Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Ciclo 2026-1

Microeconomía 1
Práctica Dirigida 8 — Solucionario

Maximización de beneficios y equilibrio de mercado

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo, Raúl Amao

Ejercicios para la sesión de prácticas

Ejercicio 1. *Maximización de beneficios en el largo plazo.*

(a) El problema de la firma es

$$\max_{K,L\geq 0}\ \pi = p\,q - wL - rK \quad \text{s.a.} \quad q = 2\left[K^{0.5}+L^{0.5}\right],$$

o, de forma equivalente, sustituyendo la restricción en el objetivo:

$$\max_{K,L\geq 0}\ \pi = p\cdot 2\left[K^{0.5}+L^{0.5}\right] - wL - rK.$$

(b) Las condiciones de primer orden (CPO) son

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = p\cdot PMg_L - w = 0 \implies p\cdot PMg_L = w,$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p\cdot PMg_K - r = 0 \implies p\cdot PMg_K = r.$$

Dividiendo la primera condición entre la segunda,

$$\frac{p\cdot PMg_L}{p\cdot PMg_K} = \frac{w}{r} \quad\implies\quad \underbrace{\frac{PMg_L}{PMg_K}}_{TMST_{L,K}} = \frac{w}{r}.$$

Es decir, la maximización de beneficios implica la condición de eficiencia económica $TMST = w/r$: si la empresa maximiza beneficios en el largo plazo, también minimiza costos (es eficiente). Lo contrario no necesariamente se cumple.

(c) Con $PMg_L = L^{-0.5}$ y $PMg_K = K^{-0.5}$, las CPO entregan directamente las demandas derivadas no condicionales:

$$w = p\,L^{-0.5} \implies L^N(p,w) = \left(\frac{p}{w}\right)^2, \qquad r = p\,K^{-0.5} \implies K^N(p,r) = \left(\frac{p}{r}\right)^2.$$

(d) Reemplazando las demandas no condicionales en la función de producción:

$$q^s(p,w,r) = 2\left[\left(\frac{p}{r}\right)^{2\cdot 0.5} + \left(\frac{p}{w}\right)^{2\cdot 0.5}\right] = 2\left(\frac{p}{r} + \frac{p}{w}\right) = 2p\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right).$$

La función de beneficios es

$$\begin{aligned}\pi(p,w,r) = p\,q^s - w\,L^N - r\,K^N &= 2p^2\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right) - w\frac{p^2}{w^2} - r\frac{p^2}{r^2} \\ &= 2p^2\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right) - p^2\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right) = p^2\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

Verificamos las propiedades:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = 2p\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right) > 0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial w} = -\frac{p^2}{w^2} < 0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial r} = -\frac{p^2}{r^2} < 0.$$

La función de beneficios es (estrictamente) creciente en p y decreciente en w y en r. Nótese además que $\partial\pi/\partial p = q^s$ y $\partial\pi/\partial w = -L^N$, $\partial\pi/\partial r = -K^N$, consistente con el lema de Hotelling.

(e) Evaluamos la matriz Hessiana de $\pi(L,K) = 2p\,[K^{0.5} + L^{0.5}] - wL - rK$:

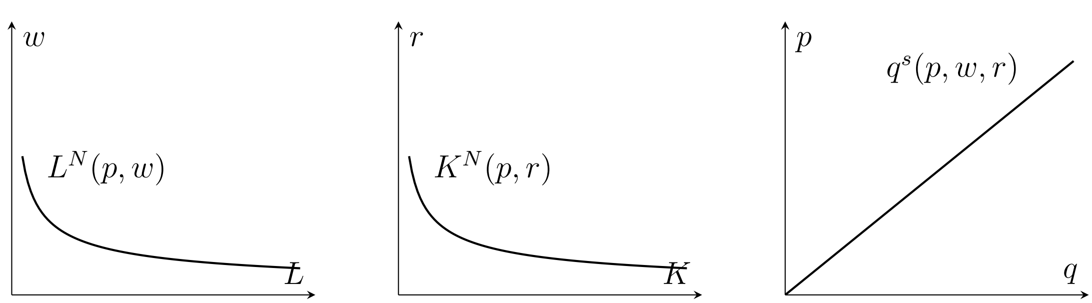
$$H = \begin{pmatrix} \pi_{LL} & \pi_{LK} \\ \pi_{KL} & \pi_{KK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5\,p\,L^{-1.5} & 0 \\ 0 & -0.5\,p\,K^{-1.5} \end{pmatrix}.$$

Como $\pi_{LL} = -0.5\,p\,L^{-1.5} < 0$ y

$$|H| = 0.25\,p^2\,(LK)^{-1.5} > 0,$$

la matriz es definida negativa, el objetivo es estrictamente cóncavo y la solución de las CPO es un máximo global.

