PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Segunda práctica (tipo a)
Primer semestre 2025

Indicaciones generales:

- Duración: 100 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase físicos.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico, salvo calculadora.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (4 puntos)

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule los valores y vectores propios de A. Analice finalmente si la matriz es diagonalizable.

Pregunta 2 (4 puntos)

Modelo de Leontief. Considere tres sectores productivos: el sector primario agro-exportador, el sector industrial y el sector de servicios. Suponga que, en términos de proporciones, el sector primario requiere de 0.4 de su propio sector, 0.4 del sector industrial y 0.1 del sector de servicios. Por otro lado, el sector industrial requiere de 0.2 del sector agro-exportador, 0.2 de su propio sector y del sector servicios 0.3. Finalmente, el sector servicios requiere 0.2 del sector agro-exportador, 0.1 del sector industrial y 0.3 de su propio sector. Además, se sabe que la demanda externa es $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 200 & 300 & 400 \end{bmatrix}$. Encuentre la oferta óptima (cantidad producida) por cada sector en el equilibrio (redondee a las centésimas).

Pregunta 3 (6 puntos)

1. Determine si $\bigcap_{k=1}^{\infty} [0, 1/k]$ es un conjunto cerrado. **(1 punto).**
2. Sea A un conjunto abierto y B un conjunto cualquiera. Pruebe que $A - B = \{a - b : \ a \in A, b \in B\}$ es un conjunto abierto. **(2 puntos).**
3. En teoría microeconómica, el simplex

$$\Delta = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

es un conjunto que aparece con frecuencia (equilibrio general, loterías, teoría de juegos etc.).

a) Grafique Δ para $n = 2$ y $n = 3$. **(1 punto).**

b) Demuestre que Δ es un conjunto compacto para cualquier $n \in \mathbb{N}$. **(2 puntos).**

Pregunta 4 (6 puntos)

1. Considere la norma de Frobenius $||A||_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$

   a) Pruebe que efectivamente $||A||_F$ define una norma. **(1.5 puntos).**

   b) Pruebe que **(1.5 puntos).**

$$\sqrt{\rho(A)} \leq ||A||_F \leq \sqrt{n}\sqrt{\rho(A^T A)}, \text{ donde } : \rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ valor propio de } A\}.$$

2. Pruebe que si A es simétrica y sus valores propios son todos estrictamente positivos, entonces A es definida positiva. **(1.5 puntos).**

3. Pruebe que $||(x_1, x_2)|| = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}$ es una norma para $p = 2$. **(1.5 puntos).**

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.