f(\mathbf{x}) = -\ln\left[-\ln\left(\sum_{i=1}^{p} e^{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+b_i}\right)\right],\ \mathrm{Dom}(f) = \left\{\mathbf{x} :\ \sum_{i=1}^{p} e^{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+b_i} < 1\right\}.$$

2. Considere una función de producción de tipo CES (Constant Elasticity of Substitution) generalizada $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}\right)^{1/\rho},\ \rho \neq 0,\ \alpha_i > 0. \tag{1}$$

Demuestre que f es cuasicóncava para $\rho \leq 1$.

<u>Nota histórica</u>: La función CES (Elasticidad Constante de Sustitución) es un tipo de función de producción utilizada en economía para representar una tecnología que permite sustituir entre insumos con una elasticidad constante. Fue introducida por Kenneth Arrow (matemático y premio nobel de economía de 1972), H. B. Chenery, B. S. Minhas, y Robert Solow matemático y premio nobel de economía de 1987) en 1961. Los parámetros α_i representan las participaciones de los insumos en la producción, y ρ determina la facilidad de sustitución entre estos insumos, con ρ cerca de cero indicando sustitutos cercanos y ρ muy negativo indicando complementos cercanos. La elasticidad de sustitución es una medida económica que indica qué tan fácilmente los consumidores o productores pueden sustituir un bien o insumo por otro en respuesta a cambios en los precios relativos. Esencialmente, refleja la sensibilidad de la proporción en la que se usan dos bienes o insumos ante cambios en la relación de sus precios. Si la elasticidad de sustitución es alta, significa que los bienes o insumos se pueden sustituir fácilmente entre sí. Por ejemplo, si el precio de un bien aumenta, los consumidores o productores pueden cambiar rápidamente a un bien sustituto más barato sin mucha pérdida en utilidad o productividad. Por otro lado, una elasticidad baja indica que los bienes o insumos son más complementarios, lo que significa que es difícil sustituir uno por el otro sin afectar significativamente el consumo o la producción.

3. Demuestre que si una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasi cóncava y homogénea de grado 1, entonces es cóncava. Use esto para deducir que la CES generalizada (Ecuación (1)) es cóncava para $\rho \leq 1$.

4. Considere el problema de minimización del costo

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{z} \\ &\text{s. a: } f(\mathbf{z}) \geq q \\ &\quad\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En este problema, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+$ es el vector de precio de los insumos de producción $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot)$ la función de producción de la firma y $q > 0$ un parámetro que denota un nivel de producción del bien que produce la firma.

- Demuestre que la función valor óptimo, conocida como función de costos,

$$c(\mathbf{w}, q) = \min_{f(\mathbf{z})\geq q, \mathbf{z}\geq\mathbf{0}} \mathbf{w}\cdot\mathbf{z},$$

es creciente en $\mathbf{w}$ (esto es, $\mathbf{w}_1 \leq \mathbf{w}_2 \implies c(\mathbf{w}_1, q) \leq c(\mathbf{w}_2, q)$) y que es homogénea de grado 1 en $\mathbf{w}$ (esto es, $c(\lambda\mathbf{w}, q) = \lambda c(\mathbf{w}, q)$ para todo $\lambda > 0$).
- Pruebe que $c(\mathbf{w}, q)$ es cóncava con respecto al vector de insumos $\mathbf{w}$.
- Pruebe que si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(\cdot)$ es una función convexa con respecto a q.
- Suponga que $f(\cdot)$ es homogénea de grado $\alpha > 0$, esto es $f(\lambda\mathbf{z}) = \lambda^{\alpha} f(\mathbf{z})$ para todo $\lambda > 0$. Asuma que la restricción se da con igualdad: $f(\mathbf{z}) = q$ (no hay desperdicios). Pruebe que

$$c(\mathbf{w}, q) = q^{1/\alpha} c(\mathbf{w}, 1).$$

- Considere la siguiente función $c(\mathbf{w}, q) = Aw_1^a w_2^b q^c, A, c > 0$. ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros a, b esta función corresponde a una función de costos? Suponga que si una función cumple con las propiedades descritas anteriormente y además es continua, es suficiente para asegurar que es una función de costos.

