

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Examen Final
Primer semestre 2025

Indicaciones generales:

- Duración: 170 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: 2 hojas A4 con apuntes de clase (físicos).
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, no tablets, no libros).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Pregunta 1 (8 puntos)

- a) Resuelva en función de los precios $p_1, p_2 > 0$ y el ingreso $I > 0$, el problema de maximización de la utilidad para

$$u(x_1, x_2) = 0.2 \ln x_1 + 0.8 \ln x_2.$$

- b) Para la misma función de utilidad y precios, resuelva el problema de minimización del costo con $\bar{u} > 0$.

- c) Demuestre que

$$e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) = I,$$

donde $V(\mathbf{p}, I)$ es la función de utilidad indirecta en el problema de maximización de la utilidad encontrada en (1.a) y $e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I))$ es la función de gastos para el problema (1.b) reemplazando $\bar{u} = V(\mathbf{p}, I)$.

- d) Demuestre que

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = - \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial I} \right) x_1^* + \left(\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} \right), \quad (1)$$

donde x_1^h es la solución al problema de minimización del gasto asociado y x_1^* la solución al problema de maximización de la utilidad para el bien 1.

Pregunta 2 (10 puntos)

- a) Pruebe que $f(x_1, x_2) = \sqrt{e^{x_1} + e^{-x_2}}$ es convexa sobre su dominio.
- b) Analice si $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1 x_2}$, $x_i > 0$ es cóncava sobre su dominio.
- c) Resuelva $\min (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$ sujeto a $x_1 \leq x_2$ y $x_1 + 2x_2 \leq 2$ vía KKT.
- d) Proponga una relación de preferencias (sobre \mathbb{R}_+^L) que no sea convexa.
- e) Proponga una relación de preferencias (completa y transitiva) que no sea continua.
- f) Proponga una función de utilidad que represente una relación de preferencias localmente saciada en $X = \mathbb{R}_+^L$.

- g) Pruebe que si una relación de preferencias es monótona, entonces es localmente no saciada. ¿Vale la inversa?
- h) Acemoglu tiene preferencias representadas por $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 5)$. Analice si son convexas y/o estrictamente convexas.
- i) Las preferencias de Barro vienen representadas por $v(x_1, x_2, x_3) = \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{10}, x_3\}$. Analice si son convexas y/o estrictamente convexas.
- j) Resuelva el problema de maximización de la utilidad para $u(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$ en función del vector de precios $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$ y el ingreso $I > 0$, vía KKT.

Pregunta 3 (1 punto)

Demuestre que (1) vale en general para $u \in C^2(\Omega)$ estrictamente cuasicóncava con $\mathbb{R}_{++}^2 \subset \Omega$ tal que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}_{++}^2$. A esto se le conoce como la ecuación de Slutsky. Sugerencia: aplique estática comparativa a las condiciones de primer orden de Lagrange en los problemas de maximización de la utilidad y minimización del gasto.

Pregunta 4 (1 punto)

Demuestre que si $f''(x) < 0$ sobre $]a, b[$, entonces

$$\int_a^b e^{-\lambda f(x)} dx < \frac{b-a}{\lambda(f(b)-f(a))} (e^{-\lambda f(a)} - e^{-\lambda f(b)}).$$

La función f es clase C^2 .

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 14 de julio del 2025