PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Tercera práctica (tipo a)
Primer semestre 2025

Indicaciones generales:

- Duración: 105 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase físicos.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico, salvo calculadora.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (6 puntos). Funciones convexas por definición.

a) Sean $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ \ h : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$

es convexa.

b) Pruebe que si f es convexa sobre $[a, b]$,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Para $h > 0$ fijo, defina

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

Pruebe que si f es convexa, $f_h(x) \geq f(x)$.

Pregunta 2 (4 puntos). Criterios de concavidad y cuasiconcavidad.

a) Analice si $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ es cuasicóncava sobre $\mathbb{R}^2_{++}$.

b) Considere la función de utilidad CES

$$u(x) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{1/\rho},$$

donde $\rho \in (0, 1)$. Pruebe que $u(x)$ es cuasicóncava.

Pregunta 3 (4 puntos). Aplicación de la cuasiconcavidad al problema de maximización de la utilidad.

Considere el siguiente problema de optimización con parámetros (note que corresponde al problema maximización de la utilidad)

$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \max & u(\mathbf{x}) \\ \text{s. a :} & \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq I \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Asuma que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $I > 0$ y que $u(\cdot)$ es continua y tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \implies u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$. Sea $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ una solución al problema. Demuestre que:

1. Si u es cuasicóncava, entonces el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es convexo.
2. Si u es estrictamente cuasicóncava, entonces el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es unitario (la solución es única).

Pregunta 4 (6 puntos). Optimización en $\mathbb{R}^n$. Clasificación de puntos óptimos.

a) De acuerdo al valor del parámetro $a \neq 0$, analice si la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$$

tiene puntos óptimos.

b) Considere una firma cuya función de ingreso es

$$R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y),$$

donde x e y representan el número de artículos vendidos. Si la función de costo es

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20,$$

determine el beneficio máximo.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.