(f) Las demandas de factores son decrecientes y convexas en su propio precio, $w = p\,L^{-0.5}$ y $r = p\,K^{-0.5}$; la oferta, $q^s = 2p\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r}\right)$, es una recta creciente que parte del origen en el plano (q,p):



Ejercicio 2. *Equilibrio de largo plazo y subsidios.*

(a) Con libre entrada y salida, el precio de equilibrio de largo plazo es el mínimo del costo medio, donde $CMg(q_i) = CMe(q_i)$:

$$CMg(q_i) = 4q_i - 4, \qquad CMe(q_i) = 2q_i - 4 + \frac{20}{q_i}.$$

Igualando,

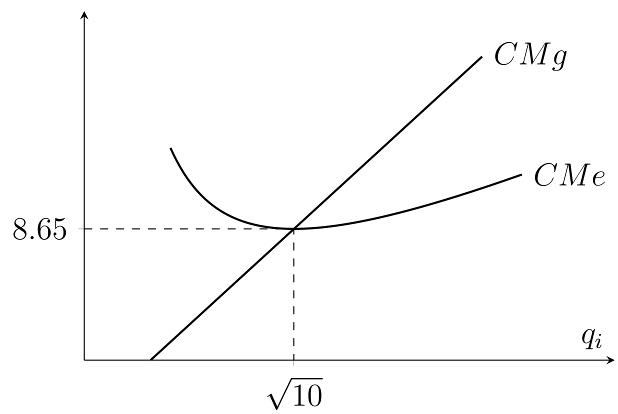
$$4q_i - 4 = 2q_i - 4 + \frac{20}{q_i} \implies 2q_i = \frac{20}{q_i} \implies q_i^2 = 10 \implies q_i^* = \sqrt{10} \approx 3.16.$$

Sustituyendo en el costo marginal, el precio de equilibrio de largo plazo es

$$p^* = 4\sqrt{10} - 4 \approx 8.65.$$

La función de oferta individual se obtiene de $p = CMg(q_i)$:

$$q_i(p) = \begin{cases} 0, & p < 8.65, \\ \dfrac{p}{4} + 1, & p \geq 8.65. \end{cases}$$



El número de empresas se obtiene igualando demanda y oferta agregada al precio p^*:

$$330 - p^* = N\left(\frac{p^*}{4} + 1\right) \implies 330 - 8.65 = N\,(3.16) \implies N^* = \frac{321.35}{3.16} \approx 101.6.$$

En equilibrio operarán aproximadamente 101 empresas, cada una produciendo $\sqrt{10} \approx 3.16$ unidades.

(b) Si el subsidio de $c > 0$ por unidad se otorga a los compradores, reduce el precio efectivo que paga cada consumidor: las empresas reciben p y los consumidores pagan $p - c$. La demanda se convierte en

$$Q(p) = 330 - (p - c) = 330 - p + c.$$

La estructura de costos no cambia, de modo que el precio de largo plazo que reciben las empresas sigue siendo $p^* = 8.65$ y cada una sigue produciendo $\sqrt{10}$ unidades. El número de empresas resuelve

$$330 - (8.65 - c) = N\,(3.16) \implies N^c = \frac{321.35 + c}{3.16}.$$

Como
$$\frac{\partial N^c}{\partial c} = \frac{1}{3.16} > 0,$$
el subsidio al consumo incrementa la cantidad demandada y permite la entrada de más empresas. Por ejemplo, si $c = 5$, $N^c = (321.35 + 5)/3.16 \approx 103.2$.

Ejercicio 3. *Propiedades de la función de beneficios y lema de Hotelling.*

(a) Evaluamos en $(\lambda p, \lambda w)$:

$$\pi(\lambda p, \lambda w) = (\lambda p)^2 (\lambda w)^\alpha = \lambda^{2+\alpha} p^2 w^\alpha.$$

Para homogeneidad de grado uno se requiere $\pi(\lambda p, \lambda w) = \lambda\, \pi(p, w)$, es decir,

$$2 + \alpha = 1 \implies \alpha = -1.$$

Con ello, la función de beneficios queda $\pi(p, w) = \dfrac{p^2}{w}$.

(b) Usando $\pi(p, w) = p^2/w$:

(1) No decreciente en p: $\dfrac{\partial \pi}{\partial p} = \dfrac{2p}{w} > 0$. ✓

(2) No creciente en w: $\dfrac{\partial \pi}{\partial w} = -\dfrac{p^2}{w^2} < 0$. ✓

(3) Convexidad: la matriz Hessiana es

$$H = \begin{pmatrix} \pi_{pp} & \pi_{pw} \\ \pi_{wp} & \pi_{ww} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{w} & -\dfrac{2p}{w^2} \\ -\dfrac{2p}{w^2} & \dfrac{2p^2}{w^3} \end{pmatrix}.$$

Como $\pi_{pp} = 2/w > 0$ y

$$|H| = \frac{2}{w} \cdot \frac{2p^2}{w^3} - \left(-\frac{2p}{w^2}\right)^2 = \frac{4p^2}{w^4} - \frac{4p^2}{w^4} = 0,$$

el Hessiano es semidefinido positivo y π es convexa en (p, w). ✓

(c) Por el lema de Hotelling,

$$q(p, w) = \frac{\partial \pi}{\partial p} = \frac{2p}{w}, \qquad z(p, w) = -\frac{\partial \pi}{\partial w} = \frac{p^2}{w^2}.$$

Ejercicio 4. *De la función de beneficios a la función de costos.*

Solución. Primero obtenemos las demandas no condicionales de factores aplicando el lema de Hotelling:

$$l(p, w, r) = -\frac{\partial \pi}{\partial w} = \frac{p^2}{4w^2}, \qquad k(p, w, r) = -\frac{\partial \pi}{\partial r} = \frac{p^2}{4r^2},$$

y la función de oferta:

$$q(p,w,r) = \frac{\partial \pi}{\partial p} = \frac{p}{2w} + \frac{p}{2r} = \frac{p\,(w+r)}{2wr}.$$

Despejando el precio, $p = \dfrac{2wr\,q}{w+r}$. Sustituyendo en las demandas no condicionales obtenemos las demandas condicionadas de factores:

$$z_l(w,r,q) = \frac{1}{4w^2}\left(\frac{2wr\,q}{w+r}\right)^2 = \frac{r^2q^2}{(w+r)^2}, \qquad z_k(w,r,q) = \frac{1}{4r^2}\left(\frac{2wr\,q}{w+r}\right)^2 = \frac{w^2q^2}{(w+r)^2}.$$

Finalmente,

$$c(w,r,q) = w\,z_l + r\,z_k = \frac{w\,r^2q^2 + r\,w^2q^2}{(w+r)^2} = \frac{wr\,q^2\,(r+w)}{(w+r)^2} = \boxed{\frac{wr\,q^2}{w+r}}.$$

Verificación directa. La función de beneficios satisface

$$\pi(p,w,r) = p\,q(p,w,r) - c\big(w,r,q(p,w,r)\big).$$

Despejando,

$$\begin{aligned} c\big(w,r,q(p,w,r)\big) &= p\cdot\frac{p(w+r)}{2wr} - \left(\frac{p^2}{4w} + \frac{p^2}{4r}\right) \\ &= \frac{p^2(w+r)}{2wr} - \frac{p^2(w+r)}{4wr} = \frac{p^2(w+r)}{4wr}. \end{aligned}$$

Usando $p = \dfrac{2wr\,q}{w+r}$:

$$c = \left(\frac{2wr\,q}{w+r}\right)^2\frac{(w+r)}{4wr} = \frac{wr\,q^2}{w+r},$$

lo cual coincide con lo anterior, como exige la dualidad.

Ejercicio 5. *Equilibrio de mercado en el corto plazo.*

(a) La oferta de la empresa i se obtiene de la condición $P = CMg(q_i)$:

$$P = 8q_i \implies q_i(P) = \frac{P}{8}.$$

La oferta es positiva a partir del precio en que $CMg = CVMe$: como $CVMe(q_i) = 4q_i$, la igualdad $8q_i = 4q_i$ se da en $q_i = 0$, de modo que el precio de cierre es $P = 0$ y la firma opera a cualquier precio positivo.

(b) Como las 100 empresas son idénticas,

$$Q^S(P) = \sum_{i=1}^{100} q_i(P) = 100\cdot\frac{P}{8} = \frac{25P}{2}.$$

(c) En equilibrio, $Q^D = Q^S$:

$$260 - \frac{P}{2} = \frac{25P}{2} \implies 260 = 13P \implies P^* = 20.$$

Reemplazando en la oferta, $Q^* = \dfrac{25\cdot 20}{2} = 250$, con cada empresa produciendo $q_i^* = 2.5$ unidades.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 6. *Precio de cierre y oferta de corto plazo.*

Solución. En el corto plazo el precio de cierre ocurre donde el costo marginal cruza al costo variable medio. Con $CT(q) = 50 - 6q + 2q^2$,

$$CMg(q) = -6 + 4q, \qquad CVMe(q) = \frac{-6q + 2q^2}{q} = -6 + 2q.$$

Igualando,

$$-6 + 4q = -6 + 2q \implies q = 0,$$

y el precio de cierre asociado es $p = -6 + 4(0) = -6 < 0$. Como el precio de mercado nunca es negativo, Ben produce una cantidad positiva para todo $p \geq 0$ (además, su costo fijo es hundido, por lo que no afecta la decisión de operar). Su curva de oferta de corto plazo se obtiene de $p = CMg(q)$:

$$p = -6 + 4q \implies q(p) = \frac{p}{4} + \frac{3}{2}, \qquad p \geq 0.$$

Ejercicio 7. *Oferta de la industria en el corto plazo.*

(a) Reemplazando cada precio en las funciones de oferta individuales (la oferta de Paúl es cero cuando la fórmula arroja un valor negativo):

