Teorema de la Envolvente y Aplicaciones en Teoría Microeconómica

Marcelo Gallardo

April 17, 2026

1 Planteamiento general

Consideramos el problema parametrizado de maximización

$$V(\theta) \;=\; \max_{x\in A} f(x,\theta), \tag{1}$$

donde $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^\ell$ es un parámetro (presupuestos, tipos privados, dotaciones, precios, etc.) y A es el conjunto factible. Si $x^*(\theta)$ denota la solución óptima, la **función valor** es

$$V(\theta) \;=\; f\big(x^*(\theta),\, \theta\big).$$

La pregunta central, siguiendo [1], es *cómo depende V de θ.*

Aplicando la regla de la cadena aparecen dos efectos:

- un **efecto directo** de θ sobre f;
- un **efecto indirecto** vía el óptimo $x^*(\theta)$.

El teorema de la envolvente establece que, bajo condiciones apropiadas, el efecto indirecto se anula porque la condición de primer orden (CPO) lo mata.

2 Versión rápida: máximo interior sin restricciones

Supongamos que $x^*(\theta)$ es interior y que se cumple la CPO. Derivando $V(\theta) = f(x^*(\theta), \theta)$:

$$V'(\theta) \;=\; \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\big(x^*(\theta),\theta\big)}_{=0 \text{ por CPO}} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \theta}(\theta) \;+\; \frac{\partial f}{\partial \theta}\big(x^*(\theta),\theta\big).$$

El primer sumando se anula y queda la fórmula de la envolvente [1]:

$$\boxed{V'(\theta) \;=\; \frac{\partial f}{\partial \theta}(x,\theta)\bigg|_{x=x^*(\theta)}.} \tag{2}$$

Observación. La utilidad práctica es inmediata: $\partial f/\partial\theta$ suele tener forma cerrada, mientras que calcular $\partial x^*/\partial\theta$ puede ser imposible. El teorema permite ignorarlo.

Forma integral

Si $\theta \in [0,1]$, integrando (2):

$$V(\theta) \;=\; V(0) \;+\; \int_0^\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\big(x^*(s),\, s\big)\, ds. \tag{3}$$

Echenique [1] remarca que esta es la versión que uno usa en SS205(c) (diseño de mecanismos): es *más general* que la versión diferencial, porque sólo requiere la existencia de la integral y es válida incluso cuando V no es diferenciable en todos los puntos.

3 Intuición geométrica

Para cada x fijo, la aplicación

$$\theta \longmapsto \varphi_x(\theta) = f(x, \theta)$$

define una curva en el plano $(\theta,\, f)$. La función valor satisface

$$V(\theta) = \max_x \varphi_x(\theta).$$

Es decir, en cada θ la gráfica de V *besa* a la curva $\varphi_{x^*(\theta)}$: coinciden en altura y en pendiente. Por eso V es la **envolvente superior** de la familia $\{\varphi_x\}$ [1].

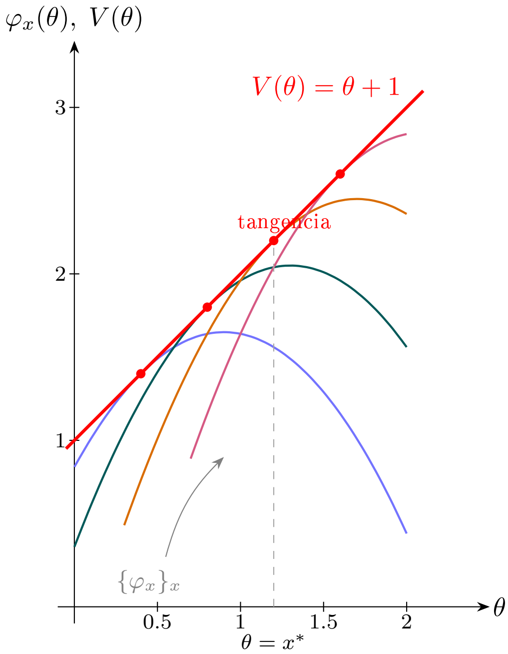

Figura 1: La envolvente V (rojo) toca tangencialmente a cada curva $\varphi_x(\theta) = \theta - (x-\theta)^2 + 1$ en el punto $\theta = x$. El óptimo es $x^*(\theta) = \theta$ y $V(\theta) = \theta + 1$. Los puntos rojos marcan los sucesivos *besos* de V con los miembros de la familia $\{\varphi_x\}$.

