PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Examen Parcial
Primer semestre 2025

Indicaciones generales:

- Duración: 170 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: Dos hojas A4 doble cara.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1.

1.5 puntos cada inciso.

1. Pruebe que el conjunto $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \ A = A^T\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y determine su dimensión.
2. Calcule A^{100}, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.
3. Considere $Q(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2a_3 x_1 x_2$. Determine condiciones sobre a_1, a_2 y a_3 para que $Q > 0$.
4. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Pruebe que $\mathcal{B}_{||\cdot||_1}(\mathbf{a}; r) \subset \mathcal{B}_{||\cdot||_2}(\mathbf{a}; r) \subset \mathcal{B}_{||\cdot||_\infty}(\mathbf{a}; r)$.
5. Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x \le 5, \ y \le \ln x\} \cap C$, con $C = [1, 3] \times [0, 1]$. Pruebe que S es convexo. **Nota:** puede asumir que $\ln(\cdot)$ es cóncava, i.e., $\forall \ \lambda \in [0, 1]$ y $x_1, x_2 > 0$: $\lambda \ln x_1 + (1 - \lambda) \ln x_2 \le \ln(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$.
6. Determine si los conjuntos
$$A = \{(x, y) : x \le 0\},$$
$$B = \{(x, y) : x > 0, \ y \ge 1/x\}$$
pueden ser separados estrictamente por un hiperplano. ¿Separados pero no necesariamente estrictamente?
7. Considere el conjunto
$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++} : \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \ge 1 : \ \alpha_i \in (0, 1), \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le 1 \right\}.$$
Pruebe que X es convexo.
8. Considere el siguiente conjunto
$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \ \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{a_n} \right\} \ge c \right\},$$
donde $a_1, ..., a_n > 0$ y $c \ge 0$. Pruebe que U es convexo. Grafique U para $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $c = 1$.

9. Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ una tecnología[1]. Diremos que la tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes si: $\forall\ \mathbf{y} \in Y,\ \alpha\mathbf{y} \in Y,\ \forall\ \alpha \in [0,1]$. Por otro lado, diremos que la tecnología es aditiva si dados $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$, $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y$. Pruebe que una tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes y es aditiva si y solamente si es un cono convexo.

10. Se dice que una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^L$ presenta la propiedad de libre disposición si dados $\mathbf{y} \in Y$ e $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y}' \in Y$. Demuestre que si una tecnología es cerrada (es decir, Y es un conjunto cerrado), convexa y tal que $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$, entonces cumple la propiedad de libre disposición.

11. Sea $S = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{b} = (2,2)$. Encuentre todos los hiperplanos que separan a S de $\mathbf{b}$.

12. Si $T : X \to Y$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales y A es un subconjunto convexo de X, entonces pruebe que la imagen $T(A)$ es un subconjunto convexo de Y.

Pregunta 2 (1 punto cada una).

2.1) Sea A una matriz de dimensión $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, y defina los conjuntos

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad G = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0\}.$$

Pruebe que $F \neq \emptyset$ si y solo si $G = \emptyset$.

2.2) Sea $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que la proyección sobre C está dada por

$$\text{Proy}_C(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\max\{1, \|\mathbf{x}\|\}}.$$

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 19 de mayo de 2025

[1] Conjunto que representa planes de producción. Dado $\mathbf{y} \in Y$, si $y_i < 0$, i representa un insumo que se usa en cantidad $|y_i|$. Si $y_i > 0$, entonces es un producto que se produce en la cantidad y_i.