PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

LISTA PARCIAL

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFE DE PRÁCTICA: MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2024-1

FECHA 08-05-2024

1) Demuestre que la función de producción Leontief es cuasi cóncava:

$$f(x_1, ..., x_n) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{a_n}\right\},\ a_i > 0.$$

Luego, justifique porqué se dice que los insumos de producción son complementarios y no sustitutos. Proponga finalmente una función de producción donde todos los insumos son sustitutos y la tasa marginal de sustitución entre dos insumos es siempre 1.

2) Demuestre que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo y use esto para demostrar que, dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset \mathbb{R}^n$

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||,\ \forall\ \mathbf{y} \in S\}$$

es convexo.

3) Resuelva por cualquier método (gráficamente, técnicas de optimización con restricciones de desigualdad):

1. El problema del consumidor con $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2) = x_1x_2$, $p_1 = p_2 = 1$ e $I = 5$.

2. El problema del consumidor con $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$, $p_1 = p_2 = 1$ e $I = 5$.

4) Demuestre que la función de costos es cóncava en el vector de insumos $\mathbf{w}$.

5) Sea $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$. Demuestre que existe un hiperplano que separa $\{u(x_1, x_2) \geq 10\}$ de $B(p_1, p_2, I) = B(1, 1, 20)$.

6) ¿Qué significa que la utilidad marginal sea decreciente?

7) Defina lo que es la tasa marginal de sustitución.

8) Decimos que f es positivamente homogénea si para todo $\lambda > 0$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Demuestre que toda función positivamente homogénea convexa cumple que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_m x_m) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i),\ \forall\ (x_1, ..., x_m) \in (\mathbb{R}^n)^m,\ \lambda_i > 0.$$

9) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},\ \forall\ x, y \in (a, b).$$

Pruebe que f es convexa.

10) Analice la convexidad de $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln(x_i)$ en términos de los parámetros β_i.

11) Demuestre que si f es convexa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

12) Demuestre que si $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es tal que $f(0) \leq 0$, entonces

$$f(x) + f(y) \leq f(x+y).$$

13) Sea f una función integrable definida en $[a, b]$ y sea φ una función convexa definida al menos en el conjunto $[m, M]$, donde m es el ínfimo de f y M es el supremo de f. Entonces,

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f).$$

14) Consideremos $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y convexo. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Recuerde que f es convexa si y solo si para todo $x, y \in S$, se cumple que $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y-x)$.

a) Supongamos que f es convexa. Entonces, demuestre que $\forall\ x, y \in S$:

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq 0.$$

b) Decimos que una función f es fuertemente convexa si, para cualesquiera $x, y \in S$ y algún $\theta > 0$, se tiene que:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\theta}{2} ||x - y||^2.$$

Estamos asumiendo nuevamente que S es convexo y f diferenciable.

Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes para una función f diferenciable y fuertemente convexa, donde $\theta > 0$:

1. $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\theta}{2} ||y - x||^2$.

2. $g(x) = f(x) - \frac{\theta}{2} ||x||^2$ es convexa.

3. $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq \theta ||x - y||^2$.

4. $f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) - \alpha (1 - \alpha) \frac{\theta}{2} ||x - y||^2$, $\alpha \in (0, 1)$.

15) Considere el siguiente juego entre dos personas, Carlos y Eduardo, que implica lanzar una moneda:

1. Carlos lanza una moneda hasta que salga cara por primera vez.

2. Eduardo paga a Carlos 2^k euros, donde k es el número de lanzamientos necesarios hasta que sale cara.

- Demuestre que el valor esperado del pago que Carlos debería hacer para jugar es infinito.

- ¿Estaría dispuesto usted a pagar una cantidad infinita por jugar a este juego?

- Consideremos ahora una modificación en la que los pagos se calculan como $\ln x$, donde x es el número de lanzamientos necesarios hasta que sale cara. Calcule el pago esperado en este caso.

- ¿Le parece más razonable pagar según esta nueva especificación?
- Interprete el concepto de aversión al riesgo y su relación con la concavidad en el contexto de este juego, y discuta cuál de las dos especificaciones de pago (lineal o logaritmo natural) parece más razonable. Puede referirse a conceptos de libros de texto como *Microeconomía* de Mas-Colell et al. o *Análisis Microeconómico* de Hal Varian.

16) En relación al Teorema del Máximo (File), úselo para demostrar que

1. La función de utilidad indirecta es continua en los parámetros $(\mathbf{p}, I)$.
2. La demanda Marshaliana es continua en los parámetros $(\mathbf{p}, I)$.