Ejemplo 1 (Utilidad logarítmica con costo lineal)**.** Sea

$$f(x, \theta) = \theta \ln x - x, \qquad x > 0,\ \theta > 0.$$

Podemos pensar en θ como un parámetro de *gusto* o *productividad* que multiplica los retornos decrecientes $\ln x$, con costo lineal.

1. **CPO:** $\partial f/\partial x = \theta/x - 1 = 0 \implies x^*(\theta) = \theta$.
2. **Sustitución:** $V(\theta) = \theta \ln \theta - \theta$, luego $V'(\theta) = \ln \theta + 1 - 1 = \ln \theta$.
3. **Vía envolvente:** $\partial f/\partial \theta = \ln x$, que evaluado en $x = x^*(\theta) = \theta$ da $\ln \theta$. ✓

El teorema ahorra la derivación de V por sustitución y regla de la cadena.

Ejemplo 2 (Problema cuadrático con costo de ajuste)**.** Sea

$$f(x, \theta) = \theta x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{c}{2}(x - \bar{x})^2, \qquad c > 0,\ \bar{x} \text{ fijo.}$$

El agente elige x equilibrando el beneficio $\theta x - \frac{1}{2}x^2$ con un costo cuadrático de separarse del nivel de referencia $\bar{x}$.

1. **CPO:** $\theta - x - c(x - \bar{x}) = 0 \implies x^*(\theta) = \dfrac{\theta + c\bar{x}}{1 + c}$.
2. **Vía envolvente:** $\partial f / \partial \theta = x$, así que

$$V'(\theta) \;=\; x^*(\theta) \;=\; \frac{\theta + c\bar{x}}{1 + c},$$

sin necesidad de escribir V explícitamente.

4 Versión con restricciones: teorema clásico

Teorema 1 (Envolvente con restricciones)**.** *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $\Theta \subset \mathbb{R}^\ell$ abiertos, y $f, g_1, \ldots, g_m : X \times \Theta \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Para cada $\theta \in \Theta$, sea $x^*(\theta)$ un máximo local interior de $f(\cdot, \theta)$ sujeto a $g(\cdot, \theta) = 0$. Sea*

$$\mathcal{L}(x, \lambda; \theta) \;=\; f(x, \theta) \;+\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x, \theta),$$

y supongamos que existen multiplicadores $\lambda^*(\theta)$ tales que se cumplen las CPO y que x^*, λ^* son C^1. Entonces $V(\theta) = f(x^*(\theta), \theta)$ es C^1 y

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_j}(\theta) \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_j}\big(x^*(\theta), \lambda^*(\theta), \theta\big) \;=\; \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x^*, \theta) \;+\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(\theta) \, \frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}(x^*, \theta).$$

Observación (Precios sombra)*.* Si la restricción es $g_i(x, \theta) = b_i - h_i(x) = 0$ con $\theta_j = b_j$, entonces $\partial V / \partial b_j = \lambda_j^*$: los multiplicadores son **precios sombra**, y miden cuánto aumenta el valor óptimo al relajar marginalmente la restricción j.

5 Aplicación detallada: el lema de Shephard en $\mathbb{R}^n$

En esta sección el parámetro natural es el vector de *precios* $p \in \mathbb{R}^n_{++}$; reservamos la letra p para respetar la notación económica tradicional, y la consideramos un caso particular del θ de las secciones previas.