P	Q_S	Q_P	Q_R	Total
S/1 000	1	0	2	3
S/2 000	2	1	3	6
S/3 000	3	2	4	9

(b) La oferta de la industria es la suma horizontal de las ofertas individuales de quienes están dispuestos a producir a cada precio. Para $P < 1\,000$, Paúl no produce ($Q_P \leq 0$) y solo ofrecen Saúl y Raúl:

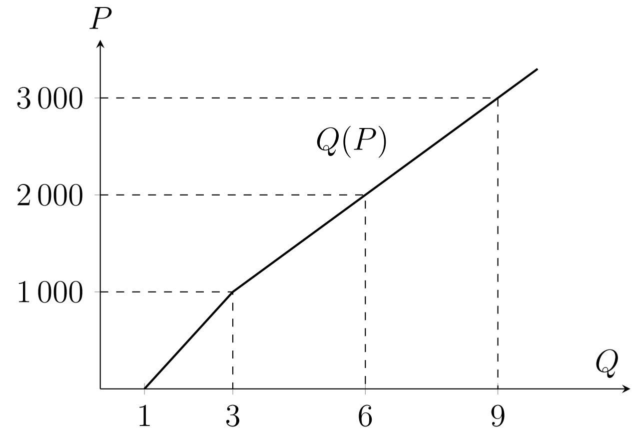
$$Q = \frac{P}{1000} + \frac{P}{1000} + 1 = \frac{P}{500} + 1.$$

Para $P \geq 1\,000$, los tres producen:

$$Q = \frac{P}{1000} + \left(\frac{P}{1000} - 1\right) + \left(\frac{P}{1000} + 1\right) = \frac{3P}{1000}.$$

Por lo tanto,

$$Q(P) = \begin{cases} \dfrac{P}{500} + 1, & P < 1\,000, \\ \dfrac{3P}{1000}, & P \geq 1\,000. \end{cases}$$



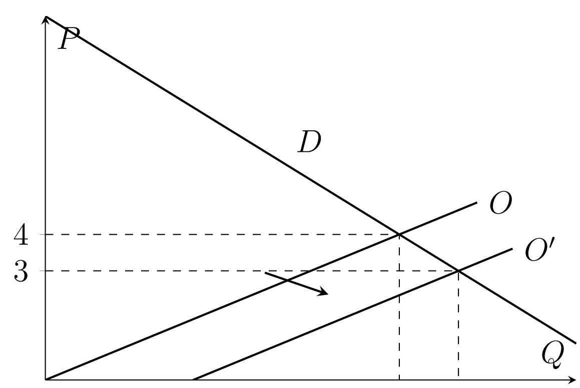
Nótese que la curva es continua en $P = 1\,000$ (ambos tramos pasan por $Q = 3$).

Ejercicio 8. *Entrada, salida y equilibrio de largo plazo.*

(a) Las empresas obtienen beneficios económicos positivos. El panel (a) muestra que el precio de equilibrio de mercado es 4; al producir Q_1 (donde $p = CMg$), el precio está por encima del costo medio, de modo que

$$\pi = \big(4 - CMe(Q_1)\big) \cdot Q_1 > 0.$$

(b) Los beneficios positivos atraerán la entrada de más firmas a la industria. La entrada desplaza la curva de oferta de mercado hacia la derecha, lo que reduce el precio de equilibrio y aumenta la cantidad de equilibrio:



Al bajar el precio, cada empresa reduce su producción y sus beneficios disminuyen.

(c) La entrada se detiene cuando el precio cae a 3, el mínimo del costo medio de largo plazo de la empresa representativa. A ese precio se cumple la condición de equilibrio de largo plazo

$$p = CMe = CMg,$$

y cada empresa obtiene beneficio económico nulo, de modo que ya no hay incentivos para entrar ni para salir.

Ejercicio 9. *Equilibrio de mercado y excedentes.*

Solución. Igualando demanda y oferta:

$$20 - P = 2P - 10 \implies P^* = 10, \qquad Q^* = 20 - 10 = 10.$$

La demanda inversa tiene intercepto $P = 20$ y la oferta inversa, $P = 5$ (precio al cual $Q^S = 0$). Entonces:

$$EC = \frac{Q^*(20 - P^*)}{2} = \frac{10\,(20 - 10)}{2} = 50, \qquad EP = \frac{Q^*(P^* - 5)}{2} = \frac{10\,(10 - 5)}{2} = 25,$$

ambos medidos en miles de soles (la cantidad está en miles de pizzas).