  <u>Nota histórica:</u> El problema de recuperar la función de producción o función de utilidad a partir de una función de costo o de gasto es central en la teoría económica y utiliza herramientas como el lema de Shepard, en honor al economista Ronald Shepard, profesor en la Universidad de California, Berkeley. Este lema establece una relación formal entre las derivadas respecto a los precios de la función de costos (la función de gasto, respectivamente) y las demandas condicionales de los factores (la demanda Hicksiana, respectivamente). Paul Samuelson, uno de los teóricos más influyentes en economía y Premio Nobel de Economía en 1970, también contribuyó al desarrollo de la teoría de la dualidad y los métodos para recuperar funciones de utilidad y producción a partir de funciones de costos y gastos. El siguiente problema está relacionado a estas cuestiones y no se requiere emplear las herramientas desarrolladas por Shepard o Samuelson.

- Considere la siguiente función de costos:

  $$c(\mathbf{w}, q) = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right] q,$$

  donde $a_i > 0, \forall\ i = 1, ..., n$. Pruebe que si la función de producción asociada es homogénea de grado 1 y que la restricción se da con igualdad (es decir $f(\mathbf{z}) = q$), entonces:

  $$f(a_1, ..., a_n) = 1$$

  para cualquier combinación de los parámetros $a_i > 0$.

- Determine la función de producción f si $c(\mathbf{w}, q) = \min\left\{\frac{w_1}{b_1}, \cdots, \frac{w_n}{b_n}\right\} q$.

3 Ejercicios adicionales

1. El problema del monopolista consiste en lo siguiente; dada una función inversa de demanda $p = p(q)$, su objetivo es resolver

   $$\max_{q \geq 0} p(q)q - c(q),$$

   donde $c(q)$ es la función de costos de la firma, que depende del nivel de producción q. Suponga que $p(q) = a - bq$ y (i) $c(q) = c \cdot q^2$, (ii) $c(q) = c \cdot q$, con $a, b, c > 0$. Resuelva el problema del monopolista para ambos casos y compárelos. Finalmente, obtenga los beneficios del monopolista en ambos casos.

2. Sea $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ una muestra aleatoria correspondiente a una distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Se define la función de verosimilitud por:

   $$\begin{aligned} L(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

   Se denominan los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2 (que se denotan por $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$) a los valores para los que se alcanza el máximo valor de la función definida en (2). Calcule $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$, comprobando que se trata de un máximo. Asuma que no todos los x_i son iguales.

3. Considere una firma que posee una función de producción tipo CES

   $$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i^{\rho},\ 0 < \rho < 1,\ \gamma_i > 0.$$

   Plantee y resuelva el problema de maximización del beneficio de esta firma, asumiendo que los precios de los insumos son $w_1, ..., w_n > 0$ y el precio del bien que se produce es $p = 1$.

4. **Estática comparativa.** Considere el siguiente modelo macroeconómico

$$
\begin{aligned}
Y &= C_0 + C(Y - T_0 - T(Y), r) + I_0 + I(r, Y) + G_0 \\
L_0 + L(Y, r) &= M_0.
\end{aligned}
$$

Las variables endógenas del modelo son Y, la producción y r, la tasa de interés. Considere los siguientes supuestos de comportamiento

$$0 < C_{Y_d} < 1, \; T_Y > 0, C_r < 0, I_Y > 0, I_r < 0$$

$$C_{Y_d} + I_Y < 1, L_Y > 0, L_r < 0,$$

donde $Y^d = Y - T_0 - T(Y)$.

- Determine los parámetros del modelo e identifique qué representan $T(Y)$ e $I(Y, r)$. Por ejemplo, $L(Y, r)$ es la función de demanda monetaria y M_0 la oferta monetaria.
- Determine $\dfrac{\partial Y}{\partial G_0}$ y $\dfrac{\partial r}{\partial G_0}$.
- ¿Es cierto que un incremento de la oferta monetaria M_0 reduce la producción Y? Justifique.
- ¿Es cierto que un incremento de la oferta monetaria M_0 incrementa la tasa de interés r? Justifique.

4 Aplicaciones en teoría de la firma (opcional)

- Una empresa tiene la siguiente función de producción

  $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{2x_1 + x_2, x_3 + 2x_4\}.$$

  Encuentre la función de costo de esta empresa en términos de $w, q > 0$. Haga lo mismo para

  $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\}.$$

- Considere la siguiente función de costo:

  $$c(w, q) = q^{1/2}(w_1 w_2)^{3/4}.$$

  Encuentre la función de producción asociada.

- Considere la siguiente función de costo:

  $$c(w, q) = q(w_1 - \sqrt{w_1 w_2} + w_2).$$

  Encuentre la función de producción. Haga lo mismo para

  $$c(w, q) = \left(q + \frac{1}{q}\right)\sqrt{w_1 w_2}.$$