5.1 Planteamiento

Un consumidor con utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ estrictamente cuasicóncava y C^2, enfrentando precios $p = (p_1, \ldots, p_n) \gg 0$, resuelve el **problema de minimización del gasto** para alcanzar un nivel $\bar{u}$ de utilidad:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \; p \cdot x \qquad \text{s.a.} \qquad u(x) = \bar{u}. \tag{4}$$

La solución $h(p, \bar{u}) = (h_1(p, \bar{u}), \ldots, h_n(p, \bar{u}))$ es la **demanda hicksiana** (compensada), y la **función de gasto** es

$$e(p, \bar{u}) \;=\; p \cdot h(p, \bar{u}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} p_i \, h_i(p, \bar{u}).$$

Para enmarcar (4) en el Teorema 1 escribimos

$$V(p) \;=\; -\,e(p, \bar{u}) \;=\; \max_{x} \big\{ -p \cdot x \;:\; u(x) = \bar{u} \big\}.$$

5.2 Derivación vía la envolvente

El lagrangiano del problema $\max -p \cdot x$ s.a. $u(x) - \bar{u} = 0$ es

$$\mathcal{L}(x, \lambda; p) \;=\; -p \cdot x \;+\; \lambda\big(u(x) - \bar{u}\big).$$

La CPO respecto a x_i es

$$-p_i \;+\; \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_i \;=\; \lambda^* \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*). \tag{5}$$

Por el Teorema 1,

$$\frac{\partial V}{\partial p_j}(p) \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_j}\big(x^*, \lambda^*, p\big) \;=\; -x_j^*(p, \bar{u}) \;=\; -h_j(p, \bar{u}),$$

porque $\mathcal{L}$ sólo depende del precio a través del término $-p \cdot x$. Como $V = -e$, concluimos:

$$\boxed{\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_j} \;=\; h_j(p, \bar{u}), \qquad j = 1, \dots, n.} \tag{6}$$

Éste es el **lema de Shephard**.

5.3 Verificación directa (y por qué la envolvente es mágica)

Derivando $e(p, \bar{u}) = \sum_i p_i h_i(p, \bar{u})$ directamente:

$$\frac{\partial e}{\partial p_j} \;=\; \underbrace{h_j(p, \bar{u})}_{\text{directo}} \;+\; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial h_i}{\partial p_j}}_{\text{indirecto}}. \tag{7}$$

Shephard (6) afirma que el término indirecto se anula en el óptimo. Para verlo, diferenciamos la restricción $u\big(h(p, \bar{u})\big) = \bar{u}$ respecto a p_j:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \;=\; 0.$$

Usando (5), $\partial u / \partial x_i(x^*) = p_i / \lambda^*$, luego

$$\frac{1}{\lambda^*} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \;=\; 0.$$

Este cálculo explícito es precisamente lo que el teorema de la envolvente *regala*. La intuición: en el óptimo, un reajuste infinitesimal de las cantidades compatible con la restricción no puede cambiar el valor del objetivo a primer orden — que es justamente lo que dice la CPO.

5.4 Consecuencias inmediatas

Proposición 2 (Propiedades de e)**.** *Bajo las hipótesis anteriores:*

1. Homogeneidad. $e(\alpha p, \bar{u}) = \alpha\, e(p, \bar{u})$ *para todo* $\alpha > 0$.
2. Concavidad en precios. $p \mapsto e(p, \bar{u})$ *es cóncava.*
3. Simetría de Slutsky.

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(p, \bar{u}) \;=\; \frac{\partial^2 e}{\partial p_j\, \partial p_i}(p, \bar{u}) \;=\; \frac{\partial^2 e}{\partial p_i\, \partial p_j}(p, \bar{u}) \;=\; \frac{\partial h_j}{\partial p_i}(p, \bar{u}).$$

4. Ley de demanda compensada. *La matriz de Slutsky* $\left(\partial h_i/\partial p_j\right)_{i,j}$ *es semidefinida negativa; en particular,* $\partial h_j/\partial p_j \le 0$.

