PUCP

Investigación de Operaciones IOP224

Ejercicios propuestos por Marcelo Gallardo.

Fecha 11-05-2025.

Valores y vectores propios.

1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula los valores propios y vectores propios de A.

(b) Calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 11 & -6 \end{pmatrix}$.

(a) Encuentre el polinomio característico de B.

(b) Determine si B es diagonalizable.

(c) Si lo es, calcule B^n para $n = 5$.

Convexidad y topología en $\mathbb{R}^n$.

1) Demuestre que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo y use esto para demostrar que, dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset \mathbb{R}^n$

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \ \forall \ \mathbf{y} \in S\}$$

es convexo.

2) Demuestre que $\{(x, y) \in [2, 10]^2 : \ y \leq \ln x\}$ es convexo.

3) Determine para que $p \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}$$

define una norma. Pruébelo.

4) Demuestre que $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++} : \ x_1 x_2 \geq 5\}$ es un conjunto convexo.

5) Sea

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

(a) Describa gráficamente el conjunto.

(b) ¿Es abierto? ¿Es cerrado?

(c) ¿Cuál es su interior de dicho conjunto?

Variado, algunos más avanzados.

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Determine si A es diagonalizable.

(b) Calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. Sea $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determine si N es nilpotente y, en dicho caso, encuentre el menor k tal que $N^k = 0$.

(b) Calcule $\exp(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!}$.

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con A simétrica y definida positiva. Demuestre que existe una matriz B tal que $A = B^2$ y B también es simétrica y definida positiva. ¿Es única dicha matriz?

Ejercicio 4. Sea

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \ x + y \geq 1\right\}$$

con $a, b > 0$. Demuestre que C es convexo.

Ejercicio 5. Sea

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) > \frac{1}{2}\right\}.$$

(a) Determine si S es abierto.

(b) ¿Es S convexo?

Ejercicio 6. Sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 \right) \subset \mathbb{R}.$$

(a) ¿Es A abierto? ¿Es cerrado?

(b) Calcule su interior y frontera.

Ejercicio 7. Sea

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ax - b\|_\infty \leq 1\}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Determine si K es un conjunto convexo.

Ejercicio 8. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Define la norma dual como

$$\|y\|_* = \sup\{\langle x, y\rangle : \|x\| \leq 1\}.$$

(a) Demuestre que $\|\cdot\|_*$ es una norma.

(b) Para la norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, demuestre que su dual es $\|y\|_\infty = \max_i |y_i|$.

(c) Para la norma $\|x\|_2$, prueba que la dual coincide con ella misma.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Define la norma inducida por A asociada a la norma euclidiana como:

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

(a) Demuestre que $\|A\|_2$ es igual a la raíz cuadrada del mayor valor propio de $A^T A$.

(b) ¿Es cierto que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ para toda A, B? Justifique.

(c) Sea A simétrica y definida positiva. ¿Cuál es su norma inducida $\|\cdot\|_2$ en términos de sus valores propios?

Ejercicio 10. Considere el conjunto

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \text{tal que} \begin{pmatrix} tI & x \\ x^T & t \end{pmatrix} \underbrace{\succeq 0}_{\text{Semidefinida positiva.}} \right\}.$$

(a) Analice si K es un conjunto convexo.

(b) ¿Es cierto que $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq t$ para algún $t > 0\}$? ¿Es $K = \mathbb{R}^n$?

Ejercicio 11. Un conjunto C es convexo en su punto medio si, siempre que dos puntos a y b están en C, el promedio o punto medio $(a + b)/2$ está en C. Obviamente, un conjunto convexo es convexo en su punto medio. Se puede demostrar que, en condiciones moderadas, la convexidad en su punto medio implica convexidad. Como ejemplo simple, demuestre que si C es cerrado y convexo en su punto medio, entonces C es convexo.