Comentario. (1) Sigue del cambio de variables en (4). (2) e es el mínimo de una familia de funciones lineales en p (una por cada x factible); el mínimo de una familia lineal es cóncavo. (3) y (4) se siguen de Shephard más diferenciabilidad C^2 de e (Schwarz) y del hecho de que el hessiano de una función cóncava es semidefinido negativo. □

6 Otras aplicaciones

6.1 Lema de Hotelling (teoría de la empresa)

Una empresa con tecnología $\phi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, precio del producto $p \in \mathbb{R}_+$ y precios de insumos $w = (w_1, \ldots, w_n) \gg 0$, resuelve

$$\pi(p, w) \;=\; \max_{x \ge 0} \Big\{ p\, \phi(x) \;-\; w \cdot x \Big\}.$$

Aquí el problema es *irrestricto*; aplicamos directamente [1] en su versión para máximos sin restricciones. Llamando $x^*(p, w)$ a la demanda condicional de insumos y $y^*(p, w) = \phi(x^*)$ a la oferta, se tiene el **lema de Hotelling**:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p}(p, w) \;=\; y^*(p, w), \qquad \frac{\partial \pi}{\partial w_i}(p, w) \;=\; -\, x_i^*(p, w).$$

Interpretación: derivar la función de beneficios respecto al precio del producto devuelve la *oferta*, y respecto al precio del insumo i devuelve *menos* su demanda. La simetría del hessiano de π implica identidades cruzadas como $\partial y^*/\partial w_i \;=\; -\,\partial x_i^*/\partial p$, que son restricciones comprobables empíricamente.

6.2 Identidad de Roy

Sea $v(p, m)$ la función indirecta de utilidad del consumidor, con renta m. Combinando el teorema de la envolvente con la homogeneidad del problema del consumidor se obtiene

$$x_j(p, m) \;=\; -\frac{\partial v/\partial p_j}{\partial v/\partial m},$$

la **identidad de Roy**. Es el dual marshaliano de Shephard.

7 Diseño de mecanismos: la caracterización de Myerson

7.1 El entorno

Un vendedor posee un bien indivisible. Enfrenta un comprador con tipo privado $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, distribuido según una densidad $f > 0$ con CDF F. Interpretamos θ como la valoración marginal del bien.

Por el *principio de revelación*, podemos restringir la atención a **mecanismos directos**: el comprador reporta $s \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ y recibe

$$q(s) \in [0, 1] \quad \text{(probabilidad de asignación)}, \qquad t(s) \in \mathbb{R} \quad \text{(pago)}.$$

La utilidad cuasilineal del comprador cuando tiene tipo θ y reporta s es

$$u(s, \theta) \;=\; \theta\, q(s) \;-\; t(s).$$

Se imponen dos restricciones:

- *Compatibilidad de incentivos* (IC): reportar la verdad es óptimo

$$\theta \in \arg\max_s u(s,\theta), \qquad \forall\, \theta.$$

- *Racionalidad individual* (IR): participar es tan bueno como salirse:

$$U(\theta) \;\equiv\; u(\theta,\theta) \;=\; \theta\, q(\theta) - t(\theta) \;\geq\; 0.$$

7.2 Aplicación del teorema de la envolvente

La utilidad *interim* $U(\theta)$ es, por IC,

$$U(\theta) \;=\; \max_s u(s,\theta).$$

Éste es exactamente el setup del Teorema de la envolvente: U es la función valor asociada a $u(s,\theta)$ parametrizada por θ. Como $\partial u/\partial\theta = q(s)$, y al óptimo $s=\theta$, la forma integral (3) da

$$\boxed{U(\theta) \;=\; U(\underline{\theta}) \;+\; \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\,ds.} \tag{8}$$

7.3 Monotonía

IC implica más que (8): obliga a que q sea **no decreciente**. En efecto, tomando dos tipos $\theta > \theta'$ y escribiendo IC en ambos,

$$\theta\, q(\theta) - t(\theta) \;\geq\; \theta\, q(\theta') - t(\theta'), \qquad \theta'\, q(\theta') - t(\theta') \;\geq\; \theta'\, q(\theta) - t(\theta).$$

Sumando: $(\theta-\theta')\big(q(\theta)-q(\theta')\big) \geq 0$, luego q es monótona no decreciente. En combinación con (8), la monotonía resulta ser *suficiente* para IC ([3], Lemma 2).

7.4 Los pagos quedan determinados por la asignación

Despejando t desde $U(\theta) = \theta\, q(\theta) - t(\theta)$ y usando (8):

$$t(\theta) \;=\; \theta\, q(\theta) \;-\; U(\underline{\theta}) \;-\; \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\,ds. \tag{9}$$

Ésta es una de las implicaciones más célebres del teorema de la envolvente: **en cualquier mecanismo directo IC, los pagos están determinados — salvo una constante $U(\underline{\theta})$ — por la regla de asignación q.** Si IR está atada en el tipo más bajo, $U(\underline{\theta}) = 0$, y t queda totalmente determinada por q.

7.5 Ingreso esperado y valor virtual

El ingreso esperado del vendedor es $\mathbb{E}[t(\theta)]$. Usando (9):

$$\mathbb{E}[t(\theta)] \;=\; \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \Big[\theta\, q(\theta) - U(\underline{\theta}) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\,ds\Big] f(\theta)\,d\theta.$$

Por Fubini, el término doblemente integrado se reescribe como

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\,ds\, f(\theta)\,d\theta \;=\; \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(s)\int_{s}^{\bar{\theta}} f(\theta)\,d\theta\,ds \;=\; \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(s)\,\big(1-F(s)\big)\,ds.$$

Sustituyendo y renombrando la variable muda $s \leftrightarrow \theta$:

$$\mathbb{E}[t(\theta)] \;=\; \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \underbrace{\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right)}_{=\psi(\theta)} q(\theta)\, f(\theta)\, d\theta \;-\; U(\underline{\theta}). \tag{10}$$

La función

$$\psi(\theta) \;=\; \theta \;-\; \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}$$

es el **valor virtual** (*virtual value*) del tipo θ. El ingreso esperado del vendedor es exactamente el *valor virtual esperado* del ganador.

7.6 La subasta óptima

El problema del vendedor se reduce a

$$\max_{q(\cdot)} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \psi(\theta)\, q(\theta)\, f(\theta)\, d\theta \qquad \text{s.a.} \qquad q \text{ no decreciente}, \quad q(\theta) \in [0,1], \quad U(\underline{\theta}) \geq 0.$$

Se resuelve poniendo $U(\underline{\theta}) = 0$ (IR ajustado) y, punto a punto,

$$q^*(\theta) \;=\; \begin{cases} 1, & \psi(\theta) \geq 0, \\ 0, & \psi(\theta) < 0. \end{cases}$$

Bajo el supuesto estándar de **regularidad de Myerson** (monotonía de ψ), esta asignación es automáticamente no decreciente y la solución es factible. Cuando ψ no es monótona se puede recurrir a la técnica de *ironing* [3].

Ejemplo 3 (Distribución uniforme)**.** Si $\theta \sim \mathrm{Unif}[0,1]$, entonces $F(\theta) = \theta$, $f(\theta) = 1$ y

$$\psi(\theta) \;=\; \theta - (1 - \theta) \;=\; 2\theta - 1.$$

Luego $\psi(\theta) \geq 0 \iff \theta \geq 1/2$. La subasta óptima vende al comprador sólo si $\theta \geq 1/2$, y el pago determinado por (9) equivale a cobrar un **precio de reserva** de $1/2$. Ésta es la célebre conclusión de Myerson: el monopolio óptimo sobre una distribución uniforme de valoraciones es vender a *precio fijo* $1/2$.

Referencias

[1] Federico Echenique. *Envelope Theorems*. *Slides* del curso SS205a, California Institute of Technology, diciembre 2024. `https://eml.berkeley.edu/~fechenique/lecture_notes/envelope.pdf`.

[2] A. Mas-Colell, M. Whinston y J. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

[3] R. B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73, 1981.

[4] P. Milgrom e I. Segal. Envelope theorems for arbitrary choice sets. *Econometrica*, 70(2):583–601